

歯付きベルトの非線形振動特性に関する研究*

(第2報, かみあい衝撃とプーリの偏心による張力変化を受ける場合)

李紹昌^{*1}, 大滝英征^{*2}, 綿貫啓一^{*2}

Analysis of Nonlinear Oscillations of Timing Belt (2nd Report, Under Meshing Impact and Varying Tension by Eccentric Pulley)

Shao-Chang LI, Hideyuki OTAKI and Keiichi WATANUKI

Analytical results are presented for nonlinear vibrations of a timing belt with parametric excitation in tension and meshing impact forces, with application of the Galerkin method to the basic equation. The steady-state responses are calculated using the harmonic balance method. The numerical results yield the following conclusions. The resonant amplitude increases with the increase of pulley speed for constant tension. In the case of variable tension, the resonant peak value varies with rate of variable tension, and increases with increase of tension. Amplitude reduction by means of periodic variation of tension is effective for tension and rate of variable tension.

Key Words: Timing belt, Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Parametric Resonance, Galerkin's Method, Meshing Impact

1. 緒言

歯付きベルトの動特性解明は、騒音問題等に関連して緊要の課題となってきた。ちなみに、Watanabeら⁽¹⁾はプーリ軸の偏心によるベルト張力変化およびベルトの連結部における質量変化がベルト騒音へ及ぼす影響を理論的に検討している。また、久保⁽²⁾、籠谷⁽³⁾らは歯付きベルトの運転騒音の発生機構を、Koyamara⁽⁴⁾、Kagotani⁽⁵⁾は歯付きベルトの騒音の低減法について実験的な研究をしている。その結果、プーリの偏心によるベルト張力変化、あるいは、プーリとベルトとのかみあい衝撃がベルト振動を引き起こし、騒音の発生原因となっていることがほぼ判明してきている。しかし、このかみあい衝撃の非線形振動特性についてはほとんど理論解析されていない。著者らは、第1報⁽⁶⁾において、外部より押付け力が作用し、張力変化をきたす場合における歯付きベルトの共振領域について検討した。本報ではかみあい衝撃力の発生メカニズムをモデル化し、歯付きベルトの非線形振動特性を理論的に解析した。その結果、かみあい衝撃と張力変化

による結合励振系ゆえに生じる特徴的な振動特性を理論的に明らかにした。

2. 基礎方程式

2.1 かみあい衝撃メカニズム 歯付きベルトのかみあい衝撃は久保⁽²⁾⁽³⁾らが指摘しているようにプーリの歯先部とベルトの歯底部とが衝突した瞬間に生じる。この過程を図1に示した。ここで、ベルト走行速度 V は図2に示したようにベルト歯底とプーリ歯先が全面接触した部分での速度である。さて、図1(a)はプーリの歯先部 a とベルトの歯先部 A とがかみ合い始めた瞬間である。このとき、プーリの歯先部 a の周速 V_a の水平方向成分 $V_x(=V_a \cos \alpha)$ はベルトの速度 V より小さい。そのため、ベルトに対する水平方向の衝撃力はほとんど発生していない。次いで、プーリの回転がさらに進むと、プーリ歯はベルトの歯面を滑りながらベルトの歯底に向かってくい込んでいく。したがって、図1(b)に示したようにプーリの歯先部とベルトの歯底部とが衝突するに到った。しかし、ベルトには水平方向の衝撃力はほとんど発生せず、横方向のみにパルス的な衝撃力が発生する。プーリの回転に伴って、プーリ歯先 a と軸線との角度 α は減少し、 $\alpha=0$ 、すなわち、プーリ歯先とベルト歯底とが全面接触す

