

有限振幅気柱振動に伴う非線形現象*

(第2報, 音響流の解析)

荒川 雅 裕*¹, 川 橋 正 昭*²Nonlinear Phenomena Induced by Finite-Amplitude Oscillation
of Air Column in Closed Tube
(2nd Report, Acoustic Streaming)

Masahiro ARAKAWA and Masaaki KAWAHASHI

Steady streaming, known as acoustic streaming, is one of the nonlinear phenomena produced by strong sound waves. This type of streaming is driven by means of acoustic momentum flux in an attenuating sound field. When a strong standing wave is produced in a closed tube by finite-amplitude oscillation of the air column in the tube, the propagating wave is attenuated by friction at the tube wall. This type of oscillatory flow produces acoustic streaming. The velocity of streaming is estimated from the steady part of the second-order term of a perturbation expansion in which the first-order approximation is a sinusoidal oscillation of the air column. However, finite-amplitude oscillation of the air column gives rise to shock-wave propagation in the tube. In order to estimate acoustic streaming produced by finite-amplitude oscillation, it is necessary to analyze the response of the oscillatory boundary layer to shock waves in detail. The present paper deals with numerical analysis of the acoustic streaming described above. In the previous paper, the fourth-order spatial difference method was examined for analysis of finite-amplitude oscillation. This method is expanded for two-dimensional analysis of acoustic streaming in this paper. Calculated results show velocity distributions in the oscillatory boundary layer and structures of steady streaming for various amplitudes of oscillation.

Key Words: Oscillatory Flow, Secondary Flow, Numerical Analysis, Wave, Finite-Amplitude Wave, Acoustic Streaming

1. 緒 言

閉管内気柱の大振幅振動に伴う非線形現象として生じる音響流(Acoustic Streaming)については, Load Rayleigh⁽¹⁾をはじめ, 古くから多くの研究者の関心を集めてきた. 近年, 非線形波動現象への関心の高まりとともに, 音響流が改めて注目されている. 特に, 熱および物質移動の促進や乱流境界層制御, さらに音響定在波コンプレッサにおける音響流の影響など, 工学的問題としての重要度も増している.

音響流についての Lighthill⁽²⁾の解説によれば, 音響流の発生は平均音響運動量流束で定義される音響レイノルズ応力の作用によるものとされている. 具体的には, 減衰のある音場での音響レイノルズ応力のこう配を駆動力として生じることから, 減衰の作用によって音響流の発生状況が異なる. ここで対象とする音響流は, 閉管内の気柱振動により形成される管内定在波において生じるものである. すなわち, このときの波の減衰は, おもに壁まさつによってもたらされる. このような音響流は, はじめに Load Rayleigh によ

て解析されたことから, レーリーの音響流とも呼ばれる.

音響流の解析は, 従来摂動法によってなされてきた. すなわち定常流成分は, 正弦波状気柱振動を仮定した一次の解に対する二次のオーダの解の定常項として得られる. このとき, 音響流の大きさおよびその流動形態は, ストークス層内の振動流速分布に強く依存する. さらに, 工学的応用において対象となる音響流は, 有限振幅気柱振動状態, すなわち衝撃波伝ばを伴う管内定在波により生じる. このとき, 衝撃波伝ばによる境界層応答の解析が必要となる. さらに, 振幅の増加に伴う境界層の乱流遷移が, 音響流にどのような影響をおよぼすかが重要となる. したがって, 改めて境界層を含む管内有限振幅波動の詳細な解析が必要となる. このような解析では数値計算法が有効である. しかし, 衝撃波発生を伴い, さらに境界層を考慮した波動現象の, 二次のオーダの解として得られる非線形現象を数値的に求めるには, 計算精度および計算の安定性などの困難な問題を伴う.

第1報⁽³⁾において, 数値計算法の精度および安定性を確認するため, 一次元モデルによる解析を行った. 本報告では, 第1報で用いた空間四次精度の差分による方法を, さらに時間二次精度の二次元解析に拡張し,

* 原稿受付 平成6年3月23日.

*¹ 正員, 埼玉大学大学院.*² 正員, 埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255).

