日本機械学会論文集(A 編)
51 巻 463 号(昭 60-3)

論文 No. 84-0140 A

ねじ山に集中荷重を受ける直交異方性ねじのねじ谷底における応力分布*

大 滝 英 征**, 石 川 義 雄**

The Stress Distribution at Thread Root of Anisotropic Screw Thread due to a Concentrated Load applied at its Flank

by Hideyuki OTAKI and Yoshio ISHIKAWA

The stress distribution of anisotropic mediums is hardly analyzed because of the difficulties of deriving out the stress function. Therefore, this report deals with the easy method to derive out the stress function of anisotropic mediums by using the stress function of isotropic mediums. By this method, the stress distribution at thread root of anisotropic screw thread due to a concentrated load applied at its flank is analyzed.

Key Words : Complex Stress Function, Anisotropic Mediums, Thread, Sress Distribution, Concentrated Load

1. ま え が き

機械要素を異方性材料により製作し，等方性材料では得られなかった強度，機能を付与する研究が急速に進展してきている．その際，最も重要な課題の一つである応力分布解析については，異方性材の場合の応力関数の誘導がきわめて難しいこともありほとんど行われていない[1]．著者は，すでに，異方性材の場合の応力関数を等方性材料の場合の応力関数を基に誘導する簡易手法を報告[2]したが，本報は，ねじ谷底の応力分布解析に適用したものである．

2. 基 礎 式

既報[2]で述べたように，複素関数を利用すると，x，y 軸に関して直交異方性を有する材料の応力は，

$$\sigma_x+\sigma_y=\sigma_u+\sigma_v=\frac{4}{\dot{z}(w)\dot{\bar{z}}(\bar{w})}\frac{\partial^2 U(w,\bar{w})}{\partial w\partial\bar{w}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=\frac{4}{\dot{z}(w)}\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U(w,\bar{w})}{\partial w}\right]$$

$$\sigma_v-\sigma_u+2i\tau_{uv}=\frac{4}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})}\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U(w,\bar{w})}{\partial w}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

σ_u, σ_v, τ_{uv}：図1に示した応力

$z(w)$：z 平面と w 平面間の写像関数

で求まる．

境界条件は，

$$\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U(w,\bar{w})}{\partial w}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}=\frac{\bar{P}_0}{2}i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

P_0：境界上 I から II までの間に作用する外力の総和 ($P_0=P_x+iP_y$)

で表される．

さて，ここで直交異方性材に関する応力関数 $U(w,\bar{w})$ は

$$U(w,\bar{w})=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}U_{ij}(w,\bar{w})\alpha_1^i\alpha_2^j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

α_1, α_2

$$=\sqrt{\frac{E_x/G_{xy}-2\nu_x\pm\sqrt{(E_x/G_{xy}-2\nu_x)^2-4E_x/E_y}}{2}}-1$$

で表示され

$$U_{00}(w,\bar{w})=\mathrm{Re}[\varphi_{000}(w)+\bar{z}(\bar{w})\varphi_{001}(w)] \cdots(5)$$

$$U_{10}(w,\bar{w})=U_{01}(w,\bar{w})$$

$$=\mathrm{Re}\left[\varphi_{100}(w)+\bar{z}(\bar{w})\varphi_{101}(w)-\frac{1}{4}\frac{\bar{z}(\bar{w})^2}{\dot{z}(w)}\dot{\varphi}_{001}(w)\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

---

* 昭和59年11月29日 第929回講演会において講演，原稿受付 昭和59年4月20日．

** 正員，埼玉大学工学部（〠338 浦和市下大久保255）．

$$U_{20}(w,\bar{w})=U_{02}(w,\bar{w})$$
$$=\mathrm{Re}\Big\{\varphi_{200}(w)+\bar{z}(\bar{w})\varphi_{201}(w)$$
$$+\frac{\bar{z}(\bar{w})^2}{\dot{z}(w)}\Big[\frac{1}{8}\dot{\varphi}_{001}(w)-\frac{1}{4}\dot{\varphi}_{101}(w)\Big]$$
$$+\frac{\bar{z}(\bar{w})^3}{24}\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^3}\Big\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$U_{11}(w,\bar{w})=\mathrm{Re}\Big\{\varphi_{110}(w)+\bar{z}(\bar{w})\varphi_{111}(w)+\bar{z}(\bar{w})^2$$
$$\times\Big[-\frac{1}{2}\frac{\dot{\varphi}_{101}(w)}{\dot{z}(w)}-\frac{1}{8}$$
$$\times\frac{\ddot{\varphi}_{000}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{000}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^3}\Big]$$
$$+\frac{\bar{z}(\bar{w})^3}{24}\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^3}\Big\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ただし，$\cdot=\partial/\partial w$

