

紙製はりの変形強度の評価*

大 滝 英 征^{*1}The Estimation of the Strength of Beams
Structured by Scrapped Paper

Hideyuki OHTAKI

Nowadays our society demands the manufactured goods which are effective to reclaim, because natural resources are tendency to decrease. So we should not only reinvestigate the materials of goods, but also originate a new design method and a product system. Then we have investigated the structuring method and the strength about the beams whose material are scrapped paper. When the beam by scrapped paper is loaded, the deformation is large and moreover the cross section dose not mentaine flat. Therefore we cannot apply the traditional 'theory of elasticity' to the analysis and estimation of the deformation and strength. In this paper, we propose a new estimation method by analyzing the swelling caused when the papercraft beam is bended.

Key Words: Papercraft, Beams, Deformation, Swelling, Principle of Virtual Works, Limit Analysis

1. ま え が き

紙で製作したI形断面はり等の柱体に負荷が作用する場合、金属製の場合と異なって大変形をきたす。それゆえ、微小変形および変形後の断面平面保持という仮定に立脚する材料力学は適用できない。新たな強度評価法の提案、確立が望まれる次第である。

ここで、ちなみに、 \square 形断面はりについて、単純曲げ時の変形状況を観察してみると、図1(a)に示したようにウェブ部は平面を保持せず、ふくらんだ状態となる。他の断面形状、負荷形態の場合でも同様な現象を得ることは周知である。そこで、このふくらみを生じる限界を幾何学的にモデル化し、それに対して力学的な解析を与え得れば、紙製柱体の変形強度の評価を果たし得るものと考えられる。

そこで、本報では、上記の現象が薄肉断面はりの塑性座屈⁽¹⁾に相通じるものがあるとの知見を得、その適用化を図った。

2. 紙製柱体の変形解析

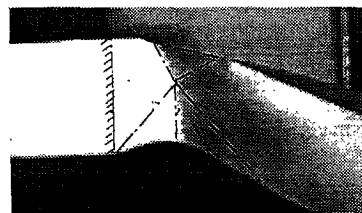
2.1 紙の折り曲げ部の特性 図1(a)の例でも

わかるように、ふくらみの稜部、谷部は曲率を持って連続しているが、ここでは、モデル化のためその部分で折り曲げを生じ、不連続となっているとみなす。

そこで、まず、紙の折り曲げ部の特性について検討



(a) Swelling near the fixed end



(b) The state connecting with straight line along the crest

Fig.1 Deformation of \square shaped beam

* 原稿受付 1997年1月27日.

^{*1} 正員, 埼玉大学工学部(☎338-0825 浦和市下大久保255).

してみる。折り曲げ部の特性を把握するため、三点曲げ試験を行った場合、金属では、負荷部(折り曲げ部となる)以外にも材料の流動、加工硬化を引き起こし、試験片全体がある曲率をもって変形する。これに対し、紙は、複雑に交絡した繊維の結合が緩んだり、切断したりして空けきを生じ、変形が進む。しかし、この空けきは、負荷部以外にはほとんど観察されず、負荷部の曲率だけが大きくなる。他の箇所は依然として直線状を維持したままの状態となる。上記の現象を勘案すると、紙の折り曲げ部は、自由に回転できる関節で置き換えたような変形形態を呈する。この現象は、まさしく、塑性学での塑性関節に該当するといえる。

したがって、紙に折り曲げを生じる限界の曲げモーメントは、

$$M_0 = \frac{\sigma_r h^2}{4}$$

σ_r : 繊維同士の結合が緩み、空けき率が急増する時点の応力

h : 肉厚

で表示してもよい。ただし、 σ_r は紙質、製造法等によって異なるが、三点曲げ試験結果からも推察できる。ちなみに、市販の厚板紙(厚さ 10 mm, 再生紙, 短冊状に切断)について、負荷部(折り曲げ部)における負荷～たわみおよび負荷～空けき率の関係を求め、図 2 に示した。負荷～たわみ曲線を見てみると、ある一定負荷に達した後には、その負荷下でたわみが増加し、弾塑性材料の特性に類似した挙動を示す。この負荷に至