ピストン駆動による閉管内の有限振幅気柱振動について、層流境界層を仮定した音響流の解析を行った。得られた結果より、気柱振動振幅の増加による音響流の構造変化および音響流の二重構造が明らかになった。

2. 記号

- c^* : 音速
 c : 無次元音速 $= c^*/c_0^*$
 e : 無次元単位体積当たりの全エネルギー
 $= e^*/\rho_0^* c_0^{*2}$
 f : 無次元ピストン振動周波数 $= f^*/f_0^*$
 f_0^* : 音響共振周波数
 h^* : ダクト高さの1/2 距離
 h : 無次元ダクト高さの1/2 距離 $= h^*/\Lambda^*$
 L^* : 管長さ
 L : 無次元管長さ $= L^*/\Lambda^*$
 p^* : 圧力
 p : 無次元圧力 $= p^*/\rho_0^* c_0^{*2}$
 t^* : 時間
 t : 無次元時間 $= t^*/(1/\omega^*)$
 u^* : x 方向速度
 u : 無次元 x 方向速度 $= u^*/c_0^*$
 v^* : y 方向速度
 v : 無次元 y 方向速度 $= v^*/c_0^*$
 x, y : 物理座標系
 γ : 比熱比
 δ^* : 境界層厚さ 式(6)参照
 δ : 無次元境界層厚さ $= \delta^*/\Lambda^*$
 δu : 無次元ピストン速度振幅 $= \delta u^*/c_0^*$
 Λ^* : ピストン振動周波数に対する波長 $= c_0^*/f^*$
 λ^* : 第2粘性係数
 λ : 無次元第2粘性係数 $= \lambda^*/(\rho_0 c_0^* \Lambda^*)$
 μ^* : 粘性係数
 μ : 無次元粘性係数 $= \mu^*/(\rho_0 c_0^* \Lambda^*)$
 ρ^* : 密度
 ρ : 無次元密度 $= \rho^*/\rho_0^*$
 ξ, η : 一般座標系
 ω^* : 角周波数 $= 2\pi f^*$
 Cr : クーラン数 $= c^* \Delta t^*/\Delta x^*$
 Pr : プラントル数
- 添字
- 0: 基準状態
 < >: 時間平均
 c: 平板間中心における振動成分
 ~: 変動の振幅値
 *: 有次元量

pert.: 摂動展開による値

3. 数値解析

3.1 計算モデル 本解析で対象とする計算モデルおよびその座標系が、図1に示されている。図のように、一端を閉じた二次元ダクト内の気柱が、他端に置かれたピストンの正弦波状振動により励振され、ダクト内に定在波が生じる。なお、ダクト高さはピストン振動周波数に基づく波長に比べて十分小さいものとする。ここで、解析領域はダクト高さの1/2の領域とし、上辺は対称面境界とする。また、計算時間および解析される音響流の周期構造を考慮して、二次モード気柱振動を基準にして計算を行う。このときのピストンの無次元振動周波数を $f=1.0$ とすれば、無次元ダクト長さが $L=1.0$ となる。また、ダクトの1/2高さは、 $h=1.8 \times 10^{-2}$ とした。

ピストン振動周波数が、気柱の固有振動周波数に近接すると振動振幅が増加し、ダクト内は有限振幅波動状態となる。このとき、波面の非線形ひずみの増加とともに、衝撃波が形成される。なお、第1報の一次元モデルによる解析では、二次モード共振点において、ピストン振動速度振幅を $\delta u=1.0 \times 10^{-5} \sim 1.0 \times 10^{-2}$ の範囲で計算した結果、 $\delta u=1.0 \times 10^{-3}$ 以上で衝撃波の発生がみられることが明らかになっている。

本報告においても、ピストン振動速度振幅について同様の範囲で計算を行い、音響流の発生および衝撃波発生領域での音響流の構造の変化について明らかにする。

3.2 基礎式および境界条件 本解析における基礎式は、二次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式である。音響流の大きさは振動速度の二次のオーダーとなることから、実験的に音響流を形成するには振動流速を高める必要がある。振動流速の増加は、ピストン振動周波数を高くすることによりもたらされる。解析においてもこのことを考慮すると、その条件は波長とダクト高

