

へん平回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する 円柱の定常熱流による熱応力*

内山 豊美**, 土田 栄一郎**
Toyomi UCHIYAMA, Eiichiro TSUCHIDA

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Spheroidal Cavity, Penny-Shaped Crack, Stress Intensity Factor, Cylinder

1. 緒 言

原子炉, 压力容器に代表されるように, 機械や構造物の各構成部材が, 不均一な温度場において使用されることが多くなってきた。これらの部材内部には往々にして空かあるいはき裂などの欠陥が存在しており, 欠陥まわりに熱応力の集中を生じるため, 強度設計上重要な問題となっている。

特に, 部材の形状が円柱の場合を考えると, この熱応力問題は古くから研究されてきた。しかしながら, その多くは中実あるいは中空の円柱を対象としたもので, 内部に欠陥の存在する場合に対する研究は非常に少ない。例えば, 渥美⁽¹⁾および著者ら⁽²⁾はそれぞれ球かおよびへん長回転だ円体状空かをもつ円柱の定常熱流による熱応力問題を取扱い, Das⁽³⁾および渥美ら⁽⁴⁾はそれぞれ円形き裂および球かを有する円柱を対象に欠陥表面に温度分布が与えられた場合の定常熱応力問題を解析している。

本研究は, へん平回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する円柱に一定温度こう配の定常熱流が存在する場合の熱応力問題を, 熱弾性ポテンシャルおよびDougallの調和応力関数を用いた三次元熱弾性理論に基づいて厳密に解析したものである。

2. 解 析 法

2.1 温度分布 図1に示されるように, 円柱半径を単位長さとしてすべての長さの基準にとり, へん平回転だ円体状空かの長軸および短軸の長さをそれぞれ $2a, 2b$ とする。Oを座標原点として, 円柱座標 (r, θ, z) およびへん平回転だ円体座標 (α, β, γ) を用い

ば, それらの間には,

$$r = c\bar{\xi}\bar{\eta}, \quad \theta = \gamma, \quad z = c\xi\eta \quad \dots\dots\dots(1)$$

の関係がある。ここで, $\xi = \sinh \alpha, \bar{\xi} = \cosh \alpha, \eta = \cos \beta, \bar{\eta} = \sin \beta$ であり, c は焦点の原点からの距離である。

いま, 無限遠方で一定温度こう配 τ_0 を有する定常熱流がへん平回転だ円体状空かを有する円柱内を通過するものとする。この場合の温度関数を空かによるかく乱を考慮して, 次式のように表す。

$$T = \tau_0 z + T^* \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで, かく乱による温度関数 T^* は z に関して奇関数であり, 定常状態におけるフーリエの熱伝導方程式

$$\nabla^2 T^* = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

を満足する。また, 円柱側面ならびに空か面において熱絶縁の状態にあるとすると, 温度関数 T は次の条件を満足しなければならない。

(i) 円柱側面 $r=1$ において

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=1} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

(ii) 空か面 $\alpha=\alpha_0$ において

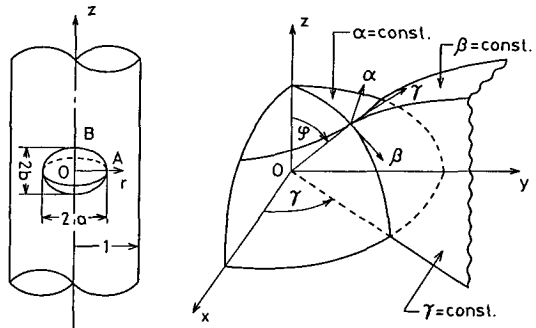


図1 座標系

* 昭和58年10月9日 第61期全国大会講演会において講演, 原稿受付 昭和59年5月18日。

** 正員, 埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255)。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

(iii) 無限遠方 $z \rightarrow \infty$ において

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T = \tau_0 z \dots\dots\dots (6)$$

温度条件式(4), (5)を満足させるために, かく乱に対する温度関数 T^* に次のような調和関数を与える.

$$T^* = \tau_0 \sum_{m=0}^{\infty} F_m q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) + \tau_0 \int_0^{\infty} \phi(\lambda) I_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda \dots\dots\dots (7)$$

ここで, $F_m, \phi(\lambda)$ はそれぞれ温度条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり, $I_n(\lambda r)$ は第1種変形ベッセル関数, $P_n(\eta)$ は第1種ルジャンドル関数, $q_n(\xi) = i^{n+1} Q_n(i\xi)$, $i = \sqrt{-1}$ は第2種変形ルジャンドル関数⁽⁵⁾である. なお, 式(7)は無遠方で零となり, 温度条件式(6)は満足される.