* 原稿受付 平成6年1月20日。

^{*1} 正員, 埼玉大学大学院 (〒338 浦和市下久保 255)。

^{*2} 正員, 埼玉大学工学部。

るとき、プーリの歯先部の周速度 V_a はベルトの速度 V と等しくなる。

そこで、この振動系をモデル化するに際し、簡単のため、張られたベルトの歯底部はプーリの歯先円上に位置するものと仮定する。

ベルト歯底部に衝突した瞬間におけるプーリの歯先部 a の周速度 V_a は図1(b)に示した方向をもち、その大きさは

$$|V_a| = R\omega$$

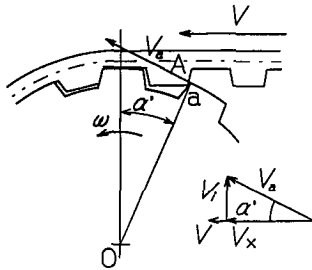
ω : プーリの回転角速度

R : プーリ歯先円半径

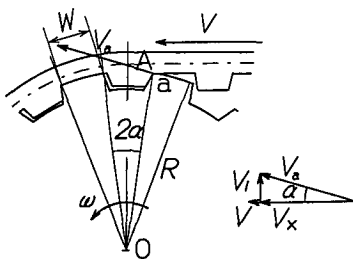
となる。

また、その瞬間のプーリの歯先部のなす角度 α は図1(b)を参照して

$$\alpha = \frac{\pi}{z} - \frac{W}{2R}$$



(a)



(b)

図1 歯付きベルトのかみあい衝撃過程

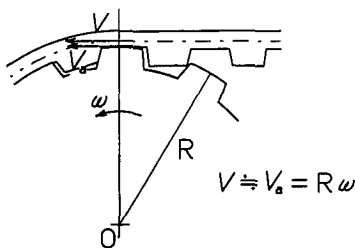


図2 かみあい速度解析モデル

z : プーリの歯数

W : プーリ歯先円上での歯厚

で表されるので、プーリの歯先部とベルトの歯底部におけるベルトへの横方向衝突速度 V_i は図1(b)を参照して

$$V_i = V_a \sin \alpha = R\omega \sin \alpha \dots\dots\dots (1)$$

となる。したがって、歯付きベルトに加わる力積は次式で与えられる。

$$I = M_{eq} V_i = M_{eq} R\omega \sin \alpha \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 M_{eq} は衝撃力が作用している領域(以下で述べる x_1, x_2)のベルトの質量を意味する。

図1のモデルでは、ベルト歯底の角部とプーリ歯先の頂部との接触部で衝撃力を支持するとしたが、実際的には、図3に示したようにその前後の領域(x_1, x_2)でパルス的な衝撃力を支持しているものと考えられる。すると

$$P = F_k [u(x-x_1) - u(x-x_2)] \delta(t-t_k) \dots (3)$$

ここで、

P は時刻 t_k 、衝撃区間(x_1, x_2)に加わる衝撃力である。

F_k は x 方向区間(x_1, x_2)の間での単位長さあたりに作用するインパルス力である。

$u(x-x_1), u(x-x_2)$ は単位ステップ関数を意味する。

$\delta(t-t_k)$ は $t=t_k$ におけるデルタ関数を意味する。

t_k は k 番めの歯がかみあい衝撃を生じる時刻である。

そして、 F_k は

$$F_k = \frac{f_k}{x_2 - x_1} = \frac{I}{(x_2 - x_1)\Delta t}$$

より求まる。ただし、 f_k は図3に示したように衝撃区間に加わるインパルス力、 Δt は時刻 t_k での衝撃持続時間である。

2.2 運動方程式 以上のかみあい衝撃過程を考

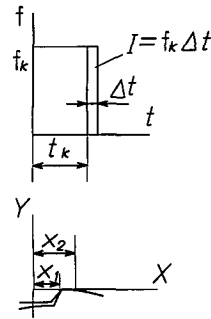


図3 衝撃力解析モデル

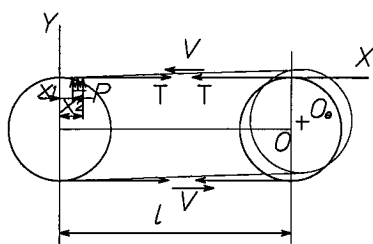


図4 歯付きベルトの解析モデル

慮し、ベルトの動特性解析に際しては、図4に示した座標系をとった。さらに、プーリの偏心分 e を考慮すれば、境界条件としては、 $x=l+e \cos \omega t$ の位置での値を考える必要がある。しかし、その偏心率は $e/l \ll 1$ であるので、偏心がベルトとプーリとの接触が解かれる位置での境界条件に及ぼす影響は無視できるものとした。ここでは、軸間距離の変化は張力には影響を及ぼし、周期的に変化するものと仮定する。基礎式は、第1報⁶⁾の結果を考慮して、次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \left(V^2 - \frac{T}{\rho} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{F_k}{\rho} [u(x-x_1) - u(x-x_2)] \delta(t-t_k) \dots (4)$$

ここで、

- V : 歯付きベルトの速度
- T : 歯付きベルトの受ける張力
- ρ : 歯付きベルトの線密度

境界条件は

$$x=0 \text{ にて } y=0$$

$$x=l \text{ にて } y=0$$

ただし、歯付きベルトの張力 T は

- $T = T_0(1 + \epsilon \cos \omega t)$
- T_0 : 偏心のない場合のベルトの張力
- ϵ : プーリの偏心による張力の変化率
- l : 軸間距離

ここで、解にはん用性をもたせるため、次の無次元量を導入する。

$$y' = \frac{y}{l} \quad x' = \frac{x}{l} \quad x'_1 = \frac{x_1}{l} \quad x'_2 = \frac{x_2}{l}$$

$$t' = \frac{t \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}}{l} \quad t'_k = \frac{t_k \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}}{l} \quad V' = \frac{V}{\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}}$$

$$F' = \frac{F_k l}{T_0} \quad \omega' = \frac{\omega l}{\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}}$$

式(5)を書き改めると

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} + 2V' \frac{\partial^2 y'}{\partial x' \partial t'} + \{ V'^2 - (1 + \epsilon \cos \omega' t') \} \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}$$

$$= F' [u(x' - x'_1) - u(x' - x'_2)] \delta(t' - t'_k) \dots (5)$$

となる。以後は肩の記号「'」を省略して扱う。

3. 解析方法

非線形方程式(5)の解を求めるのに、ガラーキン法を適用する。

そこで、

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \sin i\pi x \dots (6)$$

と仮定する。ただし、 n は n 次振動モードを意味する。式(6)は式(5)の境界条件を満足する。

式(6)を式(5)に代入し、ガラーキン法を適用すると

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \{ V^2 - (1 + \epsilon \cos \omega t) \} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - F [u(x-x_1) - u(x-x_2)] \delta(t-t_k) \right] \sin s\pi x dx = 0$$

$$(s=1, 2, \dots, n) \dots (7)$$

ここで、関数の直交性を利用すると、 $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ に関する振動方程式が得られる。

$$[M] \ddot{q} + [G] \dot{q} + [V^2 - (1 + \epsilon \cos \omega t)] [E] q = F [Q] \delta(t-t_k) \dots (8)$$

ただし

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$[G] = V \begin{bmatrix} 0 & -\frac{16}{3} & 0 & \dots & N_{1n} \\ \frac{16}{3} & 0 & -\frac{48}{5} & \dots & N_{2n} \\ 0 & \frac{48}{5} & 0 & \dots & N_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{n1} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{ij} = i \left\{ -\frac{\cos(i-j)\pi}{2(i-j)} - \frac{\cos(i+j)\pi}{2(i+j)} + \frac{i}{i^2 - j^2} \right\}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \pi^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4\pi^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (n\pi)^2 \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} \cos x_1\pi - \cos x_2\pi \\ \frac{1}{2} (\cos 2x_1\pi - \cos 2x_2\pi) \\ \vdots \\ \frac{1}{n} (\cos nx_1\pi - \cos nx_2\pi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

[M] は $n \times n$ 次慣性マトリックス項を, [E] は $n \times n$ 次剛性マトリックス項を意味する. [G] は $n \times n$ 次回転マトリックス項で $G^T = -G$ の特性をもっている. \mathbf{q} は n 列ベクトルである.

衝撃力は前述したように歯が互にかみあうごとに生じる. そこで, 衝撃力による振動特性を求めるに当たり, 式(8)に調和バランス法を適用する. まず, 式(8)中の張力の変化を示す項および衝撃力に関する項をかみあい周期 $2\pi/z\omega$ によって, フーリエ級数展開する.

$$\varepsilon \cos \omega t = \varepsilon \left\{ C_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{ak} \cos kz\omega t + C_{bk} \sin kz\omega t) \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$F\delta(t-t_k) = F \left[d_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (d_m \cos zm\omega t + h_m \sin zm\omega t) \right] \dots\dots\dots (10)$$

ここで, $C_{a0}, C_{ak}, C_{bk}, d_0, d_m, h_m$ はフーリエ級数展開した場合の係数である.

すると, 式(8)は次のように書き改められる.

$$\begin{aligned} [M]\ddot{\mathbf{q}} + [G]\dot{\mathbf{q}} + \left[(V^2 - 1) - \varepsilon \left\{ C_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{ak} \cos kz\omega t + C_{bk} \sin kz\omega t) \right\} \right] [E]\mathbf{q} \\ = F[Q] \left[d_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (d_m \cos zm\omega t + h_m \sin zm\omega t) \right] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

いま, 式(11)の解 $\mathbf{q} = [q_i]$ を次のように仮定する.

$$q_i = \sum_{j=0}^n (A_{ij} \cos jz\omega t + B_{ij} \sin jz\omega t) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \dots\dots\dots (12)$$

A_{ij}, B_{ij} は未定係数である. 式(12)を式(11)に代入し整理すると, q_i に関する n 個の振動方程式が得られる. これらの方程式に調和バランス法を用いると, 以下の連立方程式が求められる.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/z\omega} \left[[M]_i \ddot{q}_i + [G]_i \dot{q}_i + \left[(V^2 - 1) - \varepsilon \left\{ C_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{ak} \cos kz\omega t + C_{bk} \sin kz\omega t) \right\} \right] [E]_i q_i \right. \\ \left. - [Q]_i \left[a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos zm\omega t + b_m \sin zm\omega t) \right] \right] \cos jz\omega t dt = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (j=0, 1, \dots, n) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/z\omega} \left[[M]_i \ddot{q}_i + [G]_i \dot{q}_i + \left[(V^2 - 1) - \varepsilon \left\{ C_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{ak} \cos kz\omega t + C_{bk} \sin kz\omega t) \right\} \right] [E]_i q_i \right. \\ \left. - [Q]_i \left[a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos zm\omega t + b_m \sin zm\omega t) \right] \right] \sin jz\omega t dt = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (j=0, 1, \dots, n) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

上式の $[M]_i \ddot{q}_i, [G]_i \dot{q}_i, [E]_i q_i$ はマトリックス $[M], [G], [E]$ の i 行めの要素を q_i に掛けることを意味する. \cos と \sin 関数の直交性を利用すると, 上式より A_{ij}, B_{ij} に関する一次元の $(2n+1)n$ 連立方程式が得られる. Gauss-jordan 法を用いて, この連立方程式を解くことにより, 周期的な衝撃力が作用する場合の A_{ij}, B_{ij} が得られる. かくして, 式(12)および(6)によって, 周期的な衝撃力下での応答振幅が求められることになる. さらに, 振動応答を振幅の実効値 y_{rms} で表示すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} y_{rms} = & \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} \sin j\pi x \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\sum_{j=1}^n B_{ij} \sin j\pi x \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \left(\sum_{j=1}^n A_{0j} \sin j\pi x \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

4. 計算結果と考察

式(13), (14)で求まる連立方程式に対して, 振動状況を調べるためには, 最低次から第3次までの振動形を求める ($i=3, j=3$). この際, 次に示す諸量を仮定した.

- ベルトの種類: H (JIS 規格)
- ピッチ: 12.7 mm
- ベルト幅: 25.4 mm
- 線密度 ρ : 0.0722 kg/m
- 歯数: 20
- 軸間距離 l : 395 mm
- プーリ半径 R : 40 mm

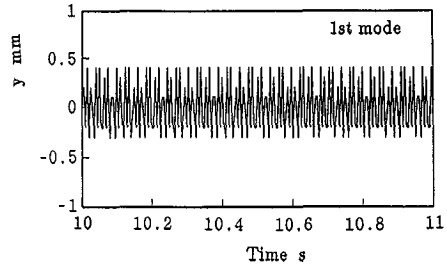
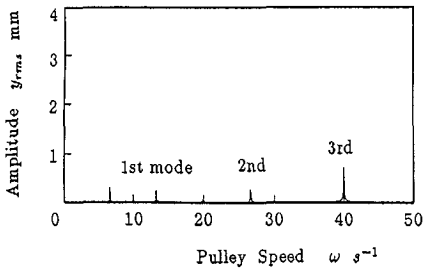
ただし, 歯付きベルトを両端固定の弦と考えると, その n 次固有振動数は次式で与えられる.

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \dots\dots\dots (16)$$

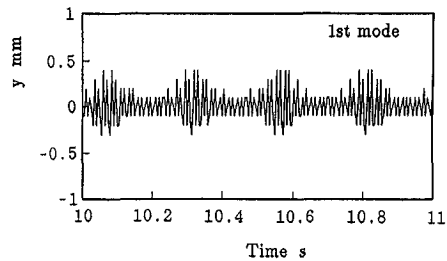
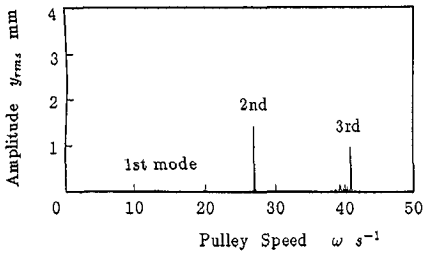
実際の振動現象を把握するには、無次元量で記すより実際の値を用いたほうが便利と考え、次の図面は次元の結果で与えられた。図5は張力 T_0 を 150 N に保ち、 $x/l=0.4$ の位置を計算点として、種々の ϵ を選び、振動応答を求めたものである。各図の左側の図はプーリの角速度 ω に対する振幅の実効値 y_{rms} の応答曲線、

右側の図は各1次モード付近における振動波形である。ベルトは式(16)で求まる固有振動数と一致するプーリの回転速度で共振する。

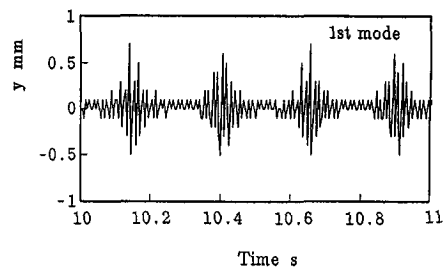
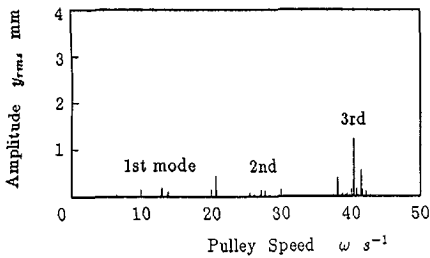
図5(a)は強制系で、この場合は1~3次へと振動モードが増大するにつれ、その応答振幅も増大する。これは、図2に示した速度解析モデルからもわかるように、振動モードの増大(回転速度の増大をも意味する)に伴い、プーリの歯先部とベルトの歯底部の衝突速度



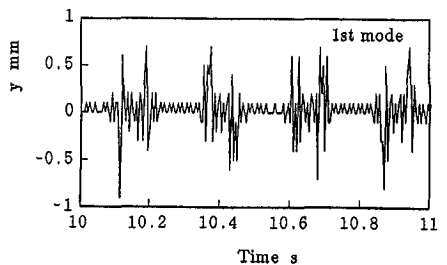
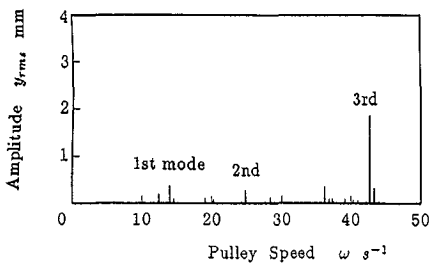
(a) $T_0=150$ N $\epsilon=0.0$