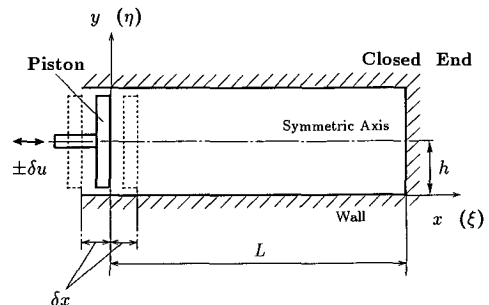


図1 計算モデルおよび座標系

さとの比およびストークス数 (h/δ) が十分大きいことに相当する。本計算ではこれらの条件を満たしており、境界層厚さがダクト高さに比べて十分小さな値となる。音響流は壁面近傍のストークス境界層の構造に強く依存するため、計算では壁近傍で十分細かい格子を形成する必要がある。そこで、本解析では壁に垂直な方向に不等間隔に格子を形成する。したがって計算は、一般曲線座標 (ξ, η) 系によるものとする。このとき基礎式は、以下のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$U = \frac{1}{J} \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix},$$

$$E = \frac{1}{2\pi J} \begin{Bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x(p - \tau_{xx}) - \xi_y \tau_{xy} \\ \rho v U - \xi_x \tau_{yx} + \xi_y(p - \tau_{yy}) \\ (e + p)U - \xi_x \beta_x - \xi_y \beta_y \end{Bmatrix},$$

$$F = \frac{1}{2\pi J} \begin{Bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x(p - \tau_{xx}) - \eta_y \tau_{xy} \\ \rho v V - \eta_x \tau_{yx} + \eta_y(p - \tau_{yy}) \\ (e + p)V - \eta_x \beta_x - \eta_y \beta_y \end{Bmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{m^2 + n^2}{2\rho} \right), \quad m = \rho u, \quad n = \rho v,$$

$$\tau_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\beta_x = \frac{\gamma\mu}{Pr} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \phi \tau_{xx} + v \tau_{xy},$$

$$\beta_y = \frac{\gamma\mu}{Pr} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + u \tau_{xy} + v \tau_{yy},$$

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v, \quad \varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$$

なお境界条件は、以下のとおりである。ダクト側壁および閉端壁は非滑り境界とし、ダクト中心面は対称境界とする。駆動端は、ピストンの正弦波状振動とし、各瞬間のピストン面位置に速度を与える。すなわち、ダクト長さ方向については、第1報と同様に各時間ステップにおけるピストン面-閉端間を計算領域とする。なお、すべての壁面で断熱条件が仮定される。

また、計算ではピストン振動周波数を二次モード気柱振動共振周波数に相当する値に固定し、ピストン振動速度振幅を $\delta u = 1.0 \times 10^{-5} \sim 1.0 \times 10^{-2}$ の範囲で変化させている。

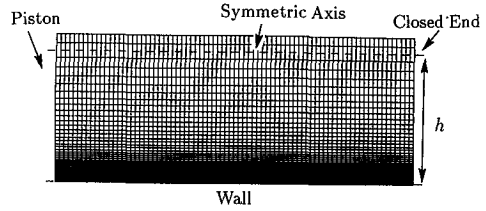


図2 計算格子(80×64)

3.3 数値計算法 音響流は、平均音響運動量流束により誘起される二次のオーダの微小量として計算される。したがって、高精度で安定な数値計算法の適用が求められる。第1報⁽⁹⁾における数値計算法の検討では、空間四次精度の差分法を用いた陽的 Mac-Cormack 法の妥当性が示された。そこで、本報告では前報で用いた方法をさらに時間二次精度の差分による二次元解析に拡張して適用した。なお、計算では二次元方程式を、以下に示すような一次元方程式に分割する時間分割法を用いている。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

このとき式(2)に対する離散化手順を示すと以下のようになる。

(予測子)

$$\overline{U}_i^n = U_i^n - \frac{1}{6} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (7E_i^n - 8E_{i-1}^n + E_{i-2}^n) \dots (4)$$

