

# 一様引張りを受ける突合わせ接合板の界面端部特異応力場の 材料組合せ依存性\*

荒居 善雄<sup>\*1</sup>, 土田 栄一郎<sup>\*1</sup>

## Dependence of Stress Singular Fields on Material Combination of Butt-Jointed Plates Subjected Uniform Tension

Yoshio ARAI and Eiichiro TSUCHIDA

The near-tip stress fields around an interface edge of butt-jointed plates subjected uniform tension are analyzed by finite element method. Based on the result the dependence of the singular stress fields around the interface edge on the material combination is discussed. The relation between the exponent of the stress singularity and its intensity is investigated. The uniqueness of the intensity of singular stress fields for Dundurs's parameters is also studied. The equations which is useful for materials selection of joint concerning with the stress singularity are newly developed.

**Key Words** : Interface, Stress Singularity, Stress Intensity, Material Combination, Aspect Ratio

### 1. 緒 言

代表的な負荷形式、接合板形状比について異材接合板の界面端特異応力場を明らかにすることは、特異応力場を用いた接合強度予測方法の確立のために重要である。Mizunoらは十分に長い接合板の特異性の強さの幅依存性を与えている<sup>(1)</sup>、Munzらは界面垂直方向に長い接合材の特異性の強さと特異性の指数の関係を調べ、特異性の強さは材料組合せで決まることに注目し、特異性の強さを特異性の指数の多項式で示した<sup>(2)</sup>。Heinzelmannらは接合材形状比が特異性の強さに及ぼす影響を調べ<sup>(3)</sup>、特異性の強さを形状比と特異性の指数の関数として近似する式を表した。しかし、Dundursが指摘したように、外力を受ける接合板の応力場は二つの材料パラメータ、すなわち Dundurs のパラメータ、 $\alpha, \beta$  で一意的に定まる<sup>(4)-(7)</sup>。特異性の強さを特異性の指数のみで表すことはあくまでも近似であり、良い近似を与える材料組合せの範囲は限られている。

そこで、本研究では、広範囲な材料組合せについて、

矩形平板同士の突合わせ接合界面端部の弾性特異応力場を計算し、特異性の強さと Dundurs のパラメータ、 $\alpha, \beta$  の関係を定量的に明らかにし、材料組合せから特異応力場の強さを計算する近似式を提案した。さらに、材料組合せの変更による界面端部に作用する応力場の増減を、特異性の強さと指数の関係図上で表示する方法を考察した。

### 2. 解析方法

**2.1 解析モデルおよび特異性の強さの定義** 図1に示すような、2材料の高さが等しい直角の角同士の接合端を持つ接合矩形板モデルを考える。中間層厚さは考えず、弾性板同士の完全接合状態の界面を取扱う。負荷は  $y = \pm L$  における一様引張り  $\sigma_y = p_0$ ,  $\tau_{xy} = 0$  とする。

$r \rightarrow 0$  において界面端近傍の応力場は次式で表される。

$$\sigma_{ij}^m = k_1 \left( \frac{r}{D} \right)^{\lambda_1 - 1} F_{ij}^m(\theta; \lambda_1) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、下添字  $ij$  は  $rr, \theta\theta$  および  $r\theta$  を取り、上添字  $m$  は材料1では I, 材料2では II を取る。 $\lambda_1$  は固有値、 $k_1$  は特異性の強さ、 $D$  は接合板の特性長さであり、図1の形状の場合、幅の1/2、 $W$ 、(高さが幅より

\* 原稿受付 1998年8月20日。

\*1 正員、埼玉大学工学部 (☎ 338-8570 浦和市下大久保255)。

E-mail: yarai@mech.saitama-u.ac.jp

も大きい場合)または高さの1/2,  $L$ , (幅が高さよりも大きい場合)を用いる。  $F_{\theta 1}^m(\theta; \lambda_1)$  は  $F_{\theta 1}^m(\theta=0; \lambda_1)=1$  となるように定義する<sup>(2)</sup>。

$D$  として幅の半分  $W$  を用いる場合の特異性の強さを特に記号  $K_I$  で表す。

$$\sigma_{\theta}^m = K_I \left(\frac{r}{W}\right)^{\lambda_1-1} F_{\theta 1}^m(\theta; \lambda_1) \dots\dots\dots (2)$$

同様に,  $D$  として高さ  $L$  を用いる場合の特異性の強さを特に記号  $K_I'$  で表す。

$$\sigma_{\theta}^m = K_I' \left(\frac{r}{L}\right)^{\lambda_1-1} F_{\theta 1}^m(\theta; \lambda_1) \dots\dots\dots (3)$$