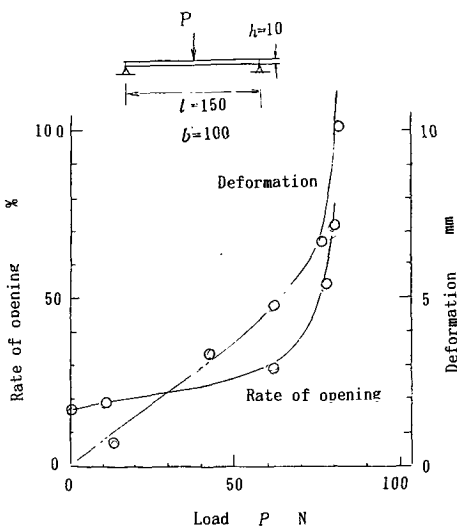
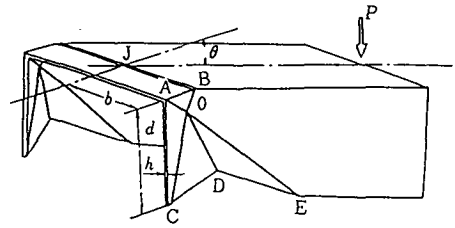
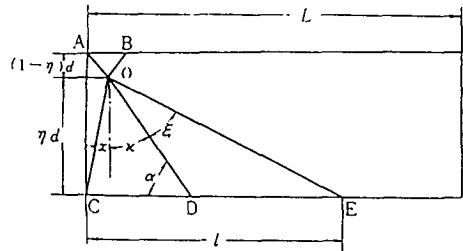


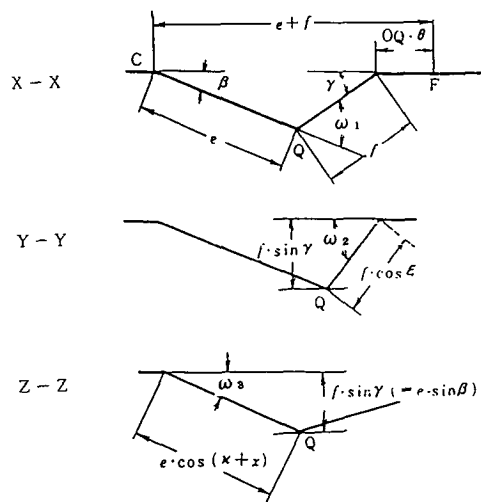
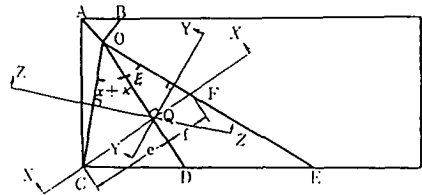
Fig. 2 Relation with an opening, deformation and load



① State of the deformation about shaped beam



② Mechanism of the deformation



③ Geometrical relation

Fig. 3 Geometrical treatise of a swelling

ると、折り目も明確に目視できるようになる。空げき率(観察表面単位面積当たりに占める空げきの割合)も、この負荷に至った後、急増する。この負荷より、折り曲げを生じる限界の曲げモーメントが求まるので、 σ_r は上式より逆算できる。

2・2 紙製はりの変形解析 一端が壁に剛接された片持ちばり先端部に負荷が作用した場合、固定端近傍には、ふくらみを生じる。ふくらみの稜部を直線で結び、その線上では明確な折れ曲りを生じているもの(関節となっている)として、幾何学的なモデル化を図った。図1(b)は図1(a)に対して適用した結果で、まさしく、薄肉断面はりの塑性座屈における運動学的メカニズム⁽¹⁾に該当する。