(b) $T_0=150$ N $\epsilon=0.05$



(c) $T_0=150$ N $\epsilon=0.1$



(d) $T_0=150$ N $\epsilon=0.2$

図5 強制系と結合系の振動特性

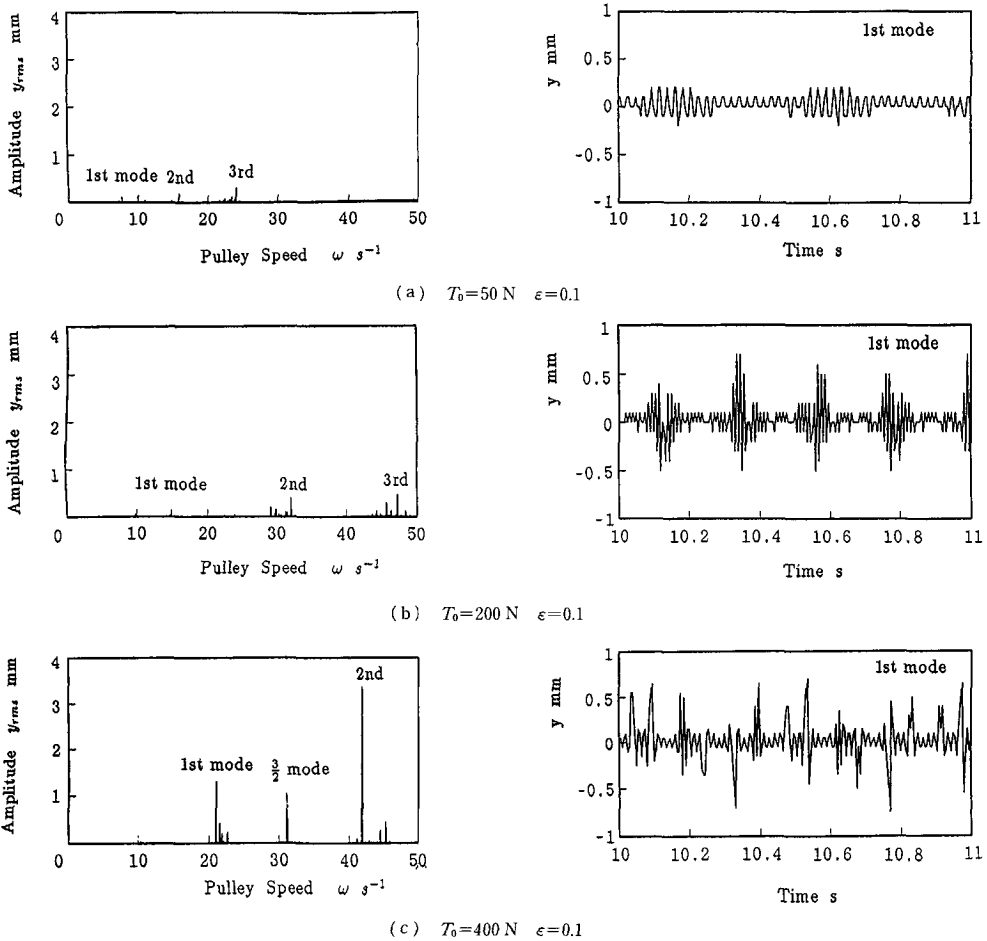


図6 張力増加による振動特性

が増大し、式(2)で表される力積が大きくなる。それとともに衝撃持続時間が小さくなる。そのため、式(3)で求まる衝撃力が大きくなるためである。しかし、1次モード付近の振動波形からもわかるように振動波形は衝撃を受けて次の衝撃を受けるまでの間においては、ほぼ定常的に変化し、非線形の影響は小さい。これはベルトに加わる張力が一定に維持されているためと考えられる。