$K_I$  と  $K_I'$  の間には次の関係がある。

$$K_I' = K_I \left(\frac{L}{W}\right)^{\lambda_1-1} \dots\dots\dots (4)$$

$K_I$  は  $L/W$  の増加に伴い増加し,  $L/W \geq 2.0$  の場合に一定値  $\bar{K}_I$  に収束する<sup>(3)(6)</sup>。同様に,  $K_I'$  は  $L/W$  の減少に伴い増加し,  $L/W \leq 0.1$  の場合に一定値  $\bar{K}_I'$  に収束する<sup>(3)(6)</sup>。固有値  $\lambda_i (i=1, 2, \dots)$  は次式の根である。

$$\lambda^2(\lambda^2-1)\alpha^2 + 2\lambda^2 \left[ \sin^2\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) - \lambda^2 \right] \alpha\beta + \left[ \sin^2\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) - \lambda^2 \right]^2 \beta^2 + \sin^2\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$\alpha, \beta$  は Dundurs のパラメータで次式で定義される<sup>(4)</sup>。

$$\alpha = \frac{\Gamma(\kappa^I+1) - (\kappa^{II}+1)}{\Gamma(\kappa^I+1) + \kappa^{II}+1} \dots\dots\dots (6)$$

$$\beta = \frac{\Gamma(\kappa^I-1) - (\kappa^{II}-1)}{\Gamma(\kappa^I+1) + \kappa^{II}+1} \dots\dots\dots (7)$$

ここで,  $\Gamma = G^{II}/G^I$ ,  $G^I$  と  $G^{II}$  は材料1, 2の横弾性係数,  $\kappa^m$  は, 平面歪の場合,  $3-4\nu^m$ , 平面応力の場合,  $(3-\nu^m)/(1+\nu^m)$ ,  $\nu^m$  は材料  $m$  のポアソン比である。

2・2 材料組合せ 材料組合せは, 以下の五とおりについて検討した。

(1) 同一ポアソン比で縦弾性係数の異なる場合  $\nu^I = \nu^{II} = 0.001, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.499$  のそれぞれについて,  $E^{II}/E^I = 1.5, 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100$  とした。

(2) ポアソン比が異なり, 縦弾性係数も異なる場合  $\nu^I = 0.499$  一定として,  $\nu^{II} = 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  のそれぞれについて,  $E^{II}/E^I = 1.5, 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100$  とした。

(3) 材料2が剛体の場合  $\nu^I = 0.001, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.499$  とした。

(4) 同一の特異性の指数  $1-\lambda_1$  となる場合 式(5)を用いて,  $(\alpha, \beta)$  の組合せを計算した。  $1-\lambda_1 = 0.05, 0.15, 0.25$  について, Dundurs のパラメータ  $\alpha$  を0.1ずつ変化させて対応する  $\beta$  を与える  $\nu^I, \nu^{II}, E^{II}/E^I$  を, 式(6), (7)を用いて計算した。

(5) 同一の Dundurs パラメータとなる場合  $\alpha = 0.8, \beta = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.35$  について, 対応する  $\nu^I, \nu^{II}, E^{II}/E^I$  を, 式(6), (7)を用いて計算した。

(6) Dundurs パラメータ  $\alpha, \beta$  の内, 一方を一定として, 他方を変化させる場合  $\alpha = 0.1, 0.2, 0.33, 0.5, 0.66, 0.8, 0.9, 0.96, 1.0$  として  $\beta$  を変化させた場合と,  $\beta = -0.2, -0.1, 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  として  $\alpha$  を変化させた場合を計算した。

図2の四角印は以上の材料組合せを Dundurs パラメータ線図上に示したもので, 特異性を有する材料組合せの大部分を含んでいることがわかる。

2・3 特異応力場パラメータの計算方法 式(1)において,  $(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0}$  の有限要素解と  $r/D$  の関係について, 最小二乗法により両対数直線近似して  $k_1$  と  $\lambda_1$  を算出した。近似範囲は,  $L/W = 2.0$  の場合  $5.0 \times 10^{-6} \leq r/W \leq 1.0 \times 10^{-3}$ ,  $L/W = 0.1$  の場合  $5.0 \times 10^{-7} \leq r/W \leq 1.0 \times 10^{-4}$  とした。有限要素解析には8節点アイソパラメトリック平面ひずみ要素を用いた。モデル全体の要素分割例を図3に, 界面端部近傍の拡大を図4に示す。  $0 < r/D \leq 0.1$  ( $D$  は  $L$  または  $W$  の小さいほう)においては, 次式に従って半径方向要素寸法を

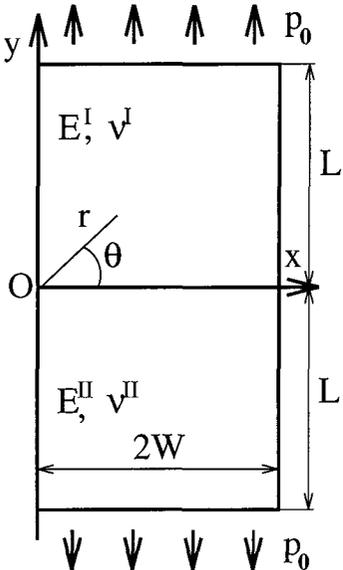


Fig. 1 Jointed dissimilar plates

決定し、60分割した。

$$l_i = \frac{l_i - 1}{0.9}, i = 1, 2, \dots, 60 \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $l_i$  は半径分割における  $i$  番めの要素の半径方向寸法、 $l_0/D = 10^{-8}$  とした。周方向には均等に 40 分割した。全要素数は 3 000 ( $L/W = 2.0$  の場合) または 4 600 ( $L/W = 0.1$  の場合)、全節点数は 9 179 ( $L/W = 2.0$  の場合) または 14 119 ( $L/W = 0.1$  の場合) である。数値計算は、汎用有限要素解析プログラム ABAQUS を用いて行った<sup>(9)</sup>。