まず, 円柱側面における温度条件を満足させるために, 関係式⁽⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} i_{2m+n}(\lambda c) K_n(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda &= \frac{\pi}{2c} (-1)^{m+n} q_{2m+n}^n(\xi) P_{2m+n}^{-n}(\eta) \\ \int_0^{\infty} i_{2m+n+1}(\lambda c) K_n(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda &= \frac{\pi}{2c} (-1)^{m+n} q_{2m+n+1}^n(\xi) P_{2m+n+1}^{-n}(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

を用いて, 式(7)を円柱座標で表すと,

$$T^* = \tau_0 \sum_{m=0}^{\infty} f_m \int_0^{\infty} i_{2m+1}(\lambda c) K_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda + \tau_0 \int_0^{\infty} \phi(\lambda) I_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda \dots\dots\dots (9)$$

となる. ここで, $f_m = (2c/\pi)(-1)^m F_m$ であり, $K_n(\lambda r)$ は第2種変形ベッセル関数, $i_n(\lambda c) = \sqrt{\pi/(2\lambda c)} I_{n+(1/2)}(\lambda c)$ は第1種変形球ベッセル関数⁽⁵⁾, $P_n^n(\eta)$ は第1種ルジャンドル陪関数である. また, $q_n^n(\xi)$ は複素数を引数とする第2種ルジャンドル陪関数 $Q_n^n(i\xi)$ を用いて, $q_n^n(\xi) = (-1)^m i^{n+1} Q_n^n(i\xi)$ で定義され, 第2種変形ルジャンドル陪関数と呼ぶことにする^{*1}. 特に, $q_n^n(\xi) = q_n(\xi)$ である.

式(9)を温度条件式(4)に代入し, 円柱側面における温度条件を満足させると,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=1} = \tau_0 \int_0^{\infty} \lambda \left\{ \phi(\lambda) I_1(\lambda) - \sum_{m=0}^{\infty} f_m i_{2m+1}(\lambda c) K_1(\lambda) \right\} \sin \lambda z d\lambda = 0 \dots\dots\dots (10)$$

となり, 式(10)にフーリエ逆変換を施せば, 未知関数 $\phi(\lambda)$ は次のように決定される.

$$\phi(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m i_{2m+1}(\lambda c) \frac{K_1(\lambda)}{I_1(\lambda)} \dots\dots\dots (11)$$

次に, 空か面における温度条件を満足させるために, 関係式⁽⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} I_n(\lambda r) \cos \lambda z &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} (4m+2n+1) i_{2m+n}(\lambda c) p_{2m+n}^n(\xi) P_{2m+n}^{-n}(\eta) \\ I_n(\lambda r) \sin \lambda z &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} (4m+2n+3) i_{2m+n+1}(\lambda c) p_{2m+n+1}^n(\xi) P_{2m+n+1}^{-n}(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

を用いて, 式(7)をへん平回転だ円体座標で表すと,

$$T^* = \tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} F_n q_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) + \tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \dots\dots\dots (13)$$

となる. ここで,

$$\delta_n = \frac{2c}{\pi} (4n+3) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} F_m \int_0^{\infty} \frac{K_1(\lambda)}{I_1(\lambda)} i_{2m+1}(\lambda c) i_{2n+1}(\lambda c) d\lambda \dots\dots\dots (14)$$

であり, $p_n(\xi) = (-i)^n P_n(i\xi)$ は第1種変形ルジャンドル関数⁽⁵⁾である. また, $p_n^n(\xi)$ は複素数を引数とする第1種ルジャンドル陪関数 $P_n^n(i\xi)$ を用いて, $p_n^n(\xi) = (-i)^n P_n^n(i\xi)$ で定義され, 第1種変形ルジャンドル陪関数と呼ぶことにする^{*1}. 特に, $p_n^n(\xi) = p_n(\xi)$ である.

式(13)を温度条件式(5)に代入し, 空か面における温度条件を満足させると,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = \tau_0 \bar{\xi}_0 \left[c P_1(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \{ F_n q_{2n+1}(\xi_0) + \delta_n p_{2n+1}(\xi_0) \} P_{2n+1}(\eta) \right] = 0 \dots\dots\dots (15)$$

を得る. ここで, $\xi_0 = \sinh \alpha_0$, $\bar{\xi}_0 = \cosh \alpha_0$ である. 式(15)において, $P_{2n+1}(\eta)$ の係数部分を零に等置すれば, 未定係

*1 第1種および第2種変形ルジャンドル陪関数 $p_n^n(\xi), q_n^n(\xi)$ は, 次の微分方程式の基本系をつくる.

$$(1+\xi^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + 2\xi \frac{du}{d\xi} + \left\{ \frac{m^2}{1+\xi^2} - n(n+1) \right\} u = 0$$