(修正子)

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ U_i^n + \overline{U}_i^n + \frac{1}{6} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \times (7\overline{E}_i^n - 8\overline{E}_{i+1}^n + E_{i+2}^n) \right\} \dots\dots\dots (5)$$

本解析における計算格子が図2に示されている。ダクト長さ方向については、ピストン面-閉端間を均等分割とし、格子点数は80とした。ダクト高さ方向の格子点の総数は64とし、ストークス層内には均等分割した14の格子点を取り、境界層外は等比分割した。なお、実質ストークス層厚さ δ^* は正弦波状振動流に対して、

$$\delta^* \propto (\nu^*/\omega^*)^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

となることが知られているが、ここではその係数を5とした。

計算における x 方向および y 方向のクーラン数は、それぞれ0.01および0.4とする。なお、 x 方向のクーラン数が小さいため、計算結果には数値振動が生じる。そこで、本解析では x 方向のみ空間三次精度の4

階の人工粘性を付加して計算を行った。

4. 計算結果および考察

4・1 閉端圧力波形 はじめに、ピストン振動周波数を二次モード共振周波数相当の値に固定したときの、ピストン速度振幅 δu による閉端圧力変動波形の変化が図3に示されている。これらの結果は、いずれも定常振動解に達した後の波形である。第1報における一次元モデルによる計算結果と比較すると、いずれの場合も波形はほぼ同じであるが、圧力変動の振幅値は、ピストン振動速度振幅の増加とともにやや小さくなる。これらの結果から、本計算条件の範囲では基本的波動現象に対する境界層の影響は小さいことが分かる。

4・2 ストークス層内の変動速度振幅分布 本計算条件では、波長とダクト高さとの比およびストークス数が十分大きいことから、ダクト断面の大部分について平面波状態となり、壁近傍にストークス層が形成される。このとき、音響流の大きさおよび構造は境界層の構造に依存するため、振動振幅の増加に伴うストークス層内速度分布の変化が重要となる。なお、本計算条件における境界層厚さ基準のレイノルズ数(Re_s)の範囲は、最大で約160である。ストークス層の遷移については、さまざまな議論⁽⁴⁾があるが、本計算範囲におけるレイノルズ数は何れの定義によっても臨界値以下であり層流境界層として扱われる。

ピストン振動速度振幅値に対するストークス層内の変動速度振幅分布の計算結果が、図4に示されている。図4(a)は、音響定在波腹部に相当する位置での x 方向成分速度分布であり、図4(b)は節部相当位置における y 方向成分速度分布である。これらの結果より以下のことが分かる。ピストン振動速度振幅が十分小さいときは、正弦波状振動流におけるストークス層速度分布の解析解⁽²⁾と完全に一致する。振幅の増加と

ともに、 x 方向成分速度が極大となる位置が側壁に近づき、その値が増加するが、境界層厚さの変化は見られない。この傾向は、Tijdemanの解析⁽⁵⁾におけるストークス数の増加による速度分布の傾向と一致するが、本解析ではストークス数を一定とした計算に相当することから、境界層流速分布の変化はダクト内波動の非線形ひずみの増加によるものである。

4・3 平均音響運動量流束分布 音響流は、ダクト内の気柱振動による平均音響運動量流束 $\langle \rho u u \rangle$ および $\langle \rho u v \rangle$ によって定義される音響レイノルズ応力のこう配が駆動力となって生じる。はじめに、 $y = \delta/2$ におけるダクト長さ方向音響レイノルズ応力分布のピストン速度振幅による変化を図5に示す。ここで、図5(a)および図5(b)はそれぞれピストン振動周期の2周期分についての時間積分平均による $\langle \rho u u \rangle$ および $\langle \rho u v \rangle$ を示している。図5(a)より、ピストン速度振幅が十分小さいときは正弦波状の分布を示すが、振幅の増加とともに、ダクト長手方向中央、すなわち音響定在波節部相当位置での分布形状が変化する。これは、この位置でダクト内の前進衝撃波および後退衝撃波が干渉し、その前後で急速な流速変化が生じることによる。このような音響レイノルズ応力分布の変化に伴い、音響レイノルズ応力のこう配も変化する。音響

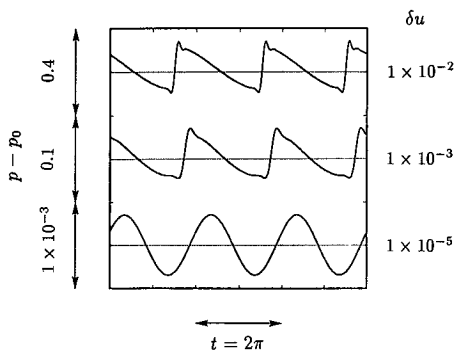
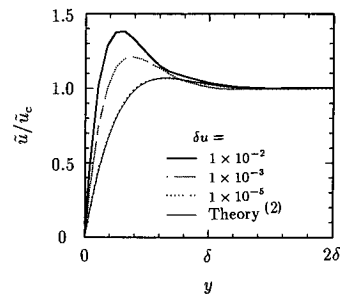
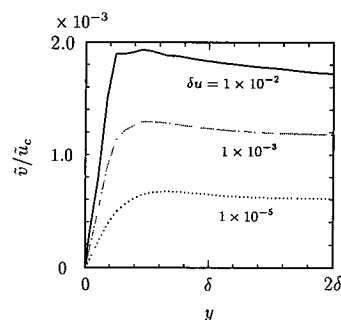


図3 ピストンの振動速度振幅値に対する閉端圧力波形



(a) x 方向速度振幅分布 ($x=0.25$)



(b) y 方向速度振幅分布 ($x=0.5$)

図4 ストークス層内の変動速度振幅分布の変化

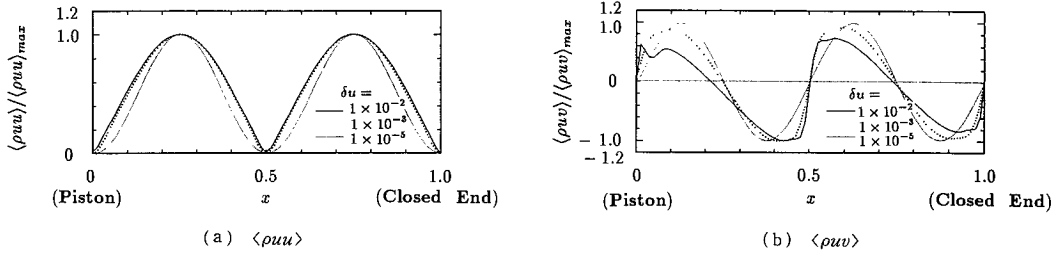


図5 ピストンの振動速度振幅値に対する音響レイノルズ応力の変化 ($y = \delta/2$)

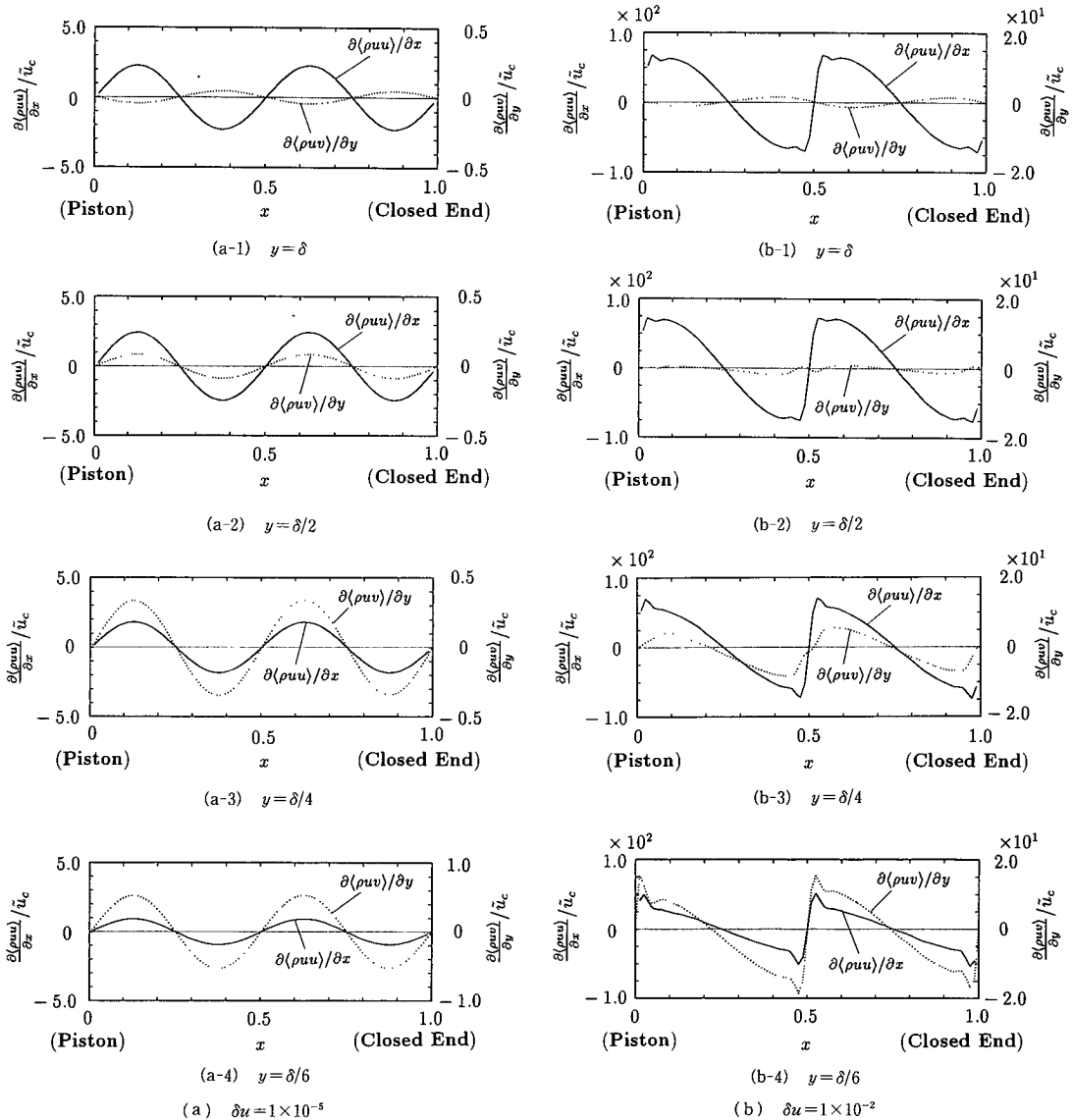


図6 ストークス層内における音響レイノルズ応力のこう配の変化

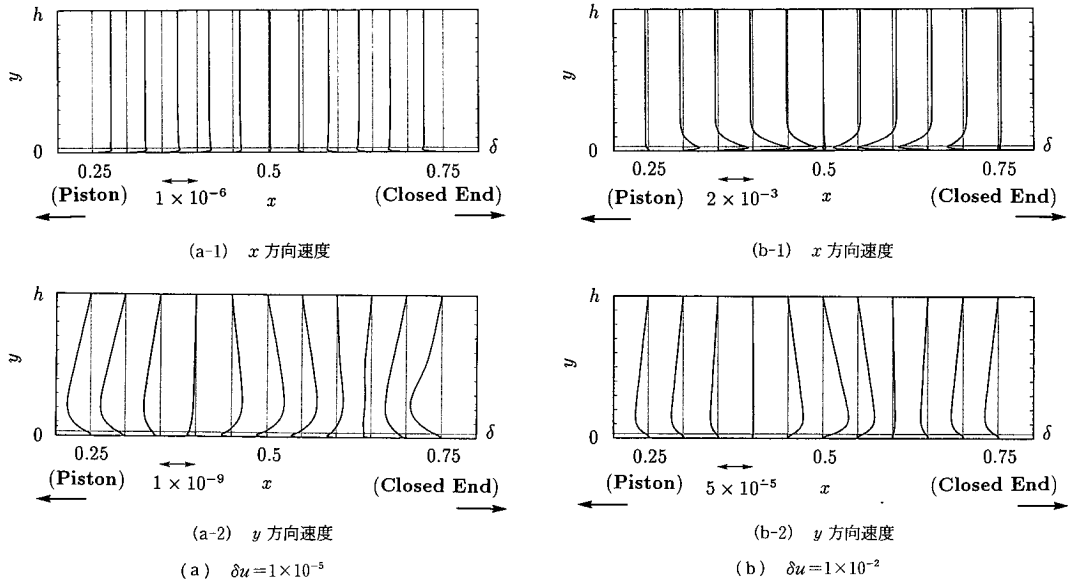
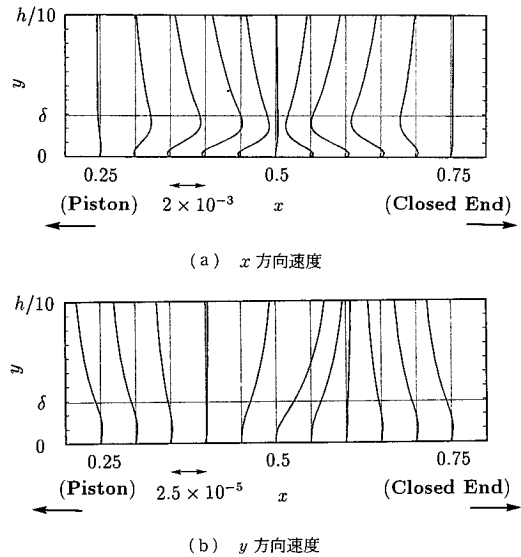


図7 音響流速分布

流の x 方向の駆動力となる音響レイノルズ応力のこう配は、 $\partial\langle\rho uu\rangle/\partial x$ と $\partial\langle\rho uv\rangle/\partial y$ とに分けられる。それぞれのダクト長さ方向分布のストークス層内における変化が、ピストン速度振幅に対して図6に示されている。これらの結果より、以下のことが明らかになった。ピストン速度振幅が十分小さいときは音響レイノルズ応力のこう配の分布は正弦波状であるが、振幅が増加するとダクト長手方向中央近傍の狭い領域内で音響レイノルズ応力の符号が反転する。ストークス層内では、音響レイノルズ応力の各項の符号は同じであるが、その外縁では符号が反転する。ストークス層内の壁からの位置により音響レイノルズ応力の各項の寄与度が異なる。

