

## 歯付きベルトの非線形振動特性に関する研究\*

### (第3報, 幅広の歯付きベルトの場合)

李紹昌\*<sup>1</sup>, 大滝英征\*<sup>2</sup>, 綿貫啓一\*<sup>2</sup>

## Analysis of Nonlinear Oscillations of Timing Belt

### (3rd Report, Wide Timing Belt)

Shaochang LI, Hideyuki OTAKI and Keiichi WATANUKI

Analytical results are presented for nonlinear vibrations of a wide timing belt with parametric excitation in tension and meshing impact forces. The equation of motion is developed from Hamilton's principle, and approximate solutions to the basic equation are obtained using the Galerkin method. The steady-state responses are calculated using the harmonic balance method. Analytical results are presented which show the contributions of pulley speed and tension to natural frequencies. The resonant amplitude varies with cross section  $y$ . In the case of variable tension, the resonant peak value varies with the rates of variable tension, and tension. Amplitude reduction by means of periodic variation of tension is effective for tension and rate of variable tension.

**Key Words:** Wide Timing Belt, Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Parametric Resonance, Galerkin's Method, Meshing Impact

## 1. 緒言

歯付きベルトの動特性解明は、騒音と振動問題に関連して重要な課題となってきた。そこで、これまで、久保らによる歯付きベルトの運転騒音の発生機構の研究<sup>(1)</sup>、Koyamaらによる騒音の低減法の研究<sup>(2)(3)</sup>、あるいは著者らによるかみあい衝撃力の発生メカニズムをモデル化し、歯付きベルトの非線形振動特性を理論的に解析した研究等がある<sup>(4)(5)</sup>。しかし、いずれの研究においても、ベルトを移動弦として、解析してきている。実際状態により近い幅広の歯付きベルトについての振動特性解析はほとんど進ちょくしていないようである。そこで本報では、幅広の歯付きベルトの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを弾性論を利用し導き、Hamilton原理に立脚し、二次元運動方程式を誘導した。解析では、まず、境界条件を満足するベルトの張り方向と幅方向についての分離形関数を導入した。次いで、Galerkin法を用いて多自由度の連立非線形微分方程式を求めた。この方程式について、調和バランス法を利用して解析し、非線形振動特性を理論的

に求めた。その結果、かみあいと張力変化による結合励振系によって生じる振動特性を解明できたので報告する。

## 2. 基礎方程式

幅広の歯付きベルトについての解析モデルを図1に示す。ここでは、歯付きベルトを薄肉板とみなす。Hamilton原理に立脚すると

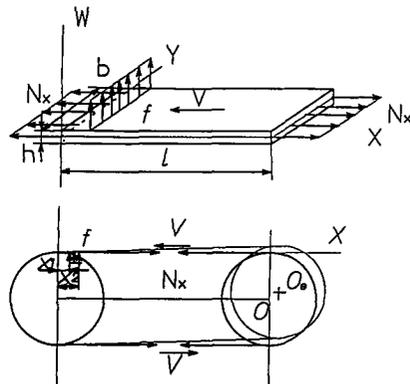


図1 幅広の歯付きベルトの解析モデル

\* 原稿受付 平成6年9月5日。

\*<sup>1</sup> 正員, 埼玉大学大学院 (〒338 浦和市下久保 255)。

\*<sup>2</sup> 正員, 埼玉大学工学部。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ : ある時刻

$T$ : 運動エネルギー

$U$ : ポテンシャルエネルギー

となる。

ここで、薄肉板の弾性論<sup>(6)(7)</sup>を参考に、ベルトの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを求めると、次式で表される。

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^b \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + V^2 \right] dx dy \dots\dots\dots (2)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + N_x \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - 2fW \right\} dx dy \dots\dots\dots (3)$$