の関係を有する．$U_{00}(w,\bar{w})$は等方性材料の場合の応力関数と同様であり，すでに多くの対象について解が求まっているのでそれを準用すればよい．$U_{10}(w,\bar{w})$は，$U_{00}(w,\bar{w})$を基に境界条件を満足するような関数形を選び求める．$U_{20}(w,\bar{w})$も同様，境界条件を満足する関数形のものを$U_{00}(w,\bar{w})$, $U_{10}(w,\bar{w})$を基にして求める．このような操作を順次繰返せば，結局直交異方性材の応力関数が決定されることとなる．

3. 直交異方性ねじのねじ谷底における応力分布

z平面の境界Cをw平面の直線境界$(\zeta=u_0+iv)$に，z平面の領域Dをw平面のΔ領域に写像する関数として

$$z(w)=w-\frac{m\pi}{b}\coth\frac{w+a}{b}\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

a, b, m：定数

を選ぶ．$z(w)$の画く曲線は，実際のねじ軸断面形状を近似し，bはピッチ距離と一致する．

さて，等方性材料の場合の応力関数は，すでに著者が求めており，$U_{00}(w,\bar{w})$は，それを準用しうる．すなわち

$$\varphi_{001}(w)=\frac{1}{4\pi}[-P\ln(w-w_0)+A(w+a)^{-1}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\dot{\varphi}_{000}(w)=\frac{1}{4\pi}\Big[-P\frac{1}{w-w_0}-\frac{A}{(w+a)^2}\Big]$$
$$\times\Big[2u_0-w-\frac{m\pi}{b}\coth\frac{2u_0+a-w}{b}\pi\Big]$$
$$-\frac{1}{4\pi}[-\bar{P}\ln(w-w_0)+\bar{A}(2u_0+a-w)^{-1}]$$
$$\times\Big[1+m\Big(\frac{\pi}{b}\Big)^2\sinh^{-2}\frac{w+a}{b}\pi\Big] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

ただし，

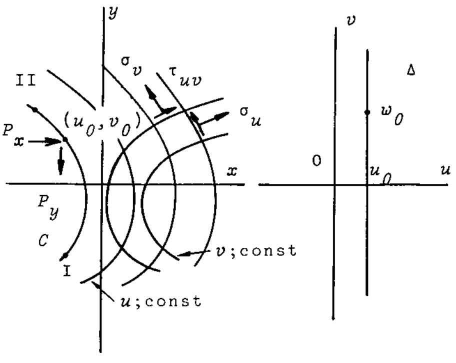
$$A=\frac{m\pi d_0}{b}\frac{\frac{m\pi}{b}d_0\bar{b}_0P-\Big[1+m\Big(\frac{\pi}{b}\Big)^2c_0\Big]b_0\bar{P}}{\Big[1+m\Big(\frac{\pi}{b}\Big)^2c_0\Big]^2-\Big(\frac{m\pi}{b}d_0h_0\Big)^2}$$

ここで，d_0, b_0, c_0などの値は，$\dot{\varphi}_{000}(w)$が領域Δ内で特異点$w=2u_0+a$を有するので，式(11)中の各項を特異点まわりに級数展開し特異点を除去する際に得られる係数である．

すなわち

$$\frac{1}{w-w_0}=\sum_{q=0}^{\infty}b_q(w-2u_0-a)^q,$$
$$b_q=(-1)^q(2u_0+a-w_0)^{-q-1}$$
$$\sinh^{-2}\frac{w+a}{b}\pi=\sum_{q=0}^{\infty}c_q(w-2u_0-a)^q$$
$$c_0=\sinh^{-2}\frac{2(u_0+a)}{b}\pi$$
$$c_1=-\frac{2\pi}{b}\cosh\frac{2(u_0+a)}{b}\pi\,\sinh^{-3}\frac{2(u_0+a)}{b}\pi$$
$$\coth\frac{2u_0+a-w}{b}\pi=\sum_{q=0}^{\infty}d_q(w-2u_0-a)^{q-1},$$
$$d_0=-\frac{b}{\pi},\quad d_1=0$$
$$\frac{1}{(w+a)^2}=\sum_{q=0}^{\infty}h_q(w-2u_0-a)^q,$$
$$h_0=\frac{1}{(2u_0+a-w)^2}$$

次に，$U_{10}(w,\bar{w})$, $U_{20}(w,\bar{w})$などは$U_{00}(w,\bar{w})$を式(7)に代入したうえで，境界条件を満足させうる形に$\varphi_{101}(w)$, $\varphi_{100}(w)$などを選定し，順次決定する．いま，Neuberが等方性材料の場合に採っている手法[3]と同様，境界条件式を勘案し，まず$\partial U_{10}(w,\bar{w})/\partial w$を求めると，