材料 1 を Cu、材料 2 を  $Si_3N_4$  とした場合について、 $L/W = 2$  の形状で、 $0 < r/D \leq 0.1$  における半径方向の要素分割数が特異応力場パラメータの計算結果に及ぼす影響を表 1 に示す。特異性の指数の理論値は、 $1 - \lambda_1 = 0.085203$  である。0.1D を 50 分割以上で、 $1 - \lambda_1 = 0.0852$ 、 $K_I/p_0 = 0.805$  に収束していると考えら

れる。以下では、60 分割を標準とする。

また、 $L/W = 2$  の形状で、弾性係数の組合せが異なり、Dundurs パラメータが等しい四とおりの材料組合せについて計算した特異応力場パラメータを比較して表 2 に示す。Dundurs が指摘したように、縦弾性係数比やポアソン比の比が異なり Dundurs パラメータが等しい場合、特異性の指数  $1 - \lambda_1$  と特異性の強さ  $\bar{K}_I/p_0$  はそれぞれ同じ値となる<sup>(4)</sup> が、本研究の有限要素解も、0.2% 以内の誤差で同じ値となっている。

### 3. 解析結果

**3.1 特異性の強さと指数の関係** 図 5 は特異性の指数  $1 - \lambda_1$  を Dundurs パラメータ線図上に示したもので、突合わせ接合板(図 1 参照、直角の角同士の間接合端)の場合、特異性を有する材料組合せ  $[(\alpha - 1)/4 \leq$

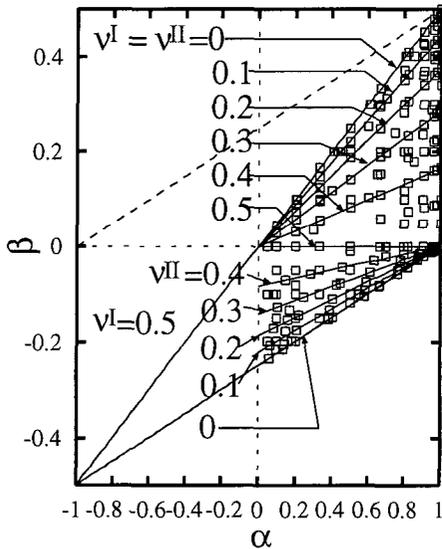


Fig. 2 Range of Dundurs's parameter for material combinations

Table 1 Numerical convergence of singularity parameters

Number of division	$\bar{K}_I/p_0$	$1 - \lambda_1$
30	0.8764	0.07637
35	0.8000	0.08584
40	0.8008	0.08571
50	0.8050	0.08519
60	0.8050	0.08519

Table 2 Comparison of stress singularity parameters with different material combinations having same Dundurs parameters

$E^{II}/E^I$	$\nu^I$	$\nu^{II}$	$\alpha$	$\beta$	$1 - \lambda_1$	$\bar{K}_I/p_0$
10.374	0.41	0.2027	0.8	0.1	0.2585	0.5690
8.525	0.435	0.4817	0.8	0.1	0.2585	0.5690
9.9396	0.31	0.042	0.8	0.2	0.2085	0.6249
8.1019	0.35	0.4583	0.8	0.2	0.2085	0.6249
9.2437	0.19	0.1000	0.8	0.3	0.1345	0.7202
7.2000	0.25	0.499	0.8	0.3	0.1345	0.7201
9.0909	0.1	0.001	0.8	0.35	0.0801	0.8097
7.033	0.18	0.494	0.8	0.35	0.0801	0.8097



Fig. 3 Overall mesh division ( $L/W = 2$ )

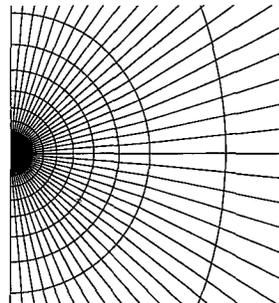


Fig. 4 Near edge mesh division

$\beta < 0.5\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ ]の特異性の指数は実数である。

十分に細長形状の  $L/W=2$  について、特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0$  と特異性の指数  $1-\lambda_1$  の関係を図6に示す。四角印が本研究の有限要素解、『Munz et. al.』の実線は文献(2)の結果である。本研究の有限要素解によれば、同一の特異性の指数  $1-\lambda_1$  に対して特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0$  が最大0.1程度の幅を有する。この幅を有しながら、全体としては、 $1-\lambda_1$  の増加に伴い  $\bar{K}_1/p_0$  は一様に減少する。