$W(x, y, t)$ : ベルトの横方向(ベルトの張り方向( $x$ 方向)に対し直角方向)変位

$\rho$ : ベルト単位体積当たりの質量

$h$ : ベルトの肉厚

$V$ : ベルトの速度

$E$ : ベルト材の縦弾性係数

$\nu$ : ポアソン比

$D$ : ベルトの曲げ剛性 ( $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ )

$N_x$ :  $x$ 方向単位長さ当たりの力

$f$ : ベルトの歯とプーリの歯底とが接触し始める瞬間に生じる衝撃力

式(2)と(3)を式(1)に代入すると

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^l \left\{ \rho h \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left( \delta \frac{\partial W}{\partial t} + V \delta \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right. \right. \\ &\quad - D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] \\ &\quad \left. - N_x \frac{\partial W}{\partial x} \delta \frac{\partial W}{\partial x} + f \delta W \right\} dx dy dt = 0 \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta W$ はベルトの横方向変位の変分を示し、その付帯条件は

$$\delta W|_{x=0} = \delta W|_{x=l} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\delta W|_{y=0} = \delta W|_{y=b} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\delta W|_{t=t_1} = \delta W|_{t=t_2} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

今、ベルトを張り方向に対しては、プーリとベルトとの接触点で支持された両端単純支持状態、幅方向においては自由状態とみなす。すると、境界条件は

$$(W)_{x=0} = (W)_{x=l} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=l} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

となる。

ここで、式(4)にグリーン定理を適用し、付帯条件と境界条件を考慮すると、幅広の歯付きベルトの運動方程式は

$$\begin{aligned} D \nabla^4 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\rho h V \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \\ + (\rho h V^2 - N_x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = f \\ \nabla^2: \text{ラプラス演算記号} (= \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

で与えられることになる。

式(12)の第1項めが移動弦とした場合に比較し、幅広を考慮したために加味されるようになった項である、今、ベルトは図1(b)のようにプーリが偏心量を有し駆動されているとすると

$$N_x = N_0(1 + \epsilon \cos \omega t) \dots\dots\dots (13)$$

$N_x$ : 歯付きベルトの受ける張力。

$N_0$ : 偏心のない場合のベルトの初張力。

$\epsilon$ : プーリの偏心による張力の変化率。

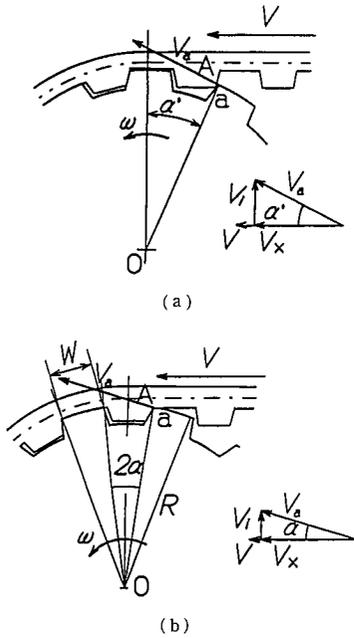


図2 歯付きベルトのかみあい衝撃過程

次に、前報<sup>(5)</sup>で検討したのと同様に、かみあい衝撃の発生現象を勘案する。図2(b)のようにプーリ歯底にベルトが接触した際に衝撃力が発生し<sup>(6)</sup>、衝撃荷重がベルトの幅方向に均一であると仮定すれば、図3に示したように

$$f = F_i [u(x-x_1) - u(x-x_2)] \delta(t-t_i) \dots (14)$$

となる。

$F_i$  は歯のかみあいによる衝撃力が発生する区間  $(x_1, x_2)$  の間での単位長さ当たり作用するインパルス力である。

$u(x-x_1)$ ,  $u(x-x_2)$  は単位ステップ関数

$\delta(t-t_i)$  は  $t=t_i$  におけるデルタ関数

を意味する。

$t_i$  は図2のように  $i$  番めの歯がかみあい衝撃を生じる時刻である。

そして、 $F_i$  は

$$F_i = \frac{f_i}{(x_2-x_1)b} = \frac{I}{(x_2-x_1)b\Delta t}$$

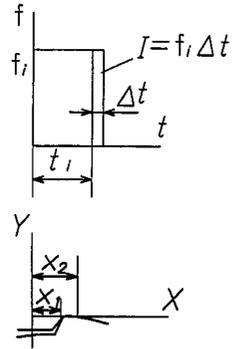


図3 衝撃力解析モデル

より求まる。ただし、 $f_i$  は図2に示したように衝撃区間に加わるインパルス力で、 $I$  は力積で、 $\Delta t$  は時刻  $t_i$  での衝撃持続時間である。