数 F_n に関する無限連立一次方程式が得られ、これを解けば、温度分布が求まる。

2・2 熱弾性ポテンシャル 温度分布に起因する応力を求めるために、軸対称熱弾性基礎方程式の特解として、

$$\nabla^2 Q = T^* \dots\dots\dots (16)$$

を満足する熱弾性ポテンシャル Q を用いれば、これより導かれる変位および応力成分はへん平回転だ円体座標のもとでは次のようになる⁽⁷⁾。

$$u_\alpha = \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon h \bar{\xi} \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \quad v_\beta = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon h \bar{\eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{E\varepsilon}{1-\nu} \left\{ h^2 \bar{\xi}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} - c^2 h^4 \bar{\eta}^2 \left(\xi \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) - T^* \right\} \\ \sigma_\beta &= \frac{E\varepsilon}{1-\nu} \left\{ h^2 \bar{\eta}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + c^2 h^4 \bar{\xi}^2 \left(\xi \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) - T^* \right\} \\ \sigma_r &= \frac{E\varepsilon}{1-\nu} \left\{ h^2 \left(\xi \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) - T^* \right\} \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E\varepsilon}{1-\nu} \bar{\xi} \bar{\eta} \left\{ -h^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 h^4 \left(\xi \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 ε は線膨張係数、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比であり、 $h^2 = 1 / \{c^2(\xi^2 + \eta^2)\}$ である。なお、円柱座標における変位ならびに応力成分の表示式は、他の文献⁽⁸⁾を参照されたい。

式(16)の熱弾性ポテンシャル Q として、式(9)および式(13)のそれぞれの項に対応して円柱座標ならびにへん平回転だ円体座標における重調和関数が次のように得られる。

円柱座標表示：

$$Q = -\tau_0 \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty f_m \frac{i_{2m+1}(\lambda c)}{2\lambda} r K_1(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda + \tau_0 \int_0^\infty \frac{\phi(\lambda)}{2\lambda} r I_1(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda \dots\dots\dots (19)$$

へん平回転だ円体座標表示：

$$\begin{aligned} Q &= -\tau_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2 F_n}{2(4n+3)} \bar{\xi} \bar{\eta} \{ q_{2n}^{1/2}(\xi) P_{2n}^{-1}(\eta) + q_{2n+2}^{1/2}(\xi) P_{2n+2}^{-1}(\eta) \} \\ &\quad - \tau_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2 \delta_n}{2(4n+3)} \bar{\xi} \bar{\eta} \{ p_{2n}^{1/2}(\xi) P_{2n}^{-1}(\eta) + p_{2n+2}^{1/2}(\xi) P_{2n+2}^{-1}(\eta) \} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

2・3 応力関数解 前述の熱弾性ポテンシャル Q より得られる応力は、円柱側面および空か面で零ではないので、これらの境界面に生じている応力を打消すような解を求め、式(19)あるいは式(20)に重ね合せて、境界面における応力自由の条件を満足させなければならない。そこで、軸対称三次元熱弾性基礎方程式の同次解として Dougall の調和応力関数 φ_0, φ_4 を用い、これらに次のような調和関数を与える。

$$[I] \quad \varphi_0 = E\varepsilon \tau_0 \sum_{m=0}^\infty A_m q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta), \quad \varphi_4 = E\varepsilon \tau_0 \sum_{m=0}^\infty B_m q_{2m}(\xi) P_{2m}(\eta) \dots\dots\dots (21)$$

$$[II] \quad \varphi_0 = E\varepsilon \tau_0 \int_0^\infty \psi_1(\lambda) I_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda, \quad \varphi_4 = E\varepsilon \tau_0 \int_0^\infty \lambda \psi_2(\lambda) I_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 A_m, B_m および $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数である。これらの応力関数から導かれる応力成分は、無限遠方ですべて零となる。

まず、円柱側面における境界条件を満足させるために、関係式(8)を用いて応力関数 [I] を円柱座標に書き改めると、次のようになる。

$$[III] \quad \varphi_0 = E\varepsilon \tau_0 \sum_{m=0}^\infty a_m \int_0^\infty i_{2m+1}(\lambda c) K_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda, \quad \varphi_4 = E\varepsilon \tau_0 \sum_{m=0}^\infty b_m \int_0^\infty i_{2m}(\lambda c) K_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \dots\dots\dots (23)$$

ここで、

$$a_m = \frac{2c}{\pi} (-1)^m A_m, \quad b_m = \frac{2c}{\pi} (-1)^m B_m$$

である。応力関数 [II], [III] および式(19)の熱弾性ポテンシャルより各々応力成分を求め、円柱側面における応力自由の条件を満足させると、

$$\left(\frac{\sigma_r}{E\epsilon\tau_0}\right)_{r=1} = \int_0^\infty \lambda^2 \left[\left\{ I_0(\lambda) - \frac{I_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \psi_1(\lambda) - \{ \lambda I_1(\lambda) + (1-2\nu)I_0(\lambda) \} \psi_2(\lambda) \right. \\ \left. + \left\{ K_0(\lambda) + \frac{K_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \sum_{m=0}^\infty a_m i_{2m+1}(\lambda c) + \left\{ K_1(\lambda) - (1-2\nu)\frac{K_0(\lambda)}{\lambda} \right\} \sum_{m=0}^\infty b_m i_{2m}(\lambda c) \right. \\ \left. - \frac{1}{2(1-\nu)\lambda^2 I_1(\lambda)} \sum_{m=0}^\infty f_m i_{2m+1}(\lambda c) \right] \sin \lambda z d\lambda = 0 \dots\dots\dots (24)$$