Munzらは文献(2)において、 $\bar{K}_1/p_0$  と  $1-\lambda_1$  の関係として、次式を示し、 $\bar{K}_1/p_0$  と  $1-\lambda_1$  の間に一義的な関係があると述べている。

$$\bar{K}_1/p_0 = 1 - 2.89(1-\lambda_1) + 11.4(1-\lambda_1)^2$$

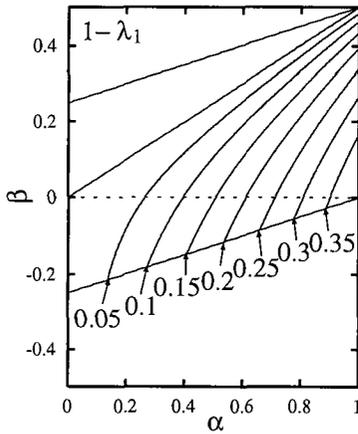


Fig. 5 Eigen value contours in Dundurs's parameter diagram

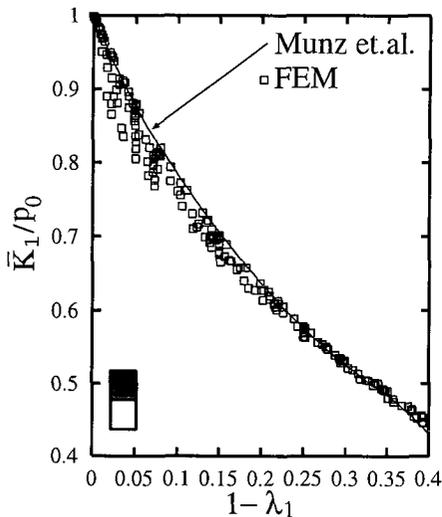


Fig. 6 Relation between  $\bar{K}_1$  and  $1-\lambda_1(L/W=2)$

$$\begin{aligned} & -51.9(1-\lambda_1)^3 + 135.7(1-\lambda_1)^4 \\ & -135.8(1-\lambda_1)^5 \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

実線で示す文献(2)の関係は、 $1-\lambda_1$  の増加に伴う  $\bar{K}_1/p_0$  の全体的な減少の状態をよく表している。しかし、本研究の有限要素解によれば、式(9)を用いて  $1-\lambda_1$  から  $\bar{K}_1/p_0$  を定量的に評価する際には、最大9%の評価誤差を含む。

十分に横長形状の  $L/W=0.1$  について、特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0$  と特異性の指数  $1-\lambda_1$  の関係を図7に示す。十分に横長形状 ( $L/W=0.1$ ) の場合、前述の細長形状 ( $L/W=2$ ) の場合と同様に、同一の  $1-\lambda_1$  に対して  $\bar{K}_1/p_0$  が最大0.1程度の幅を有する。細長形状の場合と異なる特徴として、 $1-\lambda_1$  の増加に伴う  $\bar{K}_1/p_0$  の減少は一様でなく、 $1-\lambda_1 > 0.3$  においてほぼ一定の  $\bar{K}_1/p_0$  となる点があげられる。図中の Present result の実線は有限要素解の  $\bar{K}_1/p_0$  と  $1-\lambda_1$  の関係全体を次式に示すように最小二乗法により5次式に近似したものである。本近似式と有限要素解の差は最大6%程度である。

$$\begin{aligned} \bar{K}_1/p_0 = & 1 - 3.28(1-\lambda_1) + 14.51(1-\lambda_1)^2 \\ & - 38.23(1-\lambda_1)^3 + 41.01(1-\lambda_1)^4 \\ & + 3.36(1-\lambda_1)^5 \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

Heinzelmannらは文献(3)において、 $0 < 1-\lambda_1 < 0.13$  の範囲で  $\bar{K}_1/p_0 = \bar{K}_1/p_0$  [式(9)]を示した。また、図中の「Heinzelmann et. al.」の実線は文献(3)の結果であり、文献(3)において取扱われている材料組合せの範囲 ( $0 < 1-\lambda_1 < 0.13$ ) のみ実線でプロットした。この範囲内で文献(3)の結果は本研究の有限要素

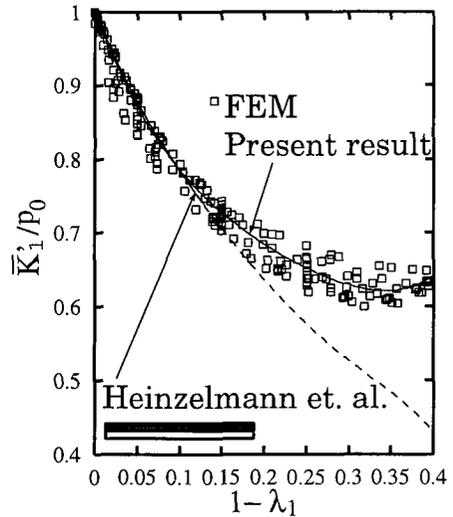


Fig. 7 Relation between  $\bar{K}_1$  and  $1-\lambda_1(L/W=0.1)$

素解の最小二乗近似結果とほぼ一致している。しかし、現実的な材料組合せにおいても  $0.13 < 1 - \lambda_1 < 0.4$  となる場合は考えられる。この場合、式(9)を  $0.13 < 1 - \lambda_1 < 0.4$  に拡張して適用すると、図7中の破線となり、本研究の有限要素解との差が大きくなり、 $\bar{K}_1/p_0 = \bar{K}'_1/p_0$  は良い近似ではない。

十分に細長形状の  $L/W=2$  と十分に横長形状の  $L/W=0.1$  について、同一の特異性の指数  $1 - \lambda_1$  となる  $\alpha, \beta$  の組合せにおける特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0, \bar{K}'_1/p_0$