### 3. 解析方法

運動方程式(12)の解を求めるために、まず境界条件を満足する関数  $X_j(x)$ ,  $Y_k(y)$  と未知時間関数  $q_{jk}(t)$  を用いて、ベルトの変位を

$$W(x, y, t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n X_j(x) Y_k(y) q_{jk}(t) \dots (15)$$

で表す。ただし、 $m$  は  $x$  方向の  $m$  次振動モード、 $n$  は  $y$  方向の  $n$  次振動モードを意味する。ここで関数  $X_j(x)$ ,  $Y_k(y)$  を次式で与えられる。

$$X_j(x) = \sin \frac{j\pi x}{l} \quad j=1, 2, \dots, m. \dots (16)$$

$$Y_k(y) = A_k \cos \frac{\beta_k y}{b} + B_k \cosh \frac{\beta_k y}{b} + C_k \sin \frac{\beta_k y}{b} + D_k \sinh \frac{\beta_k y}{b} \quad k=1, 2, \dots, n. \dots (17)$$

上式は境界条件式(8), (9)を満足する。さて、関数  $Y_k(y)$  の係数  $A_k, B_k, C_k, D_k$  は次数  $k$  に対応する未定係数で、他の境界条件を満足させる時点に決定できる。すなわち式(17)を境界条件式(10), (11)に代入すると、各次数  $k$  に対応した  $\beta_k$  に関する条件式を得る。

$$\begin{aligned} & (-\cos \beta_k + \cosh \beta_k)^2 \left[ \left( \frac{\beta_k}{b} \right)^4 - \nu^2 \left( \frac{j\pi}{l} \right)^4 \right] - \left\{ \left[ -\left( \frac{\beta_k}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] \sin \beta_k \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{\beta_k}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] \sinh \beta_k \right\} \left\{ \left[ \left( \frac{\beta_k}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] \sin \beta_k + \left[ \left( \frac{\beta_k}{b} \right)^2 - \nu \left( \frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] \sinh \beta_k \right\} = 0 \end{aligned} \dots (18)$$

これを解けば  $\beta_k$  が求まるので、未定係数  $A_k, B_k, C_k, D_k$  が決定されることになる。

さて、式(13)~(15)を式(12)に代入し、ガラーキン法を適用すると

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_0^l \int_0^b \left[ D \nabla^4 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\rho h V \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + [\rho h V^2 - N_0(1 + \varepsilon \cos \omega t)] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right. \\ \left. - F_i [u(x-x_1) - u(x-x_2)] \delta(t-t_i) \right] X_r Y_s dx dy = 0 \\ r=1, 2, \dots, m; s=1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $\Phi_{rs} = X_r(x) Y_s(y)$  ( $r=1, 2, \dots, m; s=1, 2, \dots, n$ ) において、 $q_{jk}$  ( $j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$ ) に関する振動方程式を求めると、

$$[M] \ddot{q} + [G] \dot{q} + [\rho h V^2 - N_0(1 + \varepsilon \cos \omega t)] [E] q + [H] q = F_i [Q] \delta(t-t_i) \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$[M] = M_{sr} = \rho h \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_0^l \int_0^b \Phi_{jk} \Phi_{rs} dx dy \dots\dots\dots (21)$$

$$[G] = G_{sr} = 2\rho h V \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_0^l \int_0^b \frac{\partial \Phi_{jk}}{\partial x} \Phi_{rs} dx dy \dots\dots\dots (22)$$