このようにして、紙製はりの変形状態も運動学的メカニズムとして表現でき得るので、これに対し、仮想仕事の原理、ひいては塑性学という上界定理を適用して解析してみた。

さて、はり先端に作用する荷重 P により、はりが図3に示したように θ だけ回転したものとす。 P によりなされた仕事 W_p は、

$$W_p = \int_0^\theta \{L - (1 - \eta)d\} Pd\theta$$

L : はりの長さ

d : ウェブ部の高さ

η : 図示の寸法(実際の変形状況を観察した上で決定する値。薄板紙では $\eta=1$ とみなしうる)

これを固定端での曲げモーメント M を用いて書き改めると

$$W_p = \int_0^\theta \frac{L - (1 - \eta)d}{L} Md\theta \dots\dots\dots(1)$$

ここで、式(1)に仮想仕事の定理を適用すると

$$M = \frac{L}{L - (1 - \eta)d} \frac{dW_p}{d\theta} \dots\dots\dots(2)$$

3. □形断面はりの固定端近傍における変形

一端が、壁に剛接された片持ちばりを対象とする。曲げのみを生じる負荷方向二とおりについて考えると、運動学的メカニズムは、図1をも参照すると、図3、図4のようになる。この運動学的メカニズムの形態は、断面寸法が変化しても変わらない。以下、上記に対して、式(2)を適用して解析する。

(a) 図3の場合

上界定理に従えば、 W_p は図中に示した関節部に沿っての内力のなした回転変形仕事 W_{pi} (=関節を生じさせるためのモーメント M_{ox} 角変位量 ω_x 関節の長さ L_p)の総和に等しい。すなわち

①関節 OD に沿って内力のなした仕事 W_{p1} ;

$$W_{p1} = \frac{\eta d}{\cos x} (\beta + \gamma) \cdot M_0$$

②関節 OE に沿って内力のなした仕事 W_{p2} ;

$$W_{p2} = \frac{\eta d}{\cos(x + \xi)} \cdot \sin^{-1} \frac{\sin \gamma}{\cos \xi} \cdot M_0$$

③関節 OC に沿って内力のなした仕事 W_{p3} ;

$$W_{p3} = \frac{\eta d}{\cos x} \cdot \sin^{-1} \frac{\sin \beta}{\cos(x + x)} \cdot M_0$$

④関節 BJ に沿って内力のなした仕事 W_{p4} ;

$$W_{p4} = b \cdot \theta \cdot M_0$$

ただしここで、角関節の発生方向を示す角度 x, ξ は、幾何学的な関係より、

$$\begin{cases} \tan x = \frac{1 - \eta}{\eta} \\ \tan \kappa = 1 \\ \tan(x + \xi) = \frac{1 - (1 - \eta) \frac{d}{l}}{\eta \frac{d}{l}} \end{cases}$$

で表される。

また、関節部の高さを決定する β, γ は変形時の Q 点の移動を検討し、

$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{\left\{1 + \frac{f}{e} - (2\eta - 1)\theta\right\}^2 + 1 - \left(\frac{f}{e}\right)^2}{2\left\{1 + \frac{f}{e} - (2\eta - 1)\theta\right\}} \\ \cos \gamma = \frac{\left\{1 + \frac{f}{e} - (2\eta - 1)\theta\right\}^2 + \left(\frac{f}{e}\right)^2 - 1}{2\left\{1 + \frac{f}{e} - (2\eta - 1)\theta\right\} \frac{f}{e}} \\ \frac{f}{e} = (2\eta - 1) \frac{1 - \frac{d}{l}}{(2\eta - 1) \frac{d}{l} + 1} \end{cases}$$

e, f : 図示の寸法

となる。

上式と式(2)とより、曲げモーメントが求まるが、想定した運動学的メカニズムが運動学的に十分であるためには、この曲げモーメントを最小とする必要がある。そのためには、崩壊領域を想定する変数 d/l の値を変化させ、条件を満足する値を抽出する必要がある。この値は、断面の幾何学的寸法に影響を受ける。