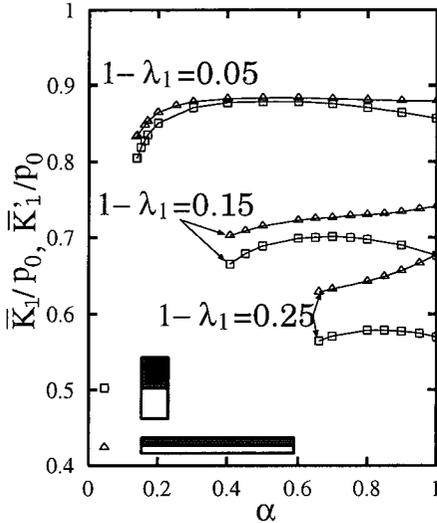


Fig. 8 Change of  $\bar{K}_1/p_0, \bar{K}'_1/p_0$  for same  $1 - \lambda_1$  with respect to  $\alpha$

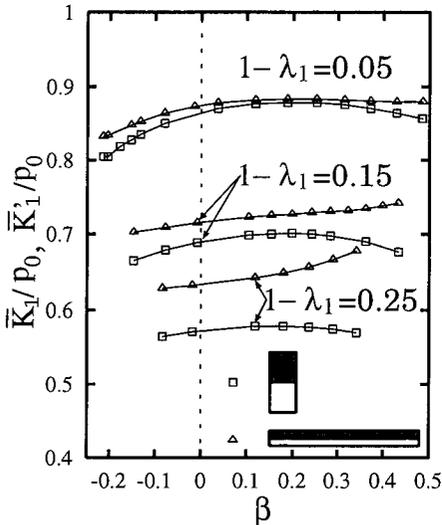


Fig. 9 Change of  $\bar{K}_1/p_0, \bar{K}'_1/p_0$  for same  $1 - \lambda_1$  with respect to  $\beta$

と  $\alpha$  の関係を図8に示す。同一の  $1 - \lambda_1$  となる  $\alpha, \beta$  の組合せにおいて、 $\bar{K}_1/p_0$  の最小値を与える  $\alpha, \beta$  の組合せは、形状比によらず  $\alpha, \beta$  の最小値、すなわち、 $\beta = (\alpha - 1)/4$  を満足する  $\alpha, \beta$  (図2のいちばん下の実線) である。これは、特異性の強さと指数の関係図(図6)において、同一の  $1 - \lambda_1$  に対する  $\bar{K}_1/p_0$  の下限の材料組合せが、 $\beta = (\alpha - 1)/4$  を満足する  $\alpha, \beta$  で表されることを意味する。同一の特異性の指数  $1 - \lambda_1$  となる材料組合せ ( $0.05 \leq 1 - \lambda_1 \leq 0.25$ ) において、Dundurs パラメータ  $\alpha$  の変化に伴う特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0, \bar{K}'_1/p_0$  の変化は、最大9%程度である。同一の特異性の指数について、十分に細長形状の場合と十分に横長形状の場合の特異性の強さを比較すれば、横長形状のほうが常に大きく、その差は、特異性の指数の増加に伴い増加する。

十分に細長形状の  $L/W=2$  と十分に横長形状の  $L/W=0.1$  について、同一の特異性の指数  $1 - \lambda_1$  となる  $\alpha, \beta$  の組合せにおける特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0, \bar{K}'_1/p_0$  と  $\beta$  の関係を図9に示す。  $1 - \lambda_1 = 0.05$  の場合、特異性の強さと  $\alpha$  の関係と比較して  $\beta$  の変化に伴う特異性の強さの変化は緩やかである。

### 3・2 特異性の強さと Dundurs パラメータの関係

十分に細長形状の  $L/W=2$  と十分に横長形状の  $L/W=0.1$  について、それぞれの特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0$  および  $\bar{K}'_1/p_0$  と Dundurs パラメータ  $\alpha$  の関係を比較して図10に示す。  $\bar{K}_1/p_0$  は  $\alpha$  の増加に伴い一様に減少する。  $\beta = -0.2, -0.1, 0.4$  の場合、 $\bar{K}'_1/p_0$  は  $\alpha$  の増

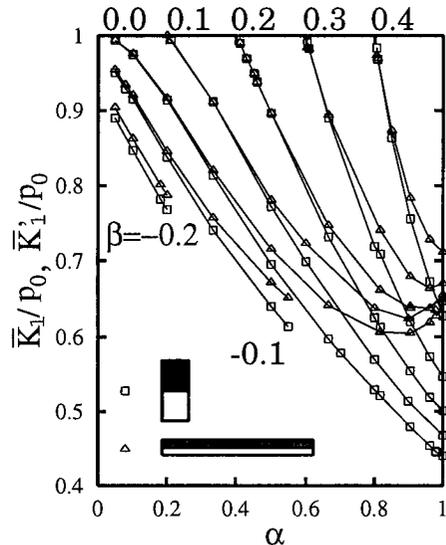


Fig. 10 Comparison of intensity- $\alpha$  relation for aspect ratio (constant  $\beta$ )

加に伴い一様に減少するが、 $\beta=0.0, 0.1, 0.2, 0.3$ の場合、 $\bar{K}_1/p_0$ は $\alpha$ の増加に伴い減少し、極小値をとり、再び増加する。それぞれの特異性の強さ $\bar{K}_1/p_0$ および $\bar{K}'_1/p_0$ が0.8以上の場合、同一の $\alpha$ に対して、 $\bar{K}_1/p_0$ と $\bar{K}'_1/p_0$ は近い値となる。しかし、 $\bar{K}_1/p_0$ および $\bar{K}'_1/p_0$ が0.8以下の場合、両者の差は $\alpha$ の増加に伴い増加する。