4.4 音響流速分布 音響流は、定常振動解に到達した後の速度変動の、時間積分平均から導出される。図7に得られた結果が示されている。図では x 方向の各位置における音響流速成分の y 方向分布を示しており、ピストン振動速度振幅により特徴的な変化が見られる。図7(a)に示したほぼ正弦波状気柱振動の場合には、各位置での x 方向成分流速が y 方向の全領域で同符号となり、ダクト長手方向中央に対して対称な向きとなる。すなわち、定常流はダクト両端から中央に向かう流れを形成している。この流れは、やがて反転し中央から両端に向かう流れとなる。このような条件での音響流の大きさは極めて微小な値であることから、従来の実験では観測されていない。一方、図7(b)に示したように、ピストン振動速度振幅が

図8 壁面近傍における音響流速分布 ($\delta u=1\times 10^{-2}$)

増加すると、 x 方向成分流速の y 方向分布は、従来より知られているように境界層外縁近傍で流速の向きが反転する分布となる。この結果、実験的観測⁶⁾でも明らかのように音響流は循環流を形成する。さらに、壁のごく近傍の流速分布を拡大すると図8に示すように音響流の二重構造が現れ、上述の循環流と壁との間の微小領域内にさらに別の循環流が形成されることが分かる。このような二重構造は、非圧縮性を仮定した二