(b) 図4の場合

各関節に沿って内力のなす仕事は、前述と同様にし

て ① OQ に沿って内力のなした仕事 W_{p1} ;

$$W_{p1} = \sqrt{(\eta d - b)^2 + \{b - (1 - \eta)d\}^2} \times (\alpha + \beta) \cdot M_0$$

② OD に沿って内力のなした仕事 W_{p2} ;

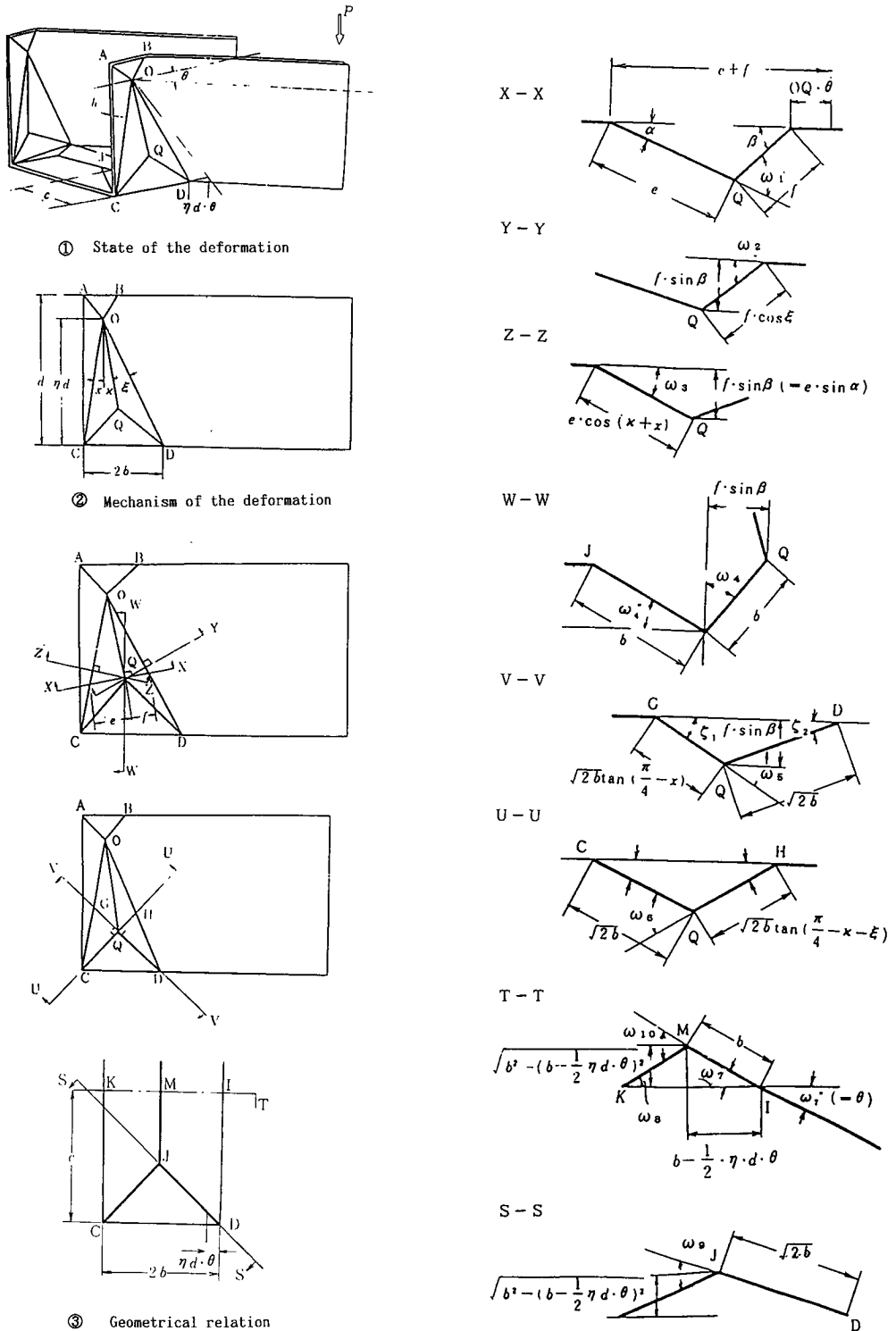


Fig. 4 Geometrical treatise of a swelling

$$W_{p2} = \sqrt{\{2b - (1-\eta)d\}^2 + (\eta d)^2} \cdot \sin^{-1} \frac{\sin \beta}{\cos \xi} \cdot M_0$$