十分に細長形状の $L/W=2$ と十分に横長形状の $L/W=0.1$ について、それぞれの特異性の強さ $\bar{K}_1/p_0$ および $\bar{K}'_1/p_0$ とDundursパラメータ $\beta$ の関係を比較して図11に示す。 $\bar{K}_1/p_0$ と $\bar{K}'_1/p_0$ は $\beta$ の増加に伴い一様に増加する。それぞれの特異性の強さ $\bar{K}_1/p_0$ および $\bar{K}'_1/p_0$ が0.8以上の場合、同一の $\beta$ に対して、 $\bar{K}_1/p_0$ と $\bar{K}'_1/p_0$ は近い値となる。しかし、 $\bar{K}_1/p_0$ および $\bar{K}'_1/p_0$ が0.8以下の場合、両者の差は $\beta$ の減少に伴い増加する。

十分に細長形状の $L/W=2$ と十分横長形状の $L/W=0.1$ について、 $\bar{K}_1/p_0$ および $\bar{K}'_1/p_0$ と $\alpha, \beta$ の関係を $\alpha$ について二次式で、 $\beta$ について三次式で仮定し、両者の積の関数形を用い、その係数を $\bar{K}_1/p_0$ および $\bar{K}'_1/p_0$ と $\alpha, \beta$ の有限要素解析結果から最小二乗法を用いて近似し、次の二つの式を得た。

$$\begin{aligned} \bar{K}_1/p_0 &= 1.0 + 1.005\beta + 6.652\beta^2 + 15.828\beta^3 \\ &\quad - 0.566\alpha - 2.079\alpha\beta - 17.387\alpha\beta^2 - 1.859\alpha\beta^3 \end{aligned}$$

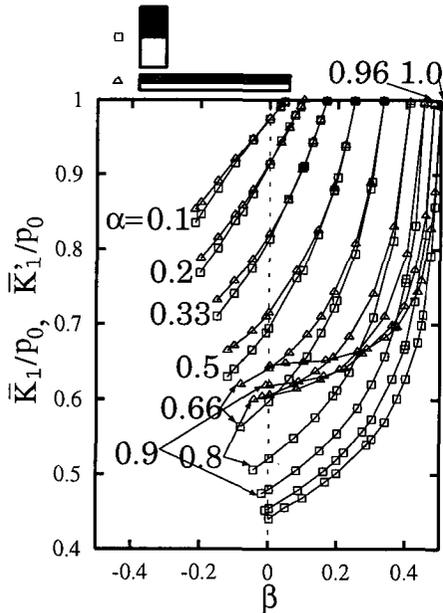


Fig. 11 Comparison of intensity- $\beta$  relation for aspect ratio (constant  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} &-0.000631\alpha^2 + 2.035\alpha^2\beta + 5.052\alpha^2\beta^2 \\ &-2.561\alpha^2\beta^3 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}'_1/p_0 &= 1.0 + 1.093\beta + 8.906\beta^2 + 21.888\beta^3 \\ &-0.670\alpha - 3.070\alpha\beta - 23.499\alpha\beta^2 - 11.124\alpha\beta^3 \\ &+ 0.279\alpha^2 + 2.887\alpha^2\beta + 8.611\alpha^2\beta^2 \\ &+ 0.181\alpha^2\beta^3 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

近似式(11), (12)は、 $0.06 \leq \alpha \leq 1.0$ ,  $(\alpha-1)/4 < \beta < 0.5\alpha$ の範囲で、有限要素解を5%以内の精度で表す。

3.3 材料組合せと界面端部近傍応力場の評価

界面に作用する垂直応力成分 $\sigma_{\theta\theta}$ は $\theta=0$ ,  $r \rightarrow 0$ において次式で表される。

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0} = k_1 \left( \frac{r}{D} \right)^{\lambda_1 - 1} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $k_1, D$ は、それぞれ十分に細長形状の場合に $\bar{K}_1, W$ 、十分に横長形状の場合に $\bar{K}'_1, L$ とする。

ある材料組合せから材料組合せを変更する場合を想定する。現在の材料組合せについて、 $k_1/p_0 - 1 - \lambda_1$ 線図上に一点が定まる(例えば、図13の点A)。界面上の界面端から距離 $r = \bar{r}D$ 離れた位置における垂直応力成分は次式で表される。

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0, r=\bar{r}D} = k_1 (\bar{r})^{\lambda_1 - 1} = \bar{\sigma}_{\theta\theta} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ は定数である。界面上の界面端から同一距離 $r = \bar{r}D$ において垂直応力成分 $(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0, r=\bar{r}D}$ が同じ値( $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ )となる $k_1/p_0 - 1 - \lambda_1$ 線図上の曲線は次式で表される。

$$k_1/p_0 = \bar{r}^{1-\lambda_1} \bar{\sigma}_{\theta\theta}/p_0 \dots\dots\dots (15)$$

この $k_1/p_0 - 1 - \lambda_1$ 線図上の曲線を、ここでは『等応力線』と呼ぶことにする。図12に模式的に示すように、特異応力場の支配的な範囲の最大半径を $\bar{r}_{max}D$ 、弾性解析結果で応力が表される最小半径を $\bar{r}_{min}D$ と