(a) z平面　　(b) w平面

図 1　z平面とw平面との変換

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_{10}(w,\bar{w})}{\partial w} &= \dot{\varphi}_{100}(w)+\bar{z}(\bar{w})\dot{\varphi}_{101}(w)+\dot{z}(w)\tilde{\varphi}_{101}(\bar{w}) \\
&-\frac{1}{4}\bar{z}(\bar{w})^2\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2} \\
&-\frac{1}{2}z(w)\dot{z}(w)\frac{\dot{\overline{\varphi_{001}}}(\bar{w})}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})} \quad\cdots\cdots(12)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\varphi_{101}(w)=-\frac{1}{4\pi}\ln(w-w_0)+\frac{B}{w+a}+\frac{C}{(w+a)^2}-\frac{1}{2}z(w)\frac{\dot{\varphi}_{001}(w)}{\dot{z}(w)} \quad\cdots\cdots(13)
$$

とする．式(13)の右辺第３項は，式(10)を勘案したうえで選定した項であり，第４項は無限遠点で応力が零に収束するように選定した項である．

いま，境界 $u=u_0(\bar{\zeta}=2u_0-\zeta)$ にて

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U_{10}(w,\bar{w})}{\partial w}\bigg|_{w=s}=\mu \\
&\mu=\frac{\bar{P}}{4\pi}\ln(-1)
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(14)
$$

を満足するものとして，式(12)を整理すると

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{100}(w) &= -\left(2u_0-w-\frac{m\pi}{b}\coth\frac{2u_0+a-w}{b}\pi\right)\left\{-\frac{P}{4\pi}\frac{1}{w-w_0}-\frac{B}{(w+a)^2}-\frac{2C}{(w+a)^3}\right. \\
&\left.-\frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}_{001}(w)+z(w)\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}\right]\right\} \\
&-\dot{z}(w)\left\{-\frac{\bar{P}}{4\pi}\ln(w-w_0)+\frac{\bar{B}}{2u_0+a-w}+\frac{\bar{C}}{(2u_0+a-w)^2}+\frac{1}{8\pi}\right. \\
&\left.\times\left(2u_0-w-\frac{m\pi}{b}\coth\frac{2u_0+a-w}{2}\pi\right)\left[\frac{\bar{P}}{w_0-w}+\frac{\bar{A}}{(2u_0+a-w)^2}\right]\Big/\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\sinh^{-2}\frac{2u_0+a-w}{b}\pi\right]\right\} \\
&+\frac{1}{4}\left(2u_0-w-\frac{m\pi}{b}\coth\frac{2u_0+a-w}{b}\pi\right)^2\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2} \\
&-\frac{1}{8\pi}z(w)\dot{z}(w)\left[\frac{\bar{P}}{w_0-w}+\frac{\bar{A}}{(2u_0+a-w)^2}\right]\Big/\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\sinh^{-2}\frac{2u_0+a-w}{b}\pi\right] \quad\cdots\cdots(15)
\end{aligned}
$$

$\dot{\varphi}_{100}(w)$ は，領域 $\varDelta$ 内で特異点を有してはならぬが，式(15)は $w=2u_0+a$ にて特異点を有する．そこで，これを除去するため，まず $\dot{\varphi}_{100}(w)$ に含まれる各項を特異点まわりにローラン級数展開し

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{(w+a)^3}=\sum_{q=0}^{\infty}l_q(w-2u_0-a)^q, \quad l_0=\frac{1}{[2(u_0+a)]^3}, \quad l_1=-\frac{3}{[2(u_0+a)]^4} \\
&\coth^2\frac{2u_0+a-w}{b}\pi=\sum_{q=0}^{\infty}s_q(w-2u_0-a)^{q-2}, \quad s_0=\left(\frac{b}{\pi}\right)^2, \quad s_1=0, \quad s_2=\frac{1}{3} \\
&\frac{1}{(w-w_0)^2}=\sum_{q=0}^{\infty}i_q(w-2u_0-a)^q, \quad i_0=\frac{1}{(2u_0+a-w)^2}, \quad i_1=-\frac{2}{(2u_0+a-w)^3} \\
&\coth\frac{w+a}{b}\pi=\sum_{q=0}^{\infty}g_q(w-2u_0-a)^q, \quad g_0=\coth\frac{2(u_0+a)}{b}\pi, \quad g_1=-\frac{\pi}{b}\sinh^{-2}\frac{2(u_0+a)}{b}\pi \\
&\dot{\varphi}_{001}(w)+z(w)\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}=\sum_{q=0}^{\infty}f_{aq}(w-2u_0-a)^q \\
&f_{aq}=\frac{1}{q\,!}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}w^q}\left[\dot{\varphi}_{001}(w)+z(w)\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}\right]\bigg|_{w=2u_0+a} \\
&\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\bar{P}}{w_0-w}-\frac{\bar{A}}{(2u_0+a-w)^2}\right]\Big/\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\sinh^{-2}\frac{2u_0+a-w}{b}\pi\right]=\sum_{q=0}^{\infty}q_q(w-2u_0-a)^q \\
&q_0=-\frac{1}{4\pi}\frac{\bar{A}}{m} \\
&\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\sinh^{-2}\frac{w+a}{b}\pi\right]^{-2}=\sum_{q=0}^{\infty}t_q(w-2U_0-a)^q, \quad t_0=\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\sinh^{-2}\frac{2(u_0+a)}{b}\pi\right]^{-2}
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(16)
$$