$$[E] = E_{sr} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_0^l \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi_{jk}}{\partial x^2} \Phi_{rs} dx dy \dots\dots\dots (23)$$

$$[H] = H_{sr} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_0^l \int_0^b D \left[ \frac{\partial^4 \Phi_{jk}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi_{jk}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_{jk}}{\partial y^4} \right] \Phi_{rs} dx dy \dots\dots\dots (24)$$

$$[Q] = Q_{sr} = \int_0^l \int_0^b [u(x-x_1) - u(x-x_2)] \Phi_{rs} dx dy \dots\dots\dots (25)$$

式(20)の形は移動弦とした場合に類似しているが、 $[H]q$ 項が含まれるのが特徴である。 $[M]$ は $n \times m$ 次慣性マトリックス項を、 $[E]$ は $n \times m$ 次剛性マトリックス項、 $[H]$ は $n \times m$ 次剛性マトリックス項を意味する。 $[G]$ は $n \times m$ 次回転マトリックス項で $G^T = -G$ の特性をもっている。 $q$ は $m \times n$ マトリックスである。 $M_{sr}$ ,  $G_{sr}$ ,  $E_{sr}$ ,  $H_{sr}$ ,  $Q_{sr}$ はそれぞれマトリックスに対応する $s$ 行め、 $r$ 列めの要素を示す。

衝撃力は前報<sup>(6)</sup>でも検討したように歯が互いにかみあうごとに生じる。今、衝撃力による振動特性を求めるに当たり、式(20)に調和バランス法を適用することを考える。式(20)中の張力の変化を示す項および衝撃力に関する項を歯のかみあい周期 $2\pi/z\omega$  ( $z$ : 歯数,  $\omega$ : プーリの回転速度)によって、フーリエ級数展開する。

$$\varepsilon \cos \omega t = \varepsilon \left[ C_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{ak} \cos kz\omega t + C_{bk} \sin kz\omega t) \right] \dots\dots\dots (26)$$

$$F_i \delta(t-t_i) = F_i \left[ d_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (d_m \cos zm\omega t + h_m \sin zm\omega t) \right] \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $C_{a0}$ ,  $C_{ak}$ ,  $C_{bk}$ ,  $d_0$ ,  $d_m$ ,  $h_m$ はフーリエ級数展開した場合の係数である。

すると、式(20)は次のように書き改められる。

$$[M] \ddot{q} + [G] \dot{q} + \left[ (\rho h V^2 - N_0) - N_0 \varepsilon \left\{ C_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{ak} \cos kz\omega t + C_{bk} \sin kz\omega t) \right\} \right] [E] q + [H] q \\ = F_i [Q] \left[ d_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (d_m \cos zm\omega t + h_m \sin zm\omega t) \right] \dots\dots\dots (28)$$

いま、式(28)の解 $q = q_{jk}$ を次のように仮定する。

$$q_{jk} = \sum_{l=0}^{\xi} (A_{jkl} \cos lz\omega t + B_{jkl} \sin lz\omega t) \quad (j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (29)$$

式(29)を式(28)に代入し整理すると、 $q_{jk}$ に関する $m \times n$ 個の振動方程式が得られる。これらの方程式に調和バランス法を用いると、以下の連立方程式が求まる。

$$\int_0^{2\pi/\omega z} \left[ [M]_{sr} \ddot{q} + [G]_{sr} \dot{q} + \left[ (\rho h V^2 - N_0) - N_0 \varepsilon \left\{ C_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{ak} \cos kz\omega t + C_{bk} \sin kz\omega t) \right\} \right] [E]_{sr} q \right. \\ \left. + [H]_{sr} q - [Q]_{sr} \left[ a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos zm\omega t + b_m \sin zm\omega t) \right] \right] \cos lz\omega t dt = 0 \\ (r=1, 2, \dots, m)(s=1, 2, \dots, n)(l=0, 1, \dots, \xi) \dots\dots\dots (30)$$