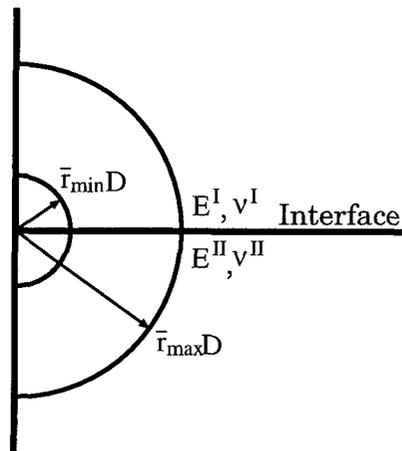


Fig. 12 Reference stress region

する。

一例として、十分に細長形状の  $L/W=2.0$  について、 $\alpha=0.85$ ,  $\beta=0.17987$  の材料組合せの  $\bar{r}=10^{-3}$  および  $\bar{r}=10^{-5}$  における等応力線を、図 13 の  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  印の実線と破線で表す。  $2\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  と  $0.5\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  は、それぞれの  $\bar{r}$  において界面に作用する垂直応力成分が 2 倍および 1/2 倍となる等応力線であり、斜線領域は  $10^{-5} < \bar{r} < 10^{-3}$  の範囲で垂直応力成分が 2 倍および 1/2 倍となる領域を表す。基準の材料組合せ(図中の  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ )に対して、 $10^{-5} < \bar{r} < 10^{-3}$  の範囲で垂直応力成分が 2 倍または 1/2 倍となる材料組合せは、 $\bar{K}_1/p_0$  と  $1-\lambda_1$  線図上で比較的広い帯状領域( $\bar{K}_1/p_0$  の幅が約 0.1,  $1-\lambda_1$  の幅が約 0.1)となる。図 13 によって、材料組合せの変更による界面端部近傍での垂直応力成分の増減の状態が直観的に把握できる。

また、特定の  $\bar{r}$  において詳細に応力の増減を検討する場合、新たな材料組合せごとに  $1-\lambda_1$  と  $\bar{K}_1/p_0$  を計算し、図の等応力線と比較して、左下ならば応力は低下、右上ならば応力は増加と判断できる。しかし、 $1-\lambda_1 > 0.25$  の場合、同一の  $1-\lambda_1$  に対する  $\bar{K}_1/p_0$  の幅は小さいので、Munz らが主張するように、 $1-\lambda_1$  の増減によって  $(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0, r=\bar{r}D}$  の増減を表すことができる<sup>(2)</sup>。

十分に横長形状の  $L/W=0.1$  について、 $\alpha=0.85$ ,  $\beta=0.17987$  の材料組合せの  $\bar{r}=10^{-3}$  および  $\bar{r}=10^{-5}$  における等応力線を、図 14 の  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  印の実線と破線で表す。十分に細長形状の場合と比較して、定性的には同様であるが、 $1-\lambda_1$  が大きい場合にも、同一の  $1-\lambda_1$

に対する  $\bar{K}_1/p_0$  の取り得る範囲が大きいため、 $1-\lambda_1$  の増減によって  $(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0, r=\bar{r}D}$  の増減を表すことはできない。

#### 4. 結 言

広範囲な材料組合せについて、矩形平板同士の突合せ接合界面端部の弾性特異応力場を計算し、特異性の強さと Dundurs のパラメータ、 $\alpha, \beta$  の関係を定量的に明らかにし、材料組合せから特異応力場の強さを計算する近似式を提案した。さらに、材料組合せの変更による界面端部に作用する応力場の増減を、特異性の強さと指数の関係図上で表示する方法を考察した。得られた結果を要約すれば、以下のとおりである。

(1) 十分に細長形状 ( $L/W=2$ ) の場合、同一の特異性の指数  $1-\lambda_1$  に対して特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0$  が最大 0.1 程度の幅を有する。この幅を有しながら、全体としては、 $1-\lambda_1$  の増加に伴い  $\bar{K}_1/p_0$  は一様に減少する。

(2) 十分に横長形状 ( $L/W=0.1$ ) の場合、(1) 項の細長形状の場合と同様に、同一の特異性の指数  $1-\lambda_1$  に対して特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0$  が最大 0.1 程度の幅を有する。細長形状の場合と異なる特徴として、 $1-\lambda_1$  の増加に伴う  $\bar{K}_1/p_0$  の減少は一様でなく、 $1-\lambda_1 > 0.3$  においてほぼ一定の  $\bar{K}_1/p_0$  となる点があげられる。

(3) 同一の  $1-\lambda_1$  となる  $\alpha, \beta$  の組合せにおいて、 $\bar{K}_1/p_0$  および  $\bar{K}'_1/p_0$  の最小値を与える  $\alpha, \beta$  の組合せは、形状比によらず  $\alpha, \beta$  の最小値、すなわち、 $\beta=(\alpha$