$$\left(\frac{\tau_{zr}}{E\epsilon\tau_0}\right)_{r=1} = \int_0^\infty \lambda^2 \left[I_1(\lambda) \psi_1(\lambda) - \{ \lambda I_0(\lambda) + 2(1-\nu)I_1(\lambda) \} \psi_2(\lambda) \right. \\ \left. - K_1(\lambda) \sum_{m=0}^\infty a_m i_{2m+1}(\lambda c) - \left\{ K_0(\lambda) - 2(1-\nu)\frac{K_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \sum_{m=0}^\infty b_m i_{2m}(\lambda c) \right. \\ \left. + \frac{1}{2(1-\nu)\lambda^2 I_1(\lambda)} \sum_{m=0}^\infty f_m i_{2m+1}(\lambda c) \right] \cos \lambda z d\lambda = 0 \dots\dots\dots (25)$$

となる。式(24)、(25)にそれぞれフーリエ逆変換を施し、未知関数 $\psi_1(\lambda)$ 、 $\psi_2(\lambda)$ を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty \{ a_m i_{2m+1}(\lambda c) g_1(\lambda) + b_m i_{2m}(\lambda c) g_2(\lambda) + f_m i_{2m+1}(\lambda c) g_3(\lambda) \} \\ \psi_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty \{ a_m i_{2m+1}(\lambda c) g_4(\lambda) + b_m i_{2m}(\lambda c) g_5(\lambda) + f_m i_{2m+1}(\lambda c) g_6(\lambda) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} G_0(\lambda)g_1(\lambda) &= -[\{\lambda^2 + 2(1-\nu)\}I_1(\lambda)K_1(\lambda) + \lambda^2 I_0(\lambda)K_0(\lambda) + 2(1-\nu)] \\ G_0(\lambda)g_2(\lambda) &= -\{\lambda^2 - 2(1-\nu)(1-2\nu)\}/\lambda \\ G_0(\lambda)g_3(\lambda) &= [\{\lambda^2 + 2(1-\nu)\}I_1(\lambda) + 2(1-\nu)\lambda I_0(\lambda)] / \{2(1-\nu)\lambda^2 I_1(\lambda)\} \\ G_0(\lambda)g_4(\lambda) &= -1 \\ G_0(\lambda)g_5(\lambda) &= -[\{\lambda^2 + 2(1-\nu)\}I_1(\lambda)K_1(\lambda) + \lambda^2 I_0(\lambda)K_0(\lambda) - 2(1-\nu)]/\lambda \\ G_0(\lambda)g_6(\lambda) &= I_0(\lambda) / \{2(1-\nu)\lambda I_1(\lambda)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$G_0(\lambda) = \lambda^2 \{ I_0(\lambda) \}^2 - \{ \lambda^2 + 2(1-\nu) \} \{ I_1(\lambda) \}^2 \dots\dots\dots (28)$$

次に、空か面における境界条件を満足させるために、関係式(12)を用いて応力関数 [II] をへん平回転だ円体座標に書き改めると、次のようになる。

$$[IV] \quad \varphi_0 = E\epsilon\tau_0 \sum_{n=0}^\infty \alpha_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta), \quad \varphi_4 = E\epsilon\tau_0 \sum_{n=0}^\infty \beta_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \dots\dots\dots (29)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2c}{\pi} (4n+3) \sum_{m=0}^\infty (-1)^{m+n} \left\{ A_m \int_0^\infty g_1(\lambda) i_{2n+1}(\lambda c) i_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + B_m \int_0^\infty g_2(\lambda) i_{2n+1}(\lambda c) i_{2m}(\lambda c) d\lambda + F_m \int_0^\infty g_3(\lambda) i_{2n+1}(\lambda c) i_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ \beta_n &= \frac{2c}{\pi} (4n+1) \sum_{m=0}^\infty (-1)^{m+n} \left\{ A_m \int_0^\infty \lambda g_4(\lambda) i_{2n}(\lambda c) i_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + B_m \int_0^\infty \lambda g_5(\lambda) i_{2n}(\lambda c) i_{2m}(\lambda c) d\lambda + F_m \int_0^\infty \lambda g_6(\lambda) i_{2n}(\lambda c) i_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

である。応力関数 [I]、[IV] および式(20)の熱弾性ポテンシャル Ω より各々応力成分を求め、空か面における応力自由の条件を満足させると次のようになる。

$$\left(\frac{\sigma_a}{E\epsilon\tau_0 c^2 h'}\right)_{a=a_0} = \sum_{n=0}^\infty \left(s_{A1} A_{n-1} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+1} + s_{B1} B_{n-1} + s_{B2} B_n + s_{B3} B_{n+1} + s_{B4} B_{n+2} + s_{a1} \alpha_{n-1} \right. \\ \left. + s_{a2} \alpha_n + s_{a3} \alpha_{n+1} + s_{\beta 1} \beta_{n-1} + s_{\beta 2} \beta_n + s_{\beta 3} \beta_{n+1} + s_{\beta 4} \beta_{n+2} + \frac{S_n}{1-\nu} \right) P_{2n+1}(\eta) = 0 \dots\dots\dots (31)$$

$$\left(\frac{\tau_{a\beta}}{E\epsilon\tau_0 c^2 h' \xi \bar{\eta}}\right)_{a=a_0} = \sum_{n=0}^\infty \left\{ t_{A1} A_{n-1} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+1} + t_{B1} B_{n-1} + t_{B2} B_n + t_{B3} B_{n+1} + t_{B4} B_{n+2} + t_{a1} \alpha_{n-1} \right. \\ \left. + t_{a2} \alpha_n + t_{a3} \alpha_{n+1} + t_{\beta 1} \beta_{n-1} + t_{\beta 2} \beta_n + t_{\beta 3} \beta_{n+1} + t_{\beta 4} \beta_{n+2} + \frac{T_n}{1-\nu} \right\} P'_{2n+1}(\eta) = 0 \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 s_{Al} ($l=1\sim 3$)、 s_{Bl} ($l=1\sim 4$)、 t_{Al} ($l=1\sim 3$)、 t_{Bl} ($l=1\sim 4$) は例えば次のようなものである。

$$s_{A1} = -\frac{(2n+1)(2n)}{(4n+1)(4n-1)} \{ (2n-1)q_{2n-1}(\xi_0) - \xi_0 q'_{2n-1}(\xi_0) - \xi_0^2 q''_{2n-1}(\xi_0) \} \dots \dots \dots (33)$$

$$t_{A1} = -\frac{(2n)(2n-2)}{(4n+1)(4n-1)} q'_{2n-1}(\xi_0) \dots \dots \dots (34)$$

また、 S_n, T_n は式(15)より決定される係数 F_n を用いて次のように表される。

$$S_n = s_{F1}F_{n-2} + s_{F2}F_{n-1} + s_{F3}F_n + s_{F4}F_{n+1} + s_{F5}F_{n+2} + s_{\delta 1}\delta_{n-2} + s_{\delta 2}\delta_{n-1} + s_{\delta 3}\delta_n + s_{\delta 4}\delta_{n+1} + s_{\delta 5}\delta_{n+2} \dots \dots \dots (35)$$

$$T_n = t_{F1}F_{n-2} + t_{F2}F_{n-1} + t_{F3}F_n + t_{F4}F_{n+1} + t_{F5}F_{n+2} + t_{\delta 1}\delta_{n-2} + t_{\delta 2}\delta_{n-1} + t_{\delta 3}\delta_n + t_{\delta 4}\delta_{n+1} + t_{\delta 5}\delta_{n+2} \dots \dots \dots (36)$$

ここで、 $s_{Fl}(l=1\sim 5), t_{Fl}(l=1\sim 5)$ は例えば次のようなものである。

$$s_{F1} = \frac{c^2(2n+1)(2n)(2n-1)}{2(4n+1)(4n-1)(4n-3)(4n-5)} [\xi_0 q_{2n-2}(\xi_0) + (2n-2)\{\xi_0 q_{2n-2}(\xi_0) + \xi_0^2 q'_{2n-2}(\xi_0) - 2q_{2n-3}(\xi_0)\}] \dots \dots \dots (37)$$

$$t_{F1} = -\frac{c^2(2n)(2n-1)(2n-2)^2}{2(4n+1)(4n-1)(4n-3)(4n-5)} q_{2n-2}(\xi_0) \dots \dots \dots (38)$$

さらに、 $s_{\alpha l}, s_{\beta l}, t_{\alpha l}, t_{\beta l}, s_{\delta l}, t_{\delta l}$ はそれぞれ $s_{A1}, s_{B1}, t_{A1}, t_{B1}, s_{F1}, t_{F1}$ に含まれる第2種変形ルジャンドル関数 $q_n(\xi_0)$ および陪関数 $q_n^m(\xi_0)$ を第1種変形ルジャンドル関数 $p_n(\xi_0)$ および陪関数 $p_n^m(\xi_0)$ に置き換え、かつ偶数次の変形ルジャンドル関数の符号を逆にしたものとなる。

式(31), (32)においてそれぞれ $P_{2n+1}(\eta), P'_{2n+1}(\eta)$ の各係数部分を零に等置すれば、 A_n, B_n に関する無限連立一次方程式が得られる。これを解けば本問題に対する解は完全に決まる。そして、全体の変位ならびに応力各成分は、応力関数 [I], [II] および熱弾性ポテンシャルを重ね合わせるにより得られる。

2・4 円形き裂に対する解 以上の解析において、 $\alpha_0=0$ とおけば、 $a=c, b=0$ となって、へん平回転だ円体状空かは原点 O を中心とする半径 c の円形き裂となる。すなわち、式(15)および式(31), (32)において $\xi_0=0$ とおけば、円形き裂に対する解を得ることができる。

さて、本問題のき裂の変形はモード II であるから、応力拡大係数は次式で定義される。

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2\pi(r-c)} (\tau_{zr})_{r=0} = -\sqrt{\pi c} \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi (\tau_{\alpha\beta})_{\eta=0} \dots \dots \dots (39)$$

実際に計算すると、

$$K_{II} = E\epsilon\tau_0\sqrt{\pi c} \Sigma_1 \dots \dots \dots (40)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c^2} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n-4k+1)}{(2k+1)(2n-k+1)} \left\{ \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} \frac{(2n-2k+1)!!}{2(2n-2k-2)!!} \right\} - \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \right] P'_{2n+1}(0) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{c} \left[\left\{ (1-2\nu) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n-4k-1)}{(2k+1)(2n-k)} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k-2)!!} + (1-2\nu) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\} \right. \\ & + \left. \frac{(2n+1)!!}{2(2n-2)!!} P_{2n}(0) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n-4k-1)}{(2k+1)(2n-k)} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k-2)!!} P_{2n}''(0) \right] \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2(1-\nu)(4n+3)} \left[\left\{ 2(2n-1)(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n-4k-1)}{(2k+1)(2n-k)} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k-2)!!} \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n-4k-1)}{(2k+1)(2n-k)} \frac{(2n-2k+1)!!}{(2n-2k-4)!!} \frac{(2n+1)!!}{2(2n-2)!!} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\} P_{2n}(0) \right. \\ & + \left. \left\{ 2(2n+1)(n+2) \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n-4k+3)}{(2k+1)(2n-k+2)} \frac{(2n-2k+1)!!}{(2n-2k)!!} \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n-4k+3)}{(2k+1)(2n-k+2)} \frac{(2n-2k+3)!!}{(2n-2k-2)!!} \frac{(2n+3)!!}{2(2n)!!} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right\} P_{2n+2}(0) \right] \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

特に、円形き裂の大きさが円柱半径に比べて十分小さい場合には、温度関数および熱弾性ポテンシャルの第1項のみと応力関数 [I] だけで解析でき、式(7), (20)および式(21)の未定係数は、空か面における応力自由の条件から

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{2c}{\pi}, & A_0 &= \frac{(3+2\nu)c^3}{15\pi(1-\nu)}, \\ A_1 &= -\frac{2c^3}{15\pi}, & B_1 &= \frac{c^2}{3\pi(1-\nu)} \\ F_m &= 0 \quad (m \geq 1), & A_m &= 0 \quad (m \geq 2), \\ B_0 &= B_m = 0 \quad (m \geq 2) \end{aligned} \right\} \dots(43)$$

と決定される。これより、 $(\tau_{\alpha\beta})_{\eta=0}$ を求めると次のようになる。

$$\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{E\varepsilon\tau_0} \right)_{\eta=0} = -\frac{c}{3\pi(1-\nu)\xi\xi} \dots(44)$$

式(44)を式(39)に代入すれば、円形き裂が無限度中にある場合の応力拡大係数 $K_{II\infty}$ が次のように求まる⁽⁹⁾。

$$K_{II\infty} = \frac{E\varepsilon\tau_0 c^{3/2}}{3(1-\nu)\sqrt{\pi}} \dots(45)$$

3. 数値計算

ポアソン比を $\nu=0.3$ とし、まず形状比 $\bar{s}=b/a=$

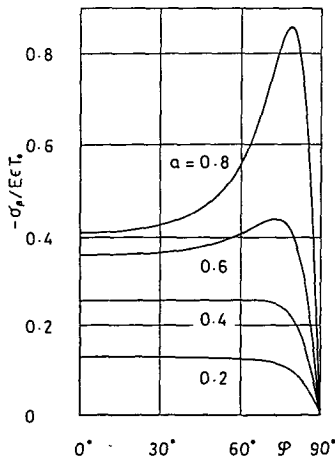


図2 空か面における σ_β の分布 ($\bar{s}=0.5$)

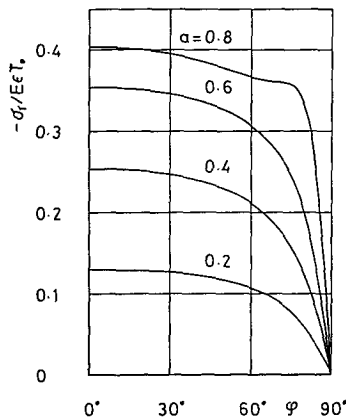


図3 空か面における σ_γ の分布 ($\bar{s}=0.5$)