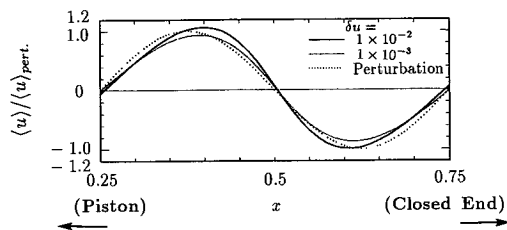


図9 ピストン振動速度振幅に対する境界層外縁の音響流速分布の変化 ($y=\delta$)

次流れの解析においてその存在が明らかにされているが⁸⁽⁷⁾⁽⁸⁾ 圧縮性流れでは存在しないとされてきた。

次に、ピストン振動速度振幅に対する、境界層外縁における音響流の x 方向成分の x 方向分布を図9に示す。ここで、それぞれの流速は従来得られている摂動展開による値を用いて無次元化されている。この結果、ピストン速度振幅が増加しても音響流の x 方向成分流速値の大きさは摂動展開によるものとはほぼ一致するが、流速の絶対値が最大となる位置がダクト長手方向中央近傍に移動する。この結果、ピストン速度振幅が増加すると、音響流の構造が変化する。

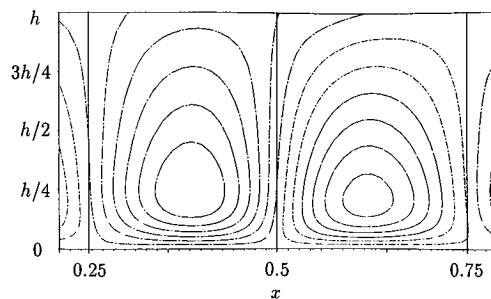
音響流の構造を流れ関数の等値線分布で表した結果が、図10に示されている。図10の(a)に示された結果は、従来より知られている音響流の循環流構造を示しているが、ピストン速度振幅が増加すると図10(b)に示すようにその構造が変化し、複数の循環流が形成されることが明らかになった。

5. 結 言

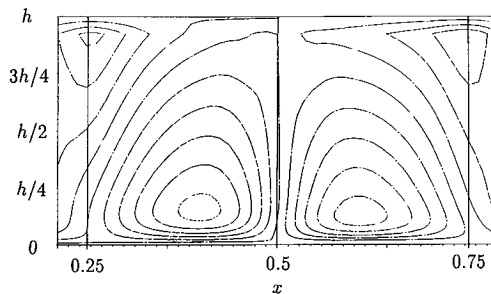
有限振幅気柱振動に伴う非線形現象として発生する音響流についての、二次元数値解析を行った結果、以下の結論を得た。

(1) 気柱振動振幅の増加とともに、ストークス層の実質厚さが減少するとともに、壁近傍に速度分布のピークが現れる。

(2) 音響流を誘起する音響レイノルズ応力の分布において、その大きさは摂動展開による理論解とほぼ一致するが、衝撃波形成領域において音響定在波節部相当位置でその形成が特徴的に変化する。



(a) $\delta u=1 \times 10^{-3}$



(b) $\delta u=1 \times 10^{-2}$

図10 音響流流れ関数の等値線図

(3) 得られた音響流の構造は、気柱振動振幅によって特徴的に変化し、極めて微小な振幅範囲では従来より知られている循環流構造を示さず、振幅が非常に大きくなると複雑な循環流構造を形成する。また、従来その存在が証明されていなかった音響流の二重構造の存在が明らかになった。

文 献

- (1) Rayleigh, L., *Theory of Sound* (2nd Ed.), (1945), 333, Dover.
- (2) Lighthill, M. J., *J. Sound Vib.*, 61-3(1987), 391.
- (3) 荒川・川橋, 機論, 60-580, B(1994), 4052.
- (4) Merkli, P. and Thomann, H., *J. Fluid Mech.*, 68-3 (1975), 567.
- (5) Tijdeman, H., *J. Sound Vib.*, 39-1(1975), 1.
- (6) Andrade, E. N. Da., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A230(1932), 413.
- (7) Stuart, J. T., *J. Fluid Mech.*, 24-4(1966), 673.
- (8) 竹光, *Nagare*, 12-4 (1980), 24.