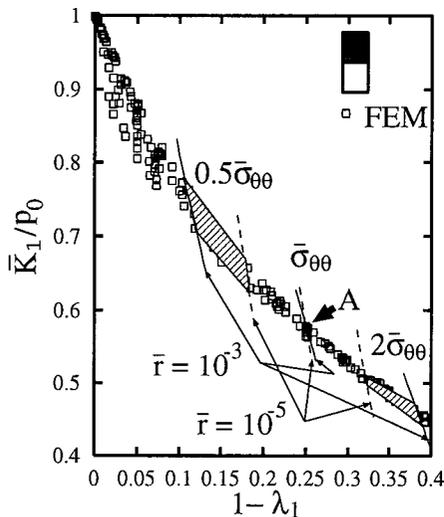


Fig. 13 Iso-stress lines and representation of stress scales ( $L/W=2.0$ )

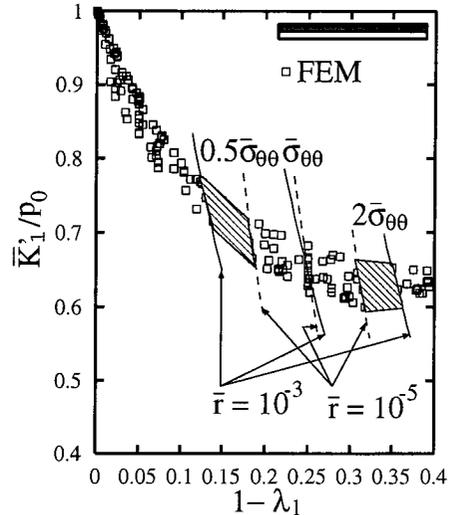


Fig. 14 Iso-stress lines and representation of stress scales ( $L/W=0.1$ )

$-1)/4$  を満足する  $\alpha, \beta$  である。これは、特異性の強さと指数の関係図において、同一の  $1-\lambda_1$  に対する  $\bar{K}_1/p_0$  および  $\bar{K}'_1/p_0$  の下限の材料組合せが、 $\beta=(\alpha-1)/4$  を満足する  $\alpha, \beta$  で表されることを意味する。同一の特異性の指数について、十分に細長形状 ( $L/W=2$ ) の場合と十分に横長形状 ( $L/W=0.1$ ) の場合の特異性の強さを比較すれば、横長形状のほうが常に大きく、その差は、特異性の指数の増加に伴い増加する。

(4)  $0.8 \leq \alpha \leq 1$  かつ  $0 \leq \beta \leq 0.3$  の場合を除き、特異性の強さは  $\alpha$  の減少と  $\beta$  の増加に伴い増加する。材料組合せから  $\alpha, \beta$  を用いて特異性の強さを計算する近似式を提案した。近似式は、 $0.06 \leq \alpha \leq 1, (\alpha-1)/4 < \beta < 0.5\alpha$  の範囲で有限要素解を 5% 以内の精度で表す。それぞれの特異性の強さ  $\bar{K}_1/p_0$  および  $\bar{K}'_1/p_0$  が 0.8 以上の場合、同一の  $\alpha$  に対して、 $\bar{K}_1/p_0$  と  $\bar{K}'_1/p_0$  は近い値となる。しかし、 $\bar{K}_1/p_0$  および  $\bar{K}'_1/p_0$  が 0.8 以下の場合、両者の差は  $\alpha$  の増加および  $\beta$  の減少に伴い増加する。

(5) 基準の材料組合せに対して、界面上の界面端からある範囲離れた領域 ( $10^{-5} < r/D < 10^{-3}$ ) において、垂直応力成分が 2 倍または 1/2 倍となる材料組合せは、 $\bar{K}_1/p_0$  と  $1-\lambda_1$  線図上で比較的広い帯状領域 ( $\bar{K}_1/p_0$  の幅が約 0.1,  $1-\lambda_1$  の幅が約 0.1) となる。提案した方法によって、材料組合せの変更による界面端部近傍での垂直応力成分の増減の状態が直観的に把握でき

る。

## 文 献

- (1) Mizuno, K., Miyazawa, K. and Suga, T., "Characterization of Thermal Stresses in Ceramic/Metal-Joint," *J. Faculty of Engineering*, 39, No. 4 (1988), 401-412, The University of Tokyo (B).
- (2) Munz, D. and Yang, Y. Y., "Stress Singularities at the Interface in Bonded Dissimilar Materials Under Mechanical and Thermal Loading," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 59 (1992), 857-861.
- (3) Heinzlmann, M., Munz, D. and Yang, Y. Y., "Effect of Geometry on the Stresses in Bonded Materials after a Change in Temperature," *Comp. Mater. Sci.*, 1 (1993), 259-264.
- (4) Dundurs, J., Discussion of "Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges Under Normal and Shear Loading," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 36 (1969), 650-652.
- (5) Bogy, D. B., "Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges Under Normal and Shear Loading," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 35 (1968), 460-466.
- (6) Bogy, D. B., "The Plane Solution for Joined Dissimilar Elastic Semistrips Under Tension," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 42 (1975), 93-98.
- (7) 結城良治編, 界面の力学, (1993), 21, 培風館.
- (8) Arai, Y. and Tsuchida, E., "Dependence of Stress Intensity on Aspect Ratio of Jointed Plate," *Theor. Appl. Mech.*, 47 (1998), 125-133.
- (9) ABAQUS Ver. 5.7, *General Purpose Finite Element Program*, RI (1997), 2.1.1, Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket.