

弱いマッハ反射に対する三衝撃波理論の検討*

平原裕行*¹, 青木俊之*², 松尾一泰*²

A Consideration of the Three-Shock Theory for Weak Mach Reflections

Hiroyuki HIRAHARA, Toshiyuki AOKI and Kazuyasu MATSUO

When a weak incident shock wave strikes a wedge and Mach reflection takes place, the previous experimental values of the angle of reflection, the triple-point trajectory angle and so on disagree with the values predicted by the three-shock theory. This contradiction is known as "von Neumann's paradox" and this phenomenon is not yet fully understood. In this paper, the three-shock theory is examined and modified taking the pressure condition and the curvature of a Mach shock into consideration. The result obtained by the present analysis shows good agreement with the previous experimental results.

Key Words: Compressible Flow, Unsteady Flow, Shock Wave, Mach Reflection, Shock Tube, Three-Shock Theory

1. ま え が き

伝ば衝撃波が傾斜直線壁に入射する場合、起こり得る反射形態は正常反射、単純マッハ反射、複合マッハ反射、二重マッハ反射の四つに大別される。これらの反射形態について、従来より多くの理論的及び実験的研究がなされているが、いまだ不明の点が少なくない。特に、壁面に入射する衝撃波が弱い場合のマッハ反射における理論と実験結果の不一致の問題はノイマンのパラドックスと呼ばれる未解決課題の一つで、これは次の二つの問題を含んでいる。一つは、離脱基準より求まる入射角より大きな入射角で正常反射が観察されることで、これについてはHornung⁽¹⁾やShirouzu⁽²⁾が境界層を考慮した解析を行っている。もう一つは、弱いマッハ反射において反射角や三重点軌跡角等の実験値が三衝撃波理論の値と全く合わないことで、この不一致は単純マッハ反射の領域で発生する⁽³⁾。この不一致をGuderley⁽⁴⁾は三重点近傍の領域をホドグラフ法により、Sternberg⁽⁵⁾は粘性を考慮して三重点が

有限の厚さを持った衝撃波の集合点であるという考えに基づく解析を行っているが、これらの論文ではマッハ数が変化した場合などについての説明はない。さらに、Sakurai⁽⁶⁾が粘性を考慮に入れた三衝撃波系の解法の公式化を行い、最近、Henderson⁽⁷⁾やDewey⁽⁸⁾が実験に基づく解析を行っているが、いまだ実験結果を十分に説明し得る理論は見当たらない。

本論文では、三衝撃波理論における仮定を再検討し、反射衝撃波の強さやマッハ衝撃波の曲がり方を考慮した計算法を提案し、弱いマッハ反射における計算結果と実験結果及び従来の理論との比較を行った。なお、本実験で用いた衝撃波管、計測装置、実験方法及び試験気体などはすべて文献(9)と同じである。

2. 弱いマッハ反射の反射形態と反射衝撃波の強さ

実験で得られた弱いマッハ反射の三重点付近のシャドウグラフ写真の一例を図1に示す。図は衝撃波の伝ば方向に対し傾斜角 $\theta_w=10^\circ$ の傾斜壁面にマッハ数 $M_1=1.19$ の衝撃波が入射する場合で、試験気体は空気である。図からわかるように、反射衝撃波とマッハ衝撃波は三衝撃波理論で仮定するような直線ではなく、か

* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年1月18日。

*¹ 正員、埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255)。

*² 正員、九州大学総合理工学研究所 (〒816 春日市春日公園 6-1)。

なり湾曲しており、それらの衝撃波の背後の流れは一樣でないことが分かる。図2はこのような弱いマッハ反射の流れ場を模式的に示したもので、三重点近傍の拡大図を図の左上に示している。図においてIT, TR, TMはそれぞれ入射衝撃波、反射衝撃波及びマッハ衝撃波、一点鎖線は三重点の軌跡を示し、 ω は入射角である。また、記号a, b, cはそれぞれ領域②, ③, ④の三重点T近傍の部分、点dは領域④の点M近傍の部分を示す。入射衝撃波マッハ数 M_0 が1に近い場合には、マッハ衝撃波TMは図のように領域④の方へ湾曲し、領域④の流れは一樣でなく、点cから点dにかけて圧力は増加する。次にすべり面TSは領域④の方へ凸になるが、すべり面の両側の流れの速度比が1に近いためすべり面の幅はほぼ一定である。また反射衝撃波TRは、入射衝撃波ITよりもかなり弱く、例えば $M_0=1.105$ 、入射衝撃波の前方の温度 $T_1=300\text{K}$ と圧力 $p_1=26.7\text{kPa}$ 、比熱比 $\gamma=1.402$ に対し、反射衝撃波上流マッハ数は1.001である⁽¹⁰⁾。この場合の衝撃波の厚さは、Shapiro⁽¹¹⁾の理論式によれば入射衝撃波について $6.35\mu\text{m}$ であるのに対し、反射衝撃波の厚さは $561\mu\text{m}$ となる。従って、図2の左上に示すように、入射衝撃波の厚さに対し反射衝撃波はかなり厚く、このためすべり面も厚くなる。故に、弱いマッハ反射の解析において、三衝撃波理論で仮定するようにすべり面を厚さの無い不連続面として取り扱うことは妥当でないと思われる。

実験で得られた反射衝撃波の形状から自己相似性の仮定⁽³⁾に基づいて、正常反射と単純マッハ反射における反射衝撃波の波面に沿っての反射衝撃波前後の圧力比 p/p_2 を計算した結果を図3に示す。ここで p_2 は領域②の圧力で与えられた M_0 に対して一定である。図において x は傾斜壁の頂点0を原点とした流れ方向の距離、 u_0 は入射衝撃波の伝ば速度、 t は入射衝撃波が傾斜壁の頂点0に達した瞬間からの時間で、試験気体は炭酸ガスである。それぞれの実験点の実験条件は図中に示した。また図の $x/u_0 t=1.0$ の線上に、正常反射の二衝撃波理論及びマッハ反射の三衝撃波理論によって計算される反射点及び三重点近傍における反射衝撃波の前後の圧力比の計算値をそれぞれの実験条件に対して黒三角点及び黒丸印で示してある。図より、正常反射の場合、 $x/u_0 t=0.65\sim 1.0$ の範囲で圧力は一定である。これは反射点近傍の反射衝撃波背後の流れが傾斜壁の頂点0の影響を受けない超音速流れであることを示し、従って反射衝撃波は弱い衝撃波である。正常反射の反射点近傍での反射衝撃波の強さは二衝撃波理論の計算値と比較的よく合う。一方、単純マッハ反射では、圧力は三重点から頂点0に向かって単調に減少する。こ

れは反射衝撃波背後の流れが亜音速であり、三重点T背後の流れが頂点0からのじょう乱の影響を受けるためである。三重点近傍での反射衝撃波の強さの実験値は三衝撃波理論の理論値よりかなり小さく、これが前

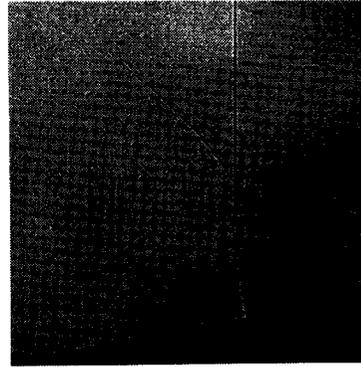


図1 弱いマッハ反射の三重点付近のシャドウグラフ写真 ($M_0=1.19$, $\theta_w=10^\circ$, 空気)

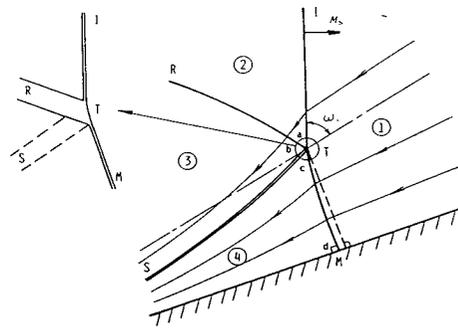


図2 弱いマッハ反射における流れの模式図

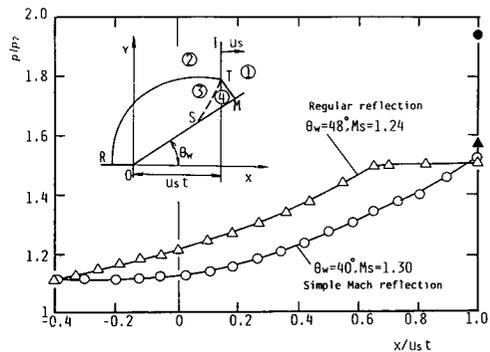


図3 反射衝撃波の強さの波面に沿う分布 (CO_2)

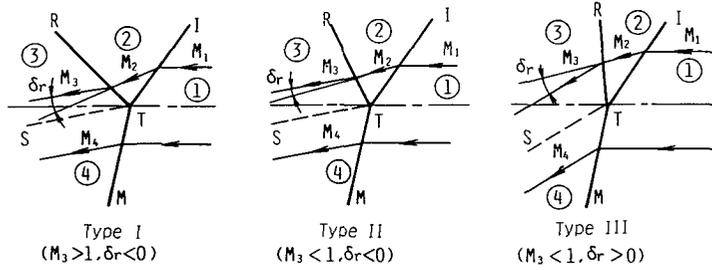


図4 マッハ反射における三重点近傍の流れ

述のノイマンのパラドックスとよばれる問題である。

三衝撃波理論を三重点近傍に適用して計算されるマッハ反射の形態は、反射衝撃波直後の流れのマッハ数 M_3 と流れの偏角 δ_r の正負によって 図4 に示す三つのタイプに分けられる。タイプ I は $M_3 > 1, \delta_r < 0$ の場合で、反射衝撃波の背後の流れは超音速で反射衝撃波に直線部分が生じる⁽⁹⁾。このタイプには複合マッハ反射と二重マッハ反射が属する。タイプ II と III は単純マッハ反射の場合で、この場合にノイマンのパラドックスが生じる。タイプ II は $M_3 < 1, \delta_r < 0$ で、反射衝撃波が強い衝撃波の解をもつ場合で、図3の単純マッハ反射はこのタイプである。タイプ III は $M_3 < 1, \delta_r > 0$ で、タイプ I、II と異なり、領域②の流れは反射衝撃波によって反時計回りに曲げられる。このことは反射衝撃波が領域②の流れに対し上流側に傾いた衝撃波となり、物理的に妥当でないと思われる。前述のように、タイプ II の単純マッハ反射において実験値が三衝撃波理論による値と大きく異なり、またタイプ III が妥当でないのは、三衝撃波理論において、すべり面が厚さをもたず、かつその両側の流れの方向と圧力が等しい不連続面と仮定されているためである。次章で、これらの仮定を再検討し、弱いマッハ反射に対する新しい計算方法について述べる。

3. 弱いマッハ反射の流れ場の計算法

傾斜直線壁における反射の問題では与えられた M_0 と θ_w に対して流れ場を解くことになるが、厳密に解くには反射衝撃波やマッハ衝撃波背後の非一様な領域を記述する方程式を導入しなければならない。しかしこれは極めて複雑な問題であるから、ここでは簡単のため図5に示すようにマッハ衝撃波TMは直線であると仮定する。この場合、図の点cと点dの圧力は等しくなるが、点bと点cの圧力が等しいという三衝撃波理論の条件を緩め、点bと点dの圧力差が最小になるという仮定

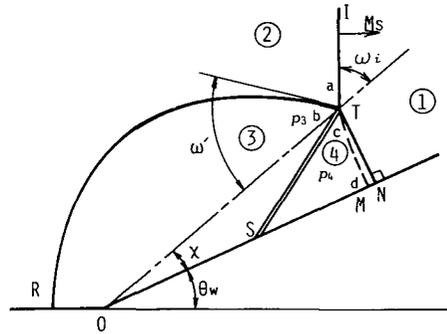


図5 弱いマッハ反射の流れ場

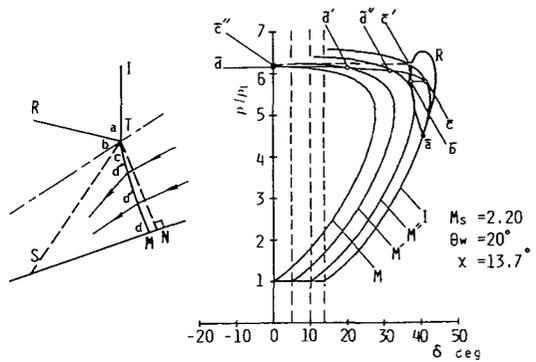


図6 弱いマッハ反射を表す衝撃波極線図(空気)

を置いてマッハ衝撃波の曲がりの効果を考慮する。前述の実験結果を考慮し、反射衝撃波は弱い衝撃波であるとする。更に、三重点近傍を除けばすべり面の幅はほぼ一定で、すべり面をせん断層とみなしたときの吸

い込み効果などは無視できるから、すべり面の両側の流れ方向が等しいという条件は必要であると考えられる。すなわち、計算には次の条件を置く。

- (1) 反射衝撃波は弱い衝撃波である。
- (2) すべり面両側の流れ方向は等しい。
- (3) マッハ衝撃波は壁面に垂直な直線である。
- (4) すべり面の両側の流れの圧力差は最小となるように反射衝撃波及びすべり面の方向が定まる。

以上の条件によって、与えられた M_2 と θ_w に対し仮定(1)~(3)を満たす衝撃波系の解のなかで、仮定(4)を満たす状態をマッハ反射系の解とする。

4. 計算結果

前章で述べた流れ場は、衝撃波前後の圧力比 p/p_1 と流れの偏角 δ を縦軸と横軸にとった衝撃波極線を用いると次のように説明される。図6は $\theta_w=20^\circ$ 、 $M_2=2.20$ で試験気体が空気の場合のマッハ反射に対する衝撃波極線図で、三重点軌跡角 $\chi=13.7^\circ$ (図5を参照)である。衝撃波極線I、Rはそれぞれ三重点での入射衝撃波及び反射衝撃波に、極線M、M'、M"はそれぞれ左図の点d、d'、d"のマッハ衝撃波に対するものである。左図の点aからdは極線上の点 \bar{a} から \bar{d} に対応する。上述の計算では三重点近傍の領域④の状態は点bとの圧力差が最小で流れ方向が等しい点 \bar{c}' として与えられるが、実際の流れでは三重点近傍にこのような圧力の不連続面は無く、すべり面における流れの直角方向の圧力勾配を無視すれば、領域④の三重点近傍の状態は点 \bar{c} で表わされる。マッハ衝撃波TMに沿った流れの状態は、TMの形状を適当に仮定すれば求まり、極線上では点 \bar{d}^* 、 \bar{d}'^* 、 \bar{d}''^* のように変化し、点 \bar{d} の圧力は点 \bar{c}' の圧力よりやや低い。すなわち本計算は点 $b \rightarrow c \rightarrow d^* \rightarrow d'$ と変化する流れを極線上の点 $\bar{b} \rightarrow \bar{c}' \rightarrow \bar{c}^*$ で近似したものであるということが出来る。

上述のモデルに基づいて計算された三重点軌跡角 χ の計算値の入射衝撃波マッハ数 M_2 に対する関係を図7に示す。実験気体は空気、各実験点の実験条件は図中に示した。実線は本計算法、破線は三衝撃波理論による χ の計算値である。一点鎖線は単純マッハ反射と複合マッハ反射の境界であるが、本計算結果はこの線より高いマッハ数では、三衝撃波理論と一致する。図より、各 θ_w の値に対し、三衝撃波理論の計算値は M_2 が1に近づくにつれ χ の値が大きくなるのに対し、本計算値では0に近づき、実験値の傾向とよく一致する。本計算法において、実線の横軸上の白丸で示す点は $\chi=0$ で、 M_2 をこれより小さくすると反射形態はこの点で

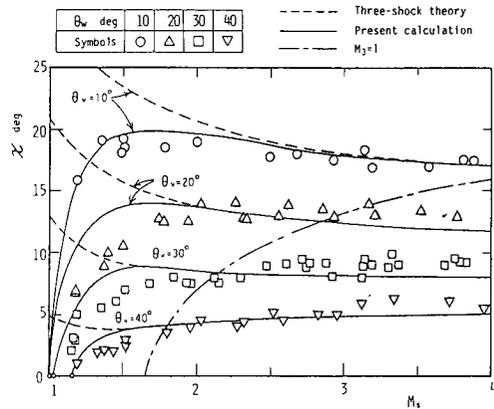


図7 三重点軌跡角(空気)

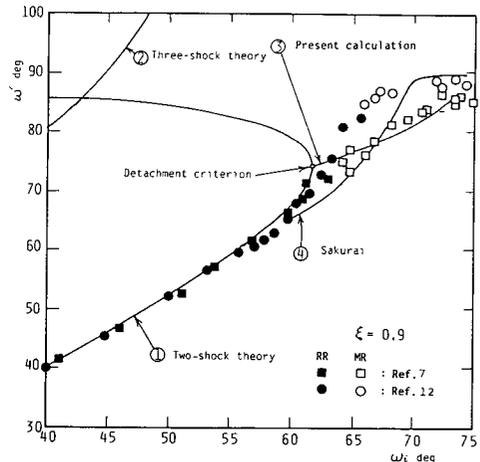


図8 衝撃波の入射角と反射角の関係(空気, $\epsilon=0.9$)

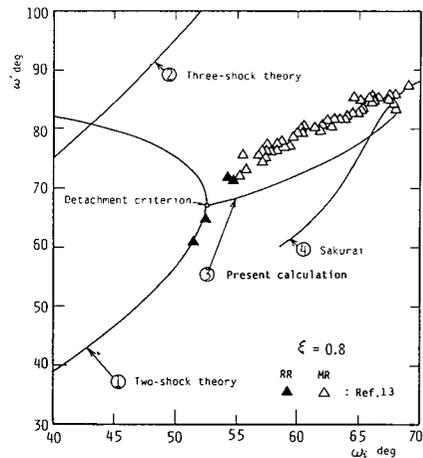


図9 衝撃波の入射角と反射角の関係(空気, $\epsilon=0.8$)

正常反射からマッハ反射へ遷移する。

次に、入射角 ω に対する反射角 ω' (図5を参照)の理論値と実験値を、入射衝撃波前後の圧力比 p_2/p_1 の逆数 $\xi = 0.9, 0.8, 0.5$ の弱い反射について、それぞれ図8、9及び10に示す。実験気体は空気で、黒印は正常反射の、白印はマッハ反射の反射角の実験値を示し、図中には本実験点だけでなく文献(7)、(12)、(13)の実験点も示してある。曲線①と②はそれぞれ二衝撃波理論と三衝撃波理論の計算値を示し、曲線③は本計算法による計算値を、曲線④、⑤はそれぞれSakurai⁽⁶⁾、Henderson⁽⁷⁾による計算値を示す。図からわかるように、正常反射の反射角は二衝撃波理論の曲線①と非常に良く一致するのに対し、マッハ反射の反射角の実験値は三衝撃波理論の曲線②と大きく異なり、この不一致がノイマンのパラドックスである。また曲線④は、 $\xi = 0.9$ 以外では実験値とあまり一致していない。また $\xi = 0.5$ の場合の曲線⑤は半実験的理論値で $\xi = 0.8, 0.9$ に対する値は無い。一方、本計算方法によって計算される曲線③は、実験値とかなりよく一致する。また曲線③は曲線①と離脱基準の点で交わり、本計算法では正常反射からマッハ反射への遷移の際、反射角が連続的に変化する。