を得る．式(16)を式(15)に代入し，特異点を有する項を選び出すと

$(w-2u_0-a)^{-1}$ の項より，

$$-\frac{m\pi}{b}d_0\left(-\frac{P}{4\pi}b_0-Bh_0-2Cl_0-\frac{1}{2}f_{00}\right)-\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\left(\bar{B}-\frac{q_0}{2}\frac{m\pi d_0}{b}\right)+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_1\bar{C}$$
$$-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2s_0\left[t_1\left\{(Pi_0+2Al_0)\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]-2m\left(\frac{\pi}{b}\right)^3c_0g_0(Pb_0+Ah_0)\right\}\right.$$
$$+t_0\left\{(Pi_1+2Al_1)\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]+(Pi_0+2Al_0)m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_1-2m\left(\frac{\pi}{b}\right)^3C_0g_0(Pb_1+Ah_1)\right.$$
$$\left.\left.-2m\left(\frac{\pi}{b}\right)^3(c_0g_1+c_1g_0)(Pb_0+Ah_0)\right\}\right]-\frac{1}{8\pi}\frac{am\pi d_0t_0}{b}\left\{(Pi_0+2Al_0)\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\right.$$
$$\left.-2m\left(\frac{\pi}{b}\right)^3c_0g_0(Pb_0+Ah_0)\right\}-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2s_1t_0\left\{(Pi_0+2Al_0)\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\right.$$
$$\left.-2m\left(\frac{\pi}{b}\right)^3c_0g_0(Pb_0+Ah_0)\right\}=0 \quad\cdots\cdots(17)$$

$(w-2u_0-a)^{-2}$ の項より，

$$\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\bar{C}-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2s_0t_0\left\{(Pi_0+2Al_0)\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\right.$$
$$\left.-2m\left(\frac{\pi}{b}\right)^3c_0g_0(Pb_0+Ah_0)\right\}=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

上記2式より未知係数 B, C が求まり，式(6)にて応力関数 $U_{10}(w,\bar{w})$ が決定されることとなる．

さてここで，式(6)を境界条件式(3)に代入し，かつ I，II を自由境界上の任意点にとると，確かに

$$\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U_{10}(w,\bar{w})}{\partial w}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}=0$$

となる．荷重点を領域に I，II をとると

$$\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U_{10}(w,\bar{w})}{\partial w}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}=\left[\frac{\bar{P}}{4\pi}\ln\frac{\bar{w}-\bar{w}_0}{w-w_0}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}=\frac{\bar{P}}{4\pi}\left[\ln\frac{1-i(v-v_0)/(u-u_0)}{1+i(v-v_0)/(u-u_0)}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}\Bigg|_{u=u_0}$$

となるが，ここで関数論で周知の

$$\ln\frac{1-i(v-v_0)/(u-u_0)}{1+i(v-v_0)/(u-u_0)}=-2i\,\mathrm{arct}_g\left|\frac{v-v_0}{u-u_0}\right| \quad\cdots\cdots(19)$$

なる関係を利用し，かつ $u=u_0$ を加味すると

$$\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U_{10}(w,\bar{w})}{\partial w}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}=\frac{\bar{P}}{2}i \quad\cdots\cdots(20)$$

となり，境界条件を満足する式形が得られる．P と P_0 との関係は後述する．

さてここで，式(1)，(2)より応力分布を求める．その際 $\sigma_u, \sigma_v, \tau_{uv}$ は $w\to\infty$ にて零に収束せねばならぬから

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{4}{\dot{z}(w)\dot{\bar{z}}(\bar{w})}\dfrac{\partial^2U_{10}(w,\bar{w})}{\partial w\partial w}\Bigg|_{w\to\infty}=0 & \cdots\cdots(21)\\[2ex] \dfrac{4}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})}\dfrac{\partial}{\partial w}\left[\dfrac{1}{\dot{z}(w)}\dfrac{\partial U_{10}(w,\bar{w})}{\partial w}\right]\Bigg|_{w\to\infty}=0 & \cdots\cdots(22)\end{array}\right.$$

でなくてはならぬ．ちなみに

$$\frac{4}{\dot{z}(w)\dot{\bar{z}}(\bar{w})}\frac{\partial^2U_{10}(w,\bar{w})}{\partial w\partial\bar{w}}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\dot{z}(w)}\left[-\frac{P}{4\pi}\frac{1}{w-w_0}-\frac{B}{(w+a)^2}-\frac{2C}{(w+a)^3}-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_{001}(w)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}[z(w)+\bar{z}(\bar{w})]\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^3}\right\} \quad\cdots\cdots(23)$$