$$\int_0^{2\pi/\omega z} \left[ [M]_{sr} \ddot{q} + [G]_{sr} \dot{q} + \left[ (\rho h V^2 - N_0) - N_0 \varepsilon \left\{ C_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{ak} \cos kz\omega t + C_{bk} \sin kz\omega t) \right\} \right] [E]_{sr} q \right. \\ \left. + [H]_{sr} q - [Q]_{sr} \left[ a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos zm\omega t + b_m \sin zm\omega t) \right] \right] \sin lz\omega t dt = 0 \\ (r=1, 2, \dots, m)(s=1, 2, \dots, n)(l=0, 1, \dots, \xi) \dots\dots\dots (31)$$

ここで  $a_0 = F_i d_0$ ,  $a_m = F_i d_m$ ,  $b_m = F_i h_m$ .

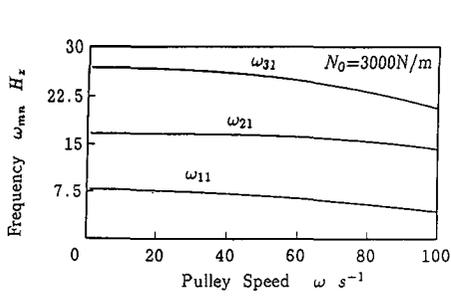


図4 固有振動数とプーリの回転速度

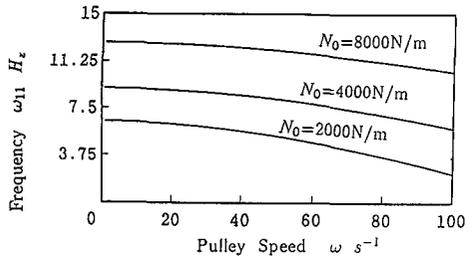


図5 固有振動数と初張力

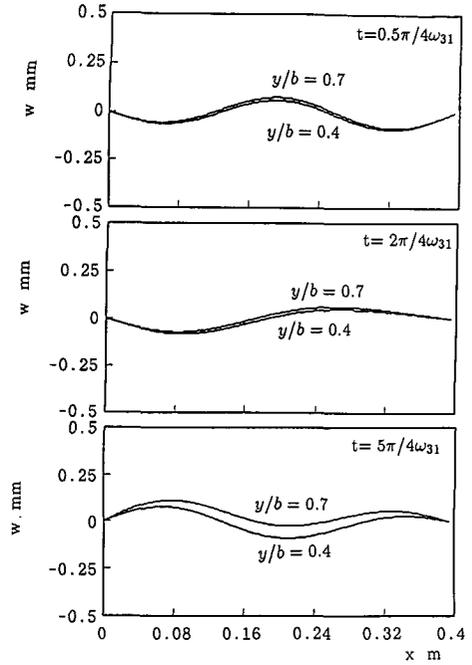
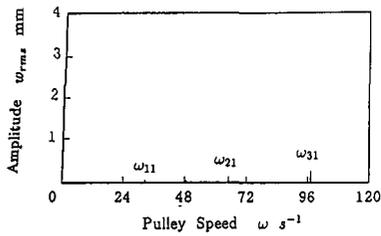
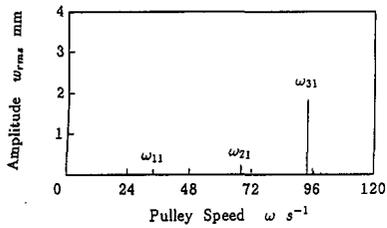
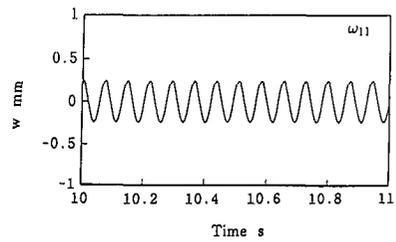