5. 結 論

弱いマッハ反射に対する新しい計算法を提案し、その計算結果と実験結果の比較を行い、弱いマッハ反射の流れ場を考察した。得られた結果を要約すると、次の通りである。

- (1) ノイマンのパラドックスが生じる場合の反射形態では、マッハ衝撃波とすべり面で囲まれた領域の流れは一様でなく、マッハ衝撃波は湾曲する。このことを考慮するため、反射衝撃波が弱い衝撃波であり、すべり面の両側の流れの方向が等しく、マッハ衝撃波が直線であるという仮定のもとに、すべり面の両側の圧力差が最小になる場合が最も妥当な解を与えるという計算方法を提案し、マッハ反射とすべり面で囲まれた非一様な流れ場を衝撃波曲線を用いて計算した。
- (2) 上述の方法によって計算される三重点軌跡角、反射角などの値は実験値とよく一致し、正常反射からマッハ反射への遷移の前後で、これらの値が連続的に変化するのがよく説明できた。

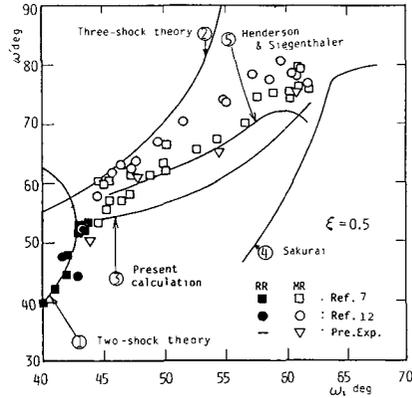


図10 衝撃波の入射角と反射角の関係 (空気, $\xi = 0.5$)

文 献

- (1) Hornung, H. G. and Tayler, J. R., *J. Fluid Mech.*, 123 (1982), 143.
- (2) Shirouzu, M. and Glass, I. I., UTIAS Rep. 264 (1982).
- (3) 松尾・ほか4名, 機論, 51-466, B (昭60), 1941.
- (4) Guderley, K. G. and Moszynski, J. R., *The Theory of Transonic Flow*, (1962), 144, Pergamon Press.
- (5) Sternberg, J., *Phys. Fluids*, 2-2 (1959), 179.
- (6) Sakurai, A., *J. Phys. Soc. Jap.*, 19-8 (1964), 1440.
- (7) Henderson, L. F. and Siegenthaler, A., *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 369 (1980), 537.
- (8) Dewey, J. M. and McMillin, D. J., *J. Fluid Mech.*, 152 (1985), 67.
- (9) 生井・ほか3名, 機論, 48-426, B (昭57), 212.
- (10) Dewey, J. M. and McMillin, D. J., *J. Fluid Mech.*, 152 (1985), 49.
- (11) Shapiro, A. H., *The Dynamic and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, (1953), 131, Ronald Press.
- (12) Harrison, F. B. and Bleakney, W., *Princeton Univ., Dept. Phys. Tech. Rep. II-0* (1947).
- (13) Kawamura, R. and Saito, H., *J. Phys. Soc. Jap.*, 11-5 (1956), 584.

討 論

〔質問〕 高山和喜〔東北大学高速力学研究所〕
弱い衝撃波では、三重点 T はよく判別できないが、
どのようにして実験データを読取ったか、ご説明いた
だきたい。

マッハステムに沿う、衝撃波面の曲率の変化を計測
していただければ、結論の(1)をよりわかりやすく説
明できるのでは、との印象を受けたが、いかがか。

〔回答〕 ご指摘の三重点 T の判別については、
シャドウグラフ写真の衝撃波の暗部前面を基準とし
て、入射衝撃波と反射衝撃波におけるそれらの曲線の
交点を三重点とした。なお本実験の入射衝撃波マッハ
数の範囲では、シャドウグラフ写真からの反射衝撃波

の形状の読取りは、入射衝撃波の場合と同程度の精度
で測定可能である。

第2の点に関しては、本研究においては本文3章の
文頭において述べたように、反射衝撃波およびマッハ
衝撃波の背後の非一様な領域のモデル化を行っておら
ず、実験によって得られるマッハ衝撃波の曲率の変化
と計算結果を直接比較することができない。このため、
計算の結果は三重点軌跡角と反射角について実験値と
比較することにより検証し、マッハ衝撃波の曲がりの
影響は本文中の図6を用いて一例を示すにとどめた。
マッハ衝撃波面の曲率の影響などを含めたより正確な
計算については今後の課題とさせていただきたい。