ただし，$\dot{\varphi}_{001}(w)=\dfrac{1}{4\pi}\left[-\dfrac{P}{w-w_0}-\dfrac{A}{(w+a)^2}\right]$

$$\ddot{\varphi}_{001}(w)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{P}{(w-w_0)^2}+\frac{2A}{(w+a)^3}\right]$$

となり，$w\to\infty$ を考慮すると式(23)は零に収束する．同様にして式(22)も成り立つ．

次に同様にして，$U_{20}(w,\bar{w})$ を求める．式(7)より，境界条件式を勘案して $\partial U_{20}(w,\bar{w})/\partial w$ を求めると，

$$\frac{\partial U_{20}(w,\bar{w})}{\partial w}=\dot{\varphi}_{200}(w)+\bar{z}(\bar{w})\dot{\varphi}_{201}(w)+\dot{z}(w)\bar{\varphi}_{201}(\bar{w})-\frac{\bar{z}(\bar{w})^2}{4}\frac{\ddot{\varphi}_{101}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{101}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}$$
$$-\frac{\dot{z}(w)z(w)}{2}\frac{\dot{\bar{\varphi}}_{101}(\bar{w})}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})}+\frac{\bar{z}(\bar{w})^2}{8}\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}+\frac{\dot{z}(w)z(w)}{4}\frac{\dot{\bar{\varphi}}_{001}(\bar{w})}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})}$$
$$+\frac{1}{24}\frac{[\dddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\dddot{z}(w)]\dot{z}(w)-3[\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)]\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^4}$$
$$+\frac{z(w)^2\dot{z}(w)}{8}\frac{\ddot{\bar{\varphi}}_{001}(\bar{w})\dot{\bar{z}}(\bar{w})-\dot{\bar{\varphi}}_{001}(\bar{w})\ddot{\bar{z}}(\bar{w})}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})^3} \quad\cdots\cdots(24)$$

ここで, $\varphi_{101}(w)$, $\varphi_{001}(w)$ を勘案したうえで

$$\varphi_{201}(w)=-\frac{P}{4\pi}\ln(w-w_0)+\frac{D}{w+a}+\frac{E}{(w+a)^2}+\frac{F}{(w+a)^3}-\frac{1}{2}z(w)\frac{\dot{\varphi}_{101}(w)}{\dot{z}(w)}$$
$$+\frac{1}{4}z(w)\frac{\dot{\varphi}_{001}(w)}{\dot{z}(w)}-\frac{1}{8}z(w)^2\frac{\ddot{\varphi}_{001}\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^3} \quad\cdots\cdots(25)$$

とし, さらに境界 ζ にて

$$\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U_{20}(w,\bar{w})}{\partial w}\bigg|_{w=\zeta}=\mu,\quad \mu=\frac{\bar{P}}{4\pi}\ln(-1) \quad\cdots\cdots(26)$$

を満足するものとしたうえで, 式(24)を $\dot{\varphi}_{200}(w)$ にて整理する. すると, $\dot{\varphi}_{200}(w)$ は $\dot{\varphi}_{100}(w)$ の場合と同様, 領域 Δ 内の $w=2u_0+a$ にて特異点を有するので, これを除去する必要性がある. そこで, $\dot{\varphi}_{200}(w)$ に含まれる各項を特異点まわりに級数展開すると