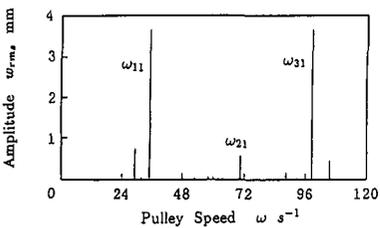
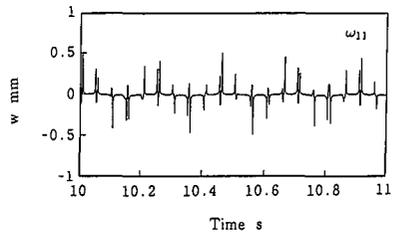
図6 異なる y 断面の振動波形



(a)  $N_0=3000 \text{ N/m}$   $\epsilon=0$



(b)  $N_0=3000 \text{ N/m}$   $\epsilon=0.1$



(c)  $N_0=3000 \text{ N/m}$   $\epsilon=0.2$

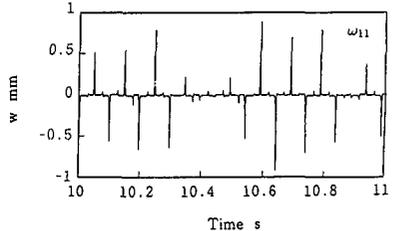


図7 強制系と結合系の振動特性

上式の  $[M]_{sr}\ddot{q}$ ,  $[G]_{sr}\dot{q}$ ,  $[E]_{sr}q$ ,  $[H]_{sr}q$  はマトリックス  $[M]$ ,  $[G]$ ,  $[E]$ ,  $[H]$  の  $s$  行めの要素を  $q$  の  $r$  列めの要素に掛けることを意味する。さて、ここで、 $\cos$  と  $\sin$  関数の直交性を利用すると、上式より  $A_{jki}$ ,  $B_{jki}$  に関する一次元の  $(2\xi+1)\times m\times n$  連立方程式が得られる。この連立方程式に Gauss-jordan 法を用いて解くことにより、最終的に周期的な衝撃力が作用する場合の  $A_{jki}$ ,  $B_{jki}$  が得られる。かくして、式(15)および(29)によって、周期的な衝撃力下での応答振幅が求められることになる。さらに、振動応答を振幅の実効値  $w_{rms}$  で表示すると、次のように示される。

$$w_{rms} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \sum_{l=1}^{\xi} A_{jkl} X_j Y_k \right)^2 + \left( \sum_{l=1}^{\xi} B_{jkl} X_j Y_k \right)^2 \right\} + \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n A_{jk0} X_j Y_k \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (32)$$

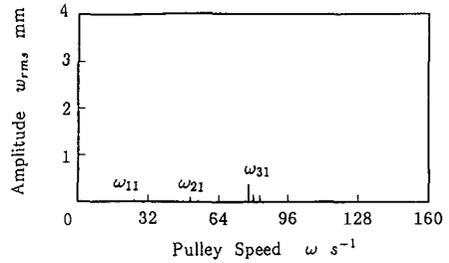
4. 計算結果と考察

式(30), (31)で求まる連立方程式に対して、振動状況を検討するため、とりあえず、 $x$  方向において、最低次から第3次までの振動形を、 $y$  方向において第1次の振動形を求めた ( $m=3, n=1, \xi=3$ )。この際、次に示す諸量を仮定した。

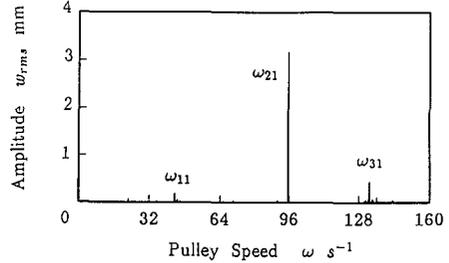
- ベルトの種類:  $H$  (JIS 規格)。
- ピッチ: 12.7 mm。
- ベルト幅: 50.8 mm。
- ベルトの厚さ: 2.0 mm。
- 密度  $\rho$ : 2 000 kg/m<sup>3</sup>。
- 歯数: 20。
- 軸間距離  $l$ : 400 mm。
- プーリ半径  $R$ : 40 mm。