図5(b)~(d)は結合励振系である。振動モードが増大しても、応答振幅は様々に増減し、一定の傾向を示さない。これは前述したように衝撃力が増大したとしても、張力が周期的に変化するためその連鎖作用を受けるためである。

次に、振動波形を検討してみると、 $\varepsilon=0.05$ では衝撃を受けて、次の衝撃を受けても波形には乱れがあまり見られない。 ε が0.1の場合では、波形に少し影響が現れ始めるが、後々の衝撃時の波形にまで影響の及

ぶことはない。 ε が0.2の場合には、ある時点での衝撃の影響が後々まで及ぶことがわかる。

次に、張力 T_0 の影響について検討してみる。図6は $\varepsilon=0.1$ と一定にし、 $x/l=0.4$ の位置を計算点として、 $T_0=50\text{ N}$ 、 200 N 、 400 N の場合について、解析した結果を示したものである。張力 T_0 の増大に伴い、応答振幅が増大する。そして、張力 T_0 が大きい場合には(たとえば $T_0=400\text{ N}$)、分数調波振動も顕著となる。また、図5(c)と図6(b)とを比較するとわかるように、張力 T_0 が大きくなると、二次モードの応答振幅は大きくなって、三次モードの応答振幅は小さくなる現象を示した。このように、張力 T_0 と張力の変化率 ε の組合せによっては非線形性が応答振幅に強い影響を及ぼす。次に、振動波形を検討してみると、張力 $T_0=50\text{ N}$ では衝撃を受けて、次の衝撃を受けても波形には乱れがあまり見られない。 T_0 が 200 N の場合では、波形に少し乱れが現れ始めるが、後々の衝撃時

の波形にまではあまり影響は及ばない。 $T_0=400\text{ N}$ となると、ある時点での衝撃の影響が後々まで及ぶことがわかる。以上の現象は、かみあい衝撃力と張力変化による結合励振系ゆえに生じる特徴的な振動特性である。

5. ま と め

衝撃力と周期的な張力変化を受ける歯付きベルトの非線形振動特性を理論的に検討した。その結果

(1) 張力 T が定常状態の場合、すなわち、 $\varepsilon=0$ の場合には、単なる非線形強制振動になる。この場合には速度の増加に伴う振幅の増減がほぼ定常的で、非線形性の影響が小さい。周期的な衝撃力と変動張力を同時に受ける歯付きベルトは強制パラメトリック結合励振系である。各次モードの応答振幅は単なる強制振動に比べ多様性に富んでおり、たとえば、図5, 6からもわかるように張力と張力変化率 ε の変化に伴っても、一次モードの応答振幅はそれほど顕著に変化しない。しかし、二次モードと三次モードの応答振幅は著しく変化し、張力の非線形性が応答に強い影響を及ぼ

すことがわかる。

(2) 調和バランス法を利用して、非線形運動方程式を解析した結果、非線形張力に起因する分数調波振動の発生を見た。これは張力と張力変化率 ε の変化が応答振幅に強い非線形性の影響を及ぼす、その影響で分数調波振動が張力の大きい場合に顕著となる。

文 献

- (1) Watanabe, K., ほか3名, *Astudy on Timing Belt Noise Noise & Transactions of the ASME*, (1990), 424-429.
- (2) 久保・ほか4名, *機論*, 37-293, C(1971), 197.
- (3) 籠谷・ほか4名, *機論*, 46-408, C(1980), 942.
- (4) Koyama, T., ほか3名, *Astudy on Timing Belt Noise Noise & Transactions of the ASME*, (1990), 419-423.
- (5) Kagotani, M., ほか3名, *Some Methods to Reduce Noise in Toothed belt Drives & Bulletin of the JAPAN of Mechanical Engineers*, 190(1981), 723.
- (6) 李・ほか3名, *機論*, 59-568, C(1993), 3902.
- (7) Chen, M., *Inertia Effects of a Roller-Chain on Impact Intensity & Transactions of the ASME*, (1985), 123-130.
- (8) Wang, K.W., *On the Impact Intensity of Vibrating Axially Moving Roller Chains & Transactions of the ASME*, (1992), 397-403.