$$\frac{\ddot{\varphi}_{101}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{101}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}=\sum_{q=0}^{\infty}a_{aq}(w-2u_0-a)^q$$
$$a_{aq}=\frac{1}{q!}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}w^q}\left[\frac{\ddot{\varphi}_{101}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{101}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}\right]\bigg|_{w=2u_0+a}$$
$$\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}=\sum_{q=0}^{\infty}b_{aq}(w-2u_0-a)^q$$
$$b_{aq}=\frac{1}{q!}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}w^q}\left[\frac{\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}\right]\bigg|_{w=2u_0+a}$$
$$\frac{[\dddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\dddot{z}(w)]\dot{z}(w)-3[\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)]}{\dot{z}(w)^4}$$
$$=\sum_{q=0}^{\infty}c_{aq}(w-2u_0-a)^q$$
$$c_{aq}=\frac{1}{q!}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}w^q}\left\{\frac{[\dot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dddot{\varphi}_{001}(w)\dddot{z}(w)]\dot{z}(w)-3[\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)]}{\dot{z}(w)^4}\right\}\bigg|_{w=2u_0+a}$$
$$\bar{z}(\bar{w})\frac{\dot{\bar{\varphi}}_{101}(\bar{w})}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})}=\sum_{q=0}^{\infty}d_{aq}(w-2u_0-a)^{q-2}$$
$$d_{a0}=2\bar{C},\quad d_{a1}=\bar{B}-\bar{A}/8\pi$$
$$\frac{\dot{\bar{\varphi}}_{101}(\bar{w})}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})}=\sum_{q=0}^{\infty}e_{aq}(w-2u_0-a)^{q-1}$$
$$e_{a0}=2\bar{C}/m$$
$$\bar{z}(\bar{w})^2\frac{\ddot{\bar{\varphi}}_{001}(\bar{w})\dot{\bar{z}}(w)-\dot{\bar{\varphi}}_{001}(\bar{w})\ddot{\bar{z}}(\bar{w})}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})^3}=\sum_{q=0}^{\infty}g_{aq}(w-2u_0-a)^{q-1}$$
$$g_{a0}=0$$
$$\bar{z}(\bar{w})\frac{\dot{\bar{\varphi}}_{001}(\bar{w})}{\bar{z}(\bar{w})}=\sum_{q=0}^{\infty}h_{aq}(w-2u_0-a)^{q-1}$$
$$h_{a0}=-\bar{A}/4\pi$$
$$-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_{101}(w)+\frac{1}{4}\dot{\varphi}_{001}(w)-\frac{1}{2}z(w)\frac{\ddot{\varphi}_{101}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{101}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}$$
$$-\frac{1}{8}z(w)^2\frac{[\dddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)z(w)]\dot{z}(w)-3[\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)]\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^4}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{q=0}^{\infty} l_{aq}(w-2u_0-a)^q \\
&l_{aq}=\frac{1}{q!}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}w^q}\left\{-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_{101}(w)+\frac{1}{4}\dot{\varphi}_{001}(w)-\frac{z(w)}{2}\frac{\ddot{\varphi}_{101}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{101}(w)\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^2}\right. \\
&\left.\quad-\frac{z(w)^2}{8}\frac{[\varphi_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\dddot{z}(w)]\dot{z}(w)-3[\ddot{\varphi}_{001}(w)\dot{z}(w)-\dot{\varphi}_{001}(w)\ddot{z}(w)]\ddot{z}(w)}{\dot{z}(w)^4}\right\}\Bigg|_{w=2u_0+a} \\
&\coth^3\frac{2u_0+a-w}{b}=\sum_{q=0}^{\infty} v_{aq}(w-2u_0-a)^{q-3} \\
&\qquad v_{a0}=(-b/\pi)^3,\quad v_{a1}=0,\quad v_{a2}=-b\pi/2!
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(27)
$$

となる．いま式(27)を式(24)に代入，$\dot{\varphi}_{200}(w)$について整理したうえで特異点を有する項を選び出すと，$(w-2u_0-a)^{-1}$の項より，

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{m\pi}{b}d_0\left(-\frac{P}{4\pi}b_0-Dh_0-2El_0-3Fm_0+l_{a0}\right)+\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\left(-\bar{D}+\frac{1}{4}h_{a0}-\frac{1}{2}d_{a0}-\frac{1}{8}g_{a0}\right) \\
&+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_1\bar{E}-m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_2\bar{F}-\frac{1}{2}d_{a0}m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_1-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2(s_0a_{a1}+s_1a_{a0})+\frac{2m\pi}{b}ad_0a_{a0}\right] \\
&-\frac{1}{2}\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\left(2u_0+a-\frac{m\pi}{b}g_0\right)e_{a0}+\frac{1}{8}\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2(s_0b_{a1}+s_1b_{a0})+\frac{2m\pi}{b}ad_0b_{a0}\right] \\
&+\frac{1}{24}\left[-3a^2\frac{m\pi}{b}d_0c_{a0}-3a\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2s_0c_{a1}-3a\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2s_1c_{a0}-3\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2s_0c_{a0}\right. \\
&\left.-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^3(v_{a0}c_{a2}+v_{a1}c_{a1}+v_{a2}c_{a0})\right]=0 \\
&(w-2u_0-a)^{-2}\text{ の項より，} \\
&\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\left(\bar{E}-\frac{1}{2}d_{a0}\right)-m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_1\bar{F}-\frac{1}{4}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2s_0a_{a0} \\
&+\frac{1}{8}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2s_0b_{a0}+\frac{1}{24}\left[-3\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2as_0c_{a0}-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^3(v_{a1}c_{a0}+v_{a0}c_{a1})\right]=0 \\
&(w-2u_0-a)^{-3}\text{ の項より，} \\
&-\left[1+m\left(\frac{\pi}{b}\right)^2c_0\right]\bar{F}-\frac{1}{24}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^3v_{a0}c_{a0}=0
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots(28)
$$

以上の連立一次方程式を解けば未知係数 D, E, F がすべて求まり，式(7)より $U_{20}(w,\bar{w})$ が決定されることとなる．

ここで，境界条件式(3)にて，I，IIを自由境界上の任意点に選ぶと，確かに

$$\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U_{20}(w,\bar{w})}{\partial w}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}=0$$

となり，また荷重点を含む領域に選ぶと，

$$\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U_{20}(w,\bar{w})}{\partial w}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}=\left[\frac{\bar{P}}{4\pi}\ln\frac{\bar{w}-\bar{w}_0}{w-w_0}\right]_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}=\frac{\bar{P}}{2}i \qquad\cdots\cdots(29)$$