0.5として $a=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の各場合について、次に形状比をいくつか変化させた場合について数値計算を行った。すべての無限級数の収束は良好であるが、空かが大きくなると次第に悪くなる。そこで、最終的に得られる結果の有効数字が3けた以上になるように、 F_n, A_n, B_n を10~15項とって計算を行った。以下、問題の逆対称性を考慮して円柱の上半分 ($z \geq 0$) について考えることにする。

図2は $\bar{s}=0.5$ の場合の空か面における σ_β の分布を示したものである。ここで、 φ は z 軸から測った角度で、空か面においては β と $\tan \varphi = (a/b)\tan \beta$ の関係がある。また、基準温度 T_0 は空かがない場合の $z=1$ における温度 $T_0 = \tau_0 \times 1$ を表す。応力 σ_β は φ が 0° から 90° のすべての範囲で圧縮応力を示し、 $\varphi=90^\circ$ (図1の点A) で零となる。空かが比較的小さい場合は、 $\varphi=0^\circ$ (点B) で圧縮応力の最大値をとるが、空かが大きくなると圧縮応力の最大値の生じる位置は点A近傍となる。

図3は $\bar{s}=0.5$ のときの空か面における σ_γ の分布を示したものである。 σ_γ は σ_β の場合と異なり、圧縮応力の最大値は常に点Bに生じる。

図4は $a=0.2$ とし、形状比を $\bar{s}=0.1, 0.3, 0.5, 1$ と変化させた場合の空か面における σ_β の分布を示したものである。ここで、 $\bar{s}=1$ は球かの場合に相当する。 σ_β は、いずれの形状比に対しても、点Aで零となる。また \bar{s} が比較的大きい、すなわち、空かの形状が球に近い場合は、点Bで圧縮応力の最大値をとるが、 \bar{s} が小さくなる、すなわち、空かの形状がへん平化して円形き裂に近づくに従って、圧縮応力の最大値をとる位置は点Aに近づく。

図5は $a=0.2$ とした場合の空か面における σ_γ の

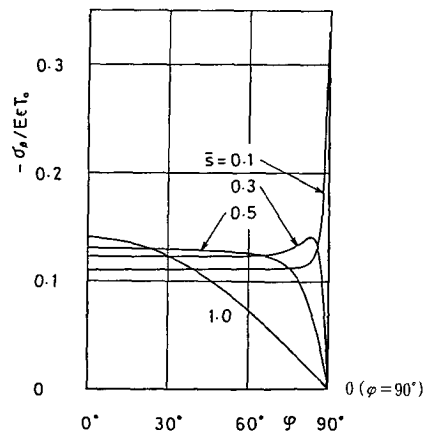


図4 空か面における σ_β の分布 ($a=0.2$)

分布を各形状比について示したものである。 σ_r は形状比の大小にかかわらず、点 B で圧縮応力の最大値を示す。また、形状比が 0.1 などのごく小さい場合は、 σ_r の分布は点 A の近傍で、特異的な挙動を示すよう

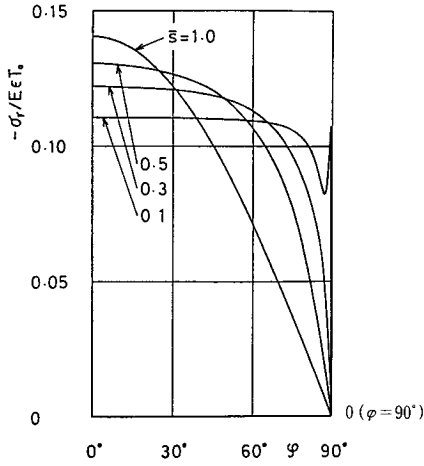


図 5 空か面における σ_r の分布 ($a=0.2$)

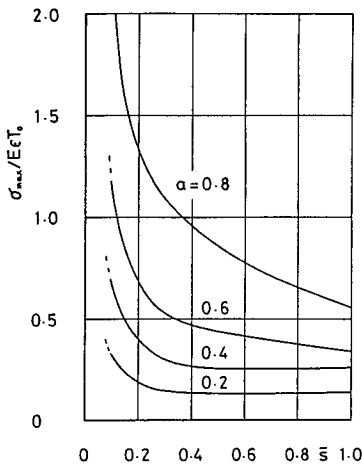


図 6 最大圧縮応力の形状比による変化

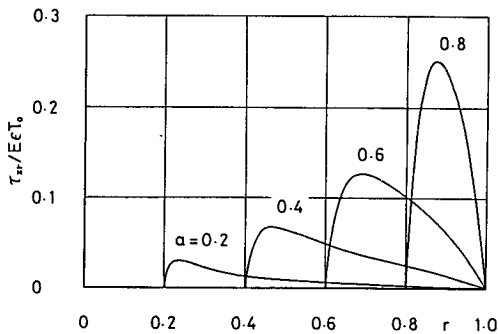


図 7 $z=0$ 面における τ_{zr} の分布 ($\bar{s}=0.5$)