4.1 回転速度と初張力が固有振動数に及ぼす影響  
式(20)にて、インパルス力  $F_i$  と張力の変化率  $\varepsilon$  をともに零とし、プーリ回転速度  $\omega$  とベルトの初張力  $N_0$  を逐次変化させた場合の固有振動数を求めた。図4にその結果を示す。横軸はプーリ回転速度 ( $s^{-1}$ )、縦軸は固有振動数 ( $H_z$ )、図中の  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  は  $x$  方向の1次、2次、3次と  $y$  方向の1次の振動形についての固有振動数を意味する。これよりプーリ回転速度  $\omega$  の増加に伴い、各次数の固有振動数は単調に減少することがわかる。さらに、図5にベルトの初張力  $N_0$  と固有振動数の変化を示した。初張力の増加とともに、 $\omega_{11}$  に対する固有振動数は増加することがわかる。

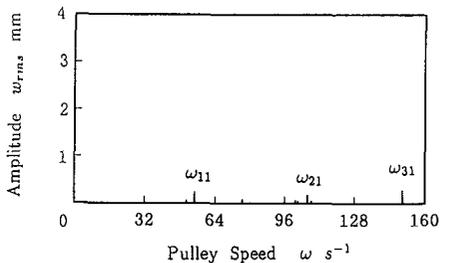
4.2 異なる  $y$  断面の振動曲線  
異なる  $y$  断面位置での振動曲線を比較検討した。 $y/b=0.4$ ,  $y/b=0.7$  の位置について、プーリの回転速度  $\omega=97.2s^{-1}$  の場合



(a)  $N_0=2000$  N/m  $\varepsilon=0.1$



(b)  $N_0=6000$  N/m  $\varepsilon=0.1$



(c)  $N_0=8000$  N/m  $\varepsilon=0.1$

図8 初張力増加による振動特性

で、一つのかみあい周期の振動応答について解析をした。その結果を図6に示す。これより、 $y$  断面の位置により、異なる振動応答があることがわかる。ベルトが二つのプーリの中間位置に近づくにつれて、ベルトの幅方向位置での振動応答の差が大きくなる現象がみられる。また、一つのかみあい周期の間に、周期の半分を過ぎた時点 ( $t=5\pi/4\omega_{31}$ ) で、振動応答に大きなずれが明確化してくることもわかった。

4.3 振動応答曲線  
初張力  $N_0$  および張力の変化率  $\varepsilon$  が変化した場合について数値計算を行った。図7は、初張力  $N_0$  を 3 000 N/m とし、 $x/l=0.4$ ,  $y/b=0.4$  の位置において、種々の  $\varepsilon$  を選び、振動応答を求めたものである。各図の左側の図はプーリの回転速度  $\omega$  に対する振幅の実効値  $w_{rms}$ 、右側の図は各  $\omega_{11}$  の付近における振動波形である。

図7 (a)は強制系 ( $\varepsilon=0$ : 単なる周期的な衝撃力を

受ける)で、この場合はプリー回転速度の増加に伴い、固有振動数  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  に対応する応答振幅も徐々に増大し、移動弦として扱った前報<sup>(5)</sup>と同様の結果を示した。また、 $\omega_{11}$  の付近の振動波形からもわかるように、衝撃を受けて次の衝撃を受けるまでの間においては、振幅はほぼ定常的に変動し、応答振幅の非線形性は小さい。これはベルトに加わる張力が一定に維持されているためと考えられる。