となり境界条件を満足する式形となる．

次に，$U_{20}(w,\bar{w})$ にて計算される応力の無限遠点における値を $U_{10}(w,\bar{w})$ の場合と同様にして検討してみると確かに

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{4}{\dot{z}(w)\dot{\bar{z}}(\bar{w})}\frac{\partial^2U_{20}(w,\bar{w})}{\partial w\partial\bar{w}}\Bigg|_{w\to\infty}=0 \\
&\frac{4}{\dot{\bar{z}}(\bar{w})}\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{\dot{z}(w)}\frac{\partial U_{20}(w,\bar{w})}{\partial w}\right]\Bigg|_{w\to\infty}=0
\end{aligned}
\right.
$$

を満足し，無限遠点にて応力が零に収束するという条件を満足している．

以上より，$U_{20}(w,\bar{w})$ も適合条件式，境界条件式を満足することがわかる．$U_{02}(w,\bar{w})$ に関しても全く同様にして求まり $U_{02}(w,\bar{w})=U_{20}(w,\bar{w})$ の関係がある．

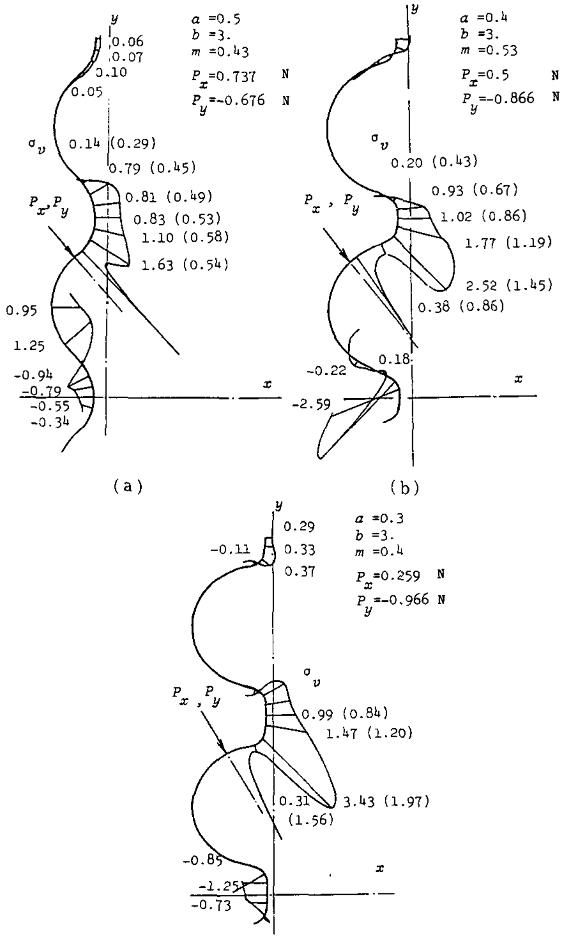
さて，ここで P と P_0 との関係について述べておく．いま仮に，$U_{00}(w,\bar{w})$, $U_{10}(w,\bar{w})$, $U_{01}(w,\bar{w})$, $U_{20}(w,\bar{w})$, $U_{02}(w,\bar{w})$ までの項を取って応力解析する場合は，境界条件式(3)，(20)，(29)を考慮すると

$$P=P_0/(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1^2+\alpha_2^2)$$

なる関係を有することがわかる．

以上のようにして，順次 $U_{ij}(w,\bar{w})$ を求めていけば，直交異方性材の場合の応力関数が式(4)により決定されることとなる．直交異方性材では，一般に $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|<1$ となるので $\alpha_1^i\alpha_2^j$ の値を加味すると，あまり多くの項まで取らなくても近似的には応力分布を求めうると考えられる．

図2，3は，一例として $U_{00}(w,\bar{w})\sim U_{02}(w,\bar{w})$ の

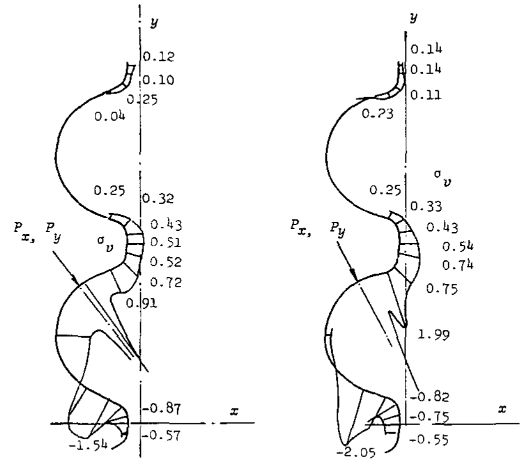


(c)

( )内：等方性材の場合

図 2　ねじ谷底の応力分布 $\sigma v(E_x=10$ GPa, $E_y=40$ GPa, $G_{xy}=8$ GPa, $\nu_x=0.075)$