㉔ OC に沿って内力のなした仕事 W_{p3} ;

$$W_{p3} = \sqrt{\{(1-\eta)d\}^2 + (\eta d)^2} \cdot \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\cos(x+\kappa)} \cdot M_0$$

㉕ CQ に沿って内力のなした仕事 W_{p4} ;

$$W_{p4} = \sqrt{2} \cdot b \cdot \left[\sin^{-1} \frac{f \cdot \sin \beta}{\sqrt{2} \cdot b \cdot \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}} + \sin^{-1} \frac{f \cdot \sin \beta}{\sqrt{2} \cdot b} \right] \cdot M_0$$

㉖ QD に沿って内力のなした仕事 W_{p5} ;

$$W_{p5} = \sqrt{2} \cdot b \cdot \left[\sin^{-1} \frac{f \cdot \sin \beta}{\sqrt{2} \cdot b \cdot \frac{1 - \tan(x-\xi)}{1 + \tan(x+\xi)}} + \sin^{-1} \frac{f \cdot \sin \beta}{\sqrt{2} \cdot b} \right] \cdot M_0$$

㉗ CD に沿って内力のなした仕事 W_{p6} ;

$$W_{p6} = 2 \cdot b \cdot \left[\sin^{-1} \frac{f \cdot \sin \beta}{b} - \sin^{-1} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2} \theta \cdot \eta \cdot \frac{d}{b}\right)^2} \right] \cdot M_0$$

㉘ DI に沿って内力のなした仕事 W_{p7} ;

$$W_{p7} = C \cdot \left[\theta - \cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \theta \cdot \eta \cdot \frac{d}{b}\right) \right] \cdot M_0$$

㉙ CK に沿って内力のなした仕事 W_{p8} ;

$$W_{p8} = C \cdot \cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \theta \cdot \eta \cdot \frac{d}{b}\right) \cdot M_0$$

㊱ CJ に沿って内力のなした仕事 W_{p9} ;

$$W_{p9} = \sqrt{2} \cdot b \cdot \left\{ 2 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2} \theta \cdot \eta \cdot \frac{d}{b}\right)^2} \right\} \cdot M_0$$

㊲ JD に沿って内力のなした仕事 W_{p10} ;

$$W_{p10} = \sqrt{2} \cdot b \cdot \left\{ 2 \sin^{-1} \times \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2} \theta \cdot \eta \cdot \frac{d}{b}\right)^2} \right\} \cdot M_0$$

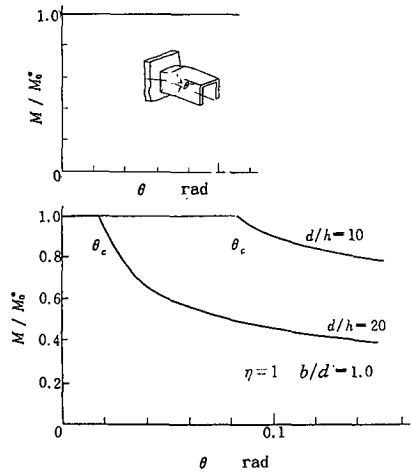
㊳ JM に沿って内力のなした仕事 W_{p11} ;

$$W_{p11} = 2(c-b) \cdot \cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \theta \cdot \eta \cdot \frac{d}{b}\right) \cdot M_0$$