図7(b), (c)は結合励振系(周期的な衝撃力と変動張力を同時に受ける)である。回転速度の増加に伴い、応答振幅はさまざまに増減し、一定の傾向を示さない。ただし、張力変化率  $\varepsilon$  が小さい場合には、応答振幅の変動は前報<sup>(5)</sup>の計算結果と類した傾向を示す。張力変化率  $\varepsilon$  が大きくなると(この場合、 $\varepsilon=0.2$ )、 $\omega_{11}$  に対応する振動に、大きな応答振幅がみられ、移動弦とした場合と全く違った結果が現れることがわかった。

次に、振動波形を検討してみるに、 $\varepsilon$  の増加に伴い、振動波形の乱れが徐々に大きくなることが確認される。特に  $\varepsilon$  が 0.2 の場合には、大きな乱れが現れ、ある時点での衝撃の影響が後々にまで強く及ぶことがうかがい知れる。

最後に、初張力  $N_0$  の影響について検討してみる。図8は  $\varepsilon=0.1$  と  $x/l=0.4$ ,  $y/b=0.4$  の位置について、 $N_0=2000$  N/m,  $6000$  N/m,  $8000$  N/m とした場合の解析結果を示したものである。図8からわかるように、初張力  $N_0$  の増大に伴い、 $\omega_{11}$  に対応する応答振幅は増大する傾向を示すが、 $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  に対する応答振幅は増減をする。特に、 $N_0=8000$  N/m の場合、 $N_0=6000$  N/m の場合に比較し、 $\omega_{21}$  に対する応答振幅が大きく減少する現象を示した。このように、張力  $T_0$  と張力の変化率  $\varepsilon$  の組合せによっては非線形性が応答振幅に強い影響を及ぼす。

## 5. ま と め

本報では、幅広の歯付きベルトをベルトの張り方向

に対して、両端単純支持状態、幅方向に対して自由状態とし、衝撃力と周期的な張力変化を受ける場合の非線形振動特性を理論的に検討した。その結果

(1) プリーの回転速度の増大に伴い、固有振動数  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  は減少の傾向を示し、初張力の増加とともに  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  は増加する傾向を示すことがわかった。

(2) 幅方向の  $y$  断面位置により、振動応答が異なる。ベルトが二つのプリーの中間位置になるほど、ベルトの幅方向位置での振動応答の差が大きくなる。一つのかみ合い周期の間において、周期の半分を過ぎた時点 ( $t=5\pi/4\omega_{31}$ ) で、振動応答の差が顕著になる。

(3) 張力  $T$  が定常状態の場合、すなわち、 $\varepsilon=0$  の場合には、単なる非線形強制振動となる。計算した結果は移動弦とした前報<sup>(5)</sup>と同じである。

周期的な衝撃力と変動張力を同時に受ける幅広の歯付きベルトは強制パラメトリック結合励振系となる。各次数の固有振動数の応答振幅は単なる強制振動に比べ多様であり、低張力で、張力の変化率が小の場合、固有振動数に対応する応答振幅はそれほど顕著に変化しない。高張力と張力の変化率が大の場合、固有振動数に対する応答振幅は著しく変化し、非線形性が応答に強い影響を及ぼすことがわかる。

## 文 献

- (1) 久保・ほか4名, 機論, 37-293, C(1971), 197.
- (2) Koyama, T., ほか3名, *A study on Timing Belt Noise & Transactions of the ASME*, (1990-9), 419-423.
- (3) Kagotani, M., ほか3名, *Some Methods to Reduce Noise in Toothed Belt Drives & Bulletin of the JAPAN of Mechanical Engineers*, 190(1981) 723.
- (4) 李・ほか3名, 機論, 59-568, C(1993), 3902.
- (5) 李・ほか2名, 機論, 59-575, C(1994), 2415.
- (6) 日本機械学会, 機械工学便覧(材料力学), 159.
- (7) Ulsoy, A. G., ほか1名, *Vibration of Wide Band Saw Blades & Transactions of the ASME*, (1982-2), 71-78.
- (8) 久保・ほか4名, 機論, 37-293, C(1971), 197.