になる。

以上の計算結果より、最大圧縮応力は空か面上の点 A 近傍または点 B に生じる σ_B であることがわかった。そこで、この最大圧縮応力を σ_{max} として、これと形状比 \bar{s} の関係を求めたのが図 6 である。 σ_{max} は空かが比較的大きい場合は、球かの場合が最小であるのに対し、空かが小さい場合は、 $\bar{s}=0.5$ 付近で最小値を示す。これは、最大圧縮応力の生じる位置が点 B から点 A 近傍に移行する際に起こる現象である。 \bar{s} が零に近づくと、空かの大きさにかかわらず、 σ_{max} は無限に大きくなる。

図 7 に $\bar{s}=0.5$ の場合の r 軸上の応力 $(\tau_{zr})_{z=0} = -(\tau_{a\beta})_{\eta=0}$ の分布を示す。 τ_{zr} は空か面および円柱側面

表 1 応力拡大係数

| c | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|
| $K_{II}/K_{II\infty}$ | 1.004 | 1.037 | 1.146 | 1.502 |

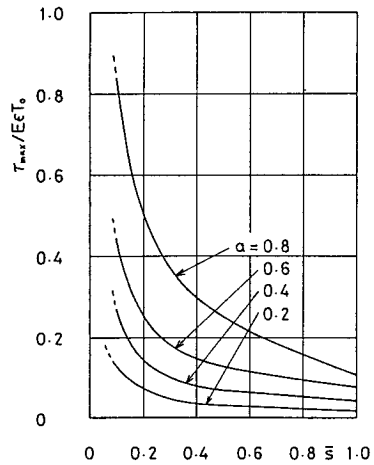


図 8 最大せん断応力の形状比による変化

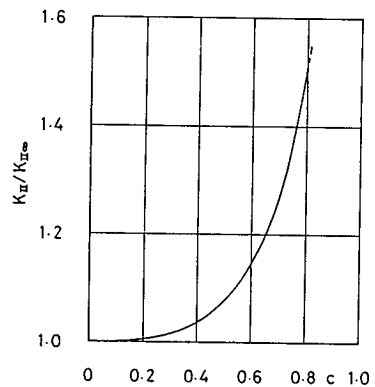


図 9 応力拡大係数

で零であり、せん断応力の最大値は、空か面よりやや離れた位置に生じる。

この最大せん断応力を τ_{\max} として、これと形状比 δ との関係を示したのが図 8 である。 τ_{\max} は球かの場合が最小で、 δ の減少とともに増加し、円形き裂に近づくに従って無限に大きくなる。

最後に、応力拡大係数 K_{II} と円形き裂の半径 c との関係を図 9 および表 1 に示した。 K_{II} は c の増加とともに増加し、 c を零に近づけたときには、無限体の場合の解に近づく。

4. 結 言

1 個のへん平回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する円柱の内部に一定温度こう配の定常熱流が存在する場合の熱応力問題を、三次元熱弾性理論に基づいて厳密に解析する方法を示した。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 最大圧縮応力は空か面上の極点 (点 B) または赤道線上の点 (点 A) 近傍に生じ、空かが大きくなるかまたは空かの形状がへん平化するに従い、その位置は点 A に近づき、その値は大きくなる。

(2) 最大せん断応力は、 r 軸上の点 A 近傍に生じ、その値は球かの場合が最も小さく、形状がへん平

化するにつれ急激に増加し、円形き裂に近づくに従って無限大に向かう。

(3) 応力拡大係数 K_{II} は、円形き裂の半径 c の増加とともに単調に増加し、 c が 1 に近づくにつれ無限に大きくなる。

なお、数値計算には、東京大学大型計算機センターの HITAC M-280 H/200 H を使用した。また、本研究の一部は昭和 58 年度文部省科学研究費の補助により行われたものである。

終わりに、本研究を遂行するに当たってご協力をいただいた (株)小松製作所 石井浩二氏に感謝の意を表す。

文 献

- (1) 渥美, 機論, 31-221 (昭 40), 16.
- (2) 内山・土田, 機論, No. 820-11 (昭 57-10), 94.
- (3) Das, B. R., *Int. J. Eng. Sci.*, 6 (1968), 497; 7 (1969), 667.
- (4) Atsumi, A. and Itou, S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 43-3 (1976), 431.
- (5) 土田・内山, 機論, 45-393, A (昭 54), 455.
- (6) Cooke, J. C., *ZAMM*, 42-7/8 (1962), 305.
- (7) 土田・八重樫, 機論, 48-435, A (昭 57), 1436.
- (8) 例えば, 中原, 応用弾性学, (昭 52), 172, 実教出版.
- (9) Florence, A. L. and Goodier, J. N., *Int. J. Eng. Sci.*, 1 (1963), 533.