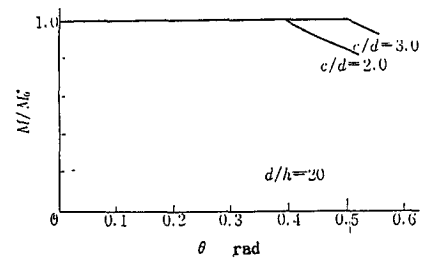
ここで、関節の方向を示す角度 x, κ, ξ は幾何学的条件より

$$\begin{cases} \tan x = \frac{1-\eta}{\eta} \\ \tan \kappa = \frac{1-(1-\eta)\frac{d}{b}}{\eta\frac{d}{b}-1} \\ \tan(x+\xi) = \frac{2-(1-\eta)\frac{d}{b}}{\eta\frac{d}{b}} \end{cases}$$

関節の高さを決定する角度 α, β は Q 点の移動を検討し



(a) The case of Fig. 3



(b) The case of Fig. 4

Fig. 5 Relation with the deformed angle θ and bending moment M/M_0^*

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\left\{ 1 + \frac{f}{e} - \frac{\theta}{\tan(x+\kappa)} \right\}^2 + 1 - \left(\frac{f}{e} \right)^2}{2 \left\{ 1 + \frac{f}{e} - \frac{\theta}{\tan(x+\kappa)} \right\}} \\ \cos \beta &= \frac{\left\{ 1 + \frac{f}{e} - \frac{1}{\tan(x+\kappa)} \right\}^2 + \left(\frac{f}{e} \right)^2 - 1}{2 \left\{ 1 + \frac{f}{e} - \frac{\theta}{\tan(x+\kappa)} \right\} \cdot \frac{f}{e}} \\ \frac{f}{e} &= \frac{\tan \xi}{\tan(x+\kappa)} \\ \frac{f}{b} &= \sqrt{\left(\eta \frac{d}{b} - 1 \right)^2 + \left\{ 1 - (1-\eta) \frac{d}{b} \right\}^2} \cdot \tan \xi \end{aligned} \right.$$

e, f : 図示の寸法

図3の場合にも述べたように、 d/b 等崩壊領域を規定する諸変数の値は、式(2)より算出される曲げモーメントを最小とするように決められるが、 $c/d, d/h$ 等の幾何学的な諸寸法に影響を受ける。

図5は上記に従って、変形状態を解析した結果を示したものである。ただし M_0^* は、図中にも示したようにはりが断面を平面保持(ウェブ部には折れ曲りを生じない)したまま、変形するとした場合の曲げモーメントである。また、 η の値は、対象が薄紙であるので、 $\eta=1$ と選んだ。 θ_c までは、ウェブ部に折れ曲りを生じることなく変形が進行するが、この値に至るとウェブ部に折れ曲りを生じ、以後は、それ以前より小さな負荷で回転変形が進む。さて、図5を見てみると、幾何学的な寸法あるいは負荷の加わり方によって、折れ

曲りを生じる限界の回転角 θ_c の大きさが異なることがわかる。図3の場合は、フランジ幅 b /ウェブ高さ d の等しいはりでは、ウェブ部高さ d /肉厚 h の値が小さいほど θ_c は大きくなる。一方、図4の場合は、 c/d 等の値にかかわらず、 θ_c の値は極めて大きい。したがって、折れ曲りを生ずる以前に、ウェブ部A点の繊維同士の結合力が限界に達し破壊する恐れが強いこともわかる。以上のようにして、紙製柱体の場合は、負荷状況に対応していかなる断面形状のものを選択すべきか把握できるようになった。

4. ま と め

紙製構造体に負荷が加わった場合は、大変形をきたし、従来の材料力学では対処できない。しかし、その変形状態を観察してみると、あたかも塑性学で言う塑性座屈の形態を示している。そこで、変形状況を運動学的メカニズムに対応させた形でモデル化し、これに仮想仕事の原理に基づく力学的解析を加えた。これにより、紙製構造体の幾何学的諸寸法が、変形状態等によりいかなる影響を与えるか把握することができるようになった。

文 献

- (1) 益田森治, 工業塑性力学, (1965), 235, 養賢堂.