項を取って計算した各種ねじ谷底における応力分布を示したものである．図2，3より，x, y 軸方向の剛性によりねじ谷底に生じる応力分布が異なり，ねじ谷底の



(a)　　　　(b)

図 3　ねじ谷底の応力分布 σ_v MPa ($Ex=40$ GPa, $E_y=10$ GPa, $G_{xy}=8$ GPa, $\nu_x=0.3$)

丸み半径が比較的大きい範囲では，x 軸方向の剛性が高い場合のほうが発生する最大応力は小さくなるようである．また，いずれの場合も，等方性の場合に比し最大応力は小さくなる．以上のように，本手法によれば，材料の剛性，ねじの幾何学的形状等の応力分布へ及ぼす影響の把握が容易となる．

4．む　す　び

本報では，直交異方性ねじの応力関数を誘導した．この応力関数を利用すれば，繊維強化複合材料製ねじのねじ谷底における応力分布も把握できることとなり，繊維配列などの最適化に資することとなる．

文　　献

(1)　佐藤，直交異方性体問題の新解法，(昭 49)，90，現代工学社．
(2)　大滝，北陸信越支部講演会，No. 847-1 (昭 59-9)，28．
(3)　Neuber, H., *Z. Angew. Math. Mech.*, 44-7 (1964), 285.

討　　論

〔質問〕　田 中 道 彦〔信州大学工学部〕

ねじの応力解析の分野で，貴重な研究を数多くなさっておられることに敬意を表する．

(1)　U_{00} をもとに U_{ij} を算出していく方法は，等方性材料での解からの摂動量を補正するように逐次 U_{ij} を求めていくものと思われる．図2の応力分布をみると，等方性解との差のかなり大きい部分もあるが，U_{02}, U_{20} で打切っても良好か．

(2)　U_{00}～U_{02} までの結果を紹介してあるが，α_1, α_2 から考えて，U_{02}, U_{20} と U_{11} は同程度のレベルではないかとも思われるが，U_{11} の影響は小さいと考えるか．

(3)　荷重 (P_x, P_y) の作用点付近では応力が乱れ，このことは図2，3でも明らかになっている．実際のねじ山接触面はねじ谷底近くまで広がっているが，外力分布の程度は谷底応力に影響を及ぼすと考えられる

か.

〔回答〕 (1) 本解析では，i, j の項数が多くなると，応力関数 U_{ij} の誘導も繁雑となり難しくなる．しかし，幸いにも本写像関数で与えられる形状では，U_{00}, U_{10}, U_{20} の値のオーダは同程度である一方，$\alpha_1^i\alpha_2^j$ の値が i, j の項数の増加とともに極めて小さくなる．それゆえ，$i+j\simeq 2$ 程度まで取れば近似的に応力分布は求め得ると考えたわけである．しかし，これも写像関数により与えられる形状によっては，さらに項数を増す必要性があるものと考える．

(2) ご指摘のように本写像関数で与えられる形状に対しての $U_{ij(i,j=0\sim 2)}$ の値は同程度内レベルにある．

一方，α_1, α_2 の値は，材料の異方性の程度によって異なり，G_{xy}, ν_x 等が同じ材料については，E_x/E_y の値が 1 に近いほど，その差が小さくなる．したがって E_x/E_y の値が 1 に近い材料では，$\alpha_1^0\alpha_2^l$, $\alpha_1^2\alpha_2^0$ の値と $\alpha_1^1\alpha_2^1$ の値とがほぼ同じオーダとなる．このことより E_x/E_y の値が 1 に近い材料では U_{11}，あるいは，さらに $U_{ij(i+j>2)}$ をも考慮しなくてはならない．しかし，当節ねじ継手の対象となっている繊維強化材料等では E_x/E_y の値が 1 より離れている場合が多く，$\alpha_1^1\alpha_2^1$ のオーダは $\alpha_1^2\alpha_2^0$ 等に比し小さくなる．したがって U_{11} の影響は小さくなると考えられる．

このように，異方性の状況によっては，取るべき項数を多くする必要があり，それによって応力関数の誘導も難しくなるのが本手法の欠点でもある．しかし，従来，直交異方性材の応力分布については，理論的にも把握するすべがなかったことを考慮すると，概略値といえど解析できることは，当該分野に資すると考えている．

(3) 実際のねじでは，フランク面に沿って分布荷重が作用するが，ここでは，有効径に相当する点に集中荷重として作用させた．したがって，有効径近傍では，集中荷重による影響が現れているが（弾性学の諸問題でも荷重集中点は特異点となり，応力無限大となる），谷底では，その影響は少なくなり，最大応力の値等の評価に差支えない．これは，等方性の場合の理論的扱い，光弾性実験による扱いにも共通している．しかし，ご指摘のように，ねじ結合の状態によっては，荷重点が，ねじ谷底近くなったりねじ山先端近くなっりすることもある．このうち，荷重点が，ねじ谷底近くになると，荷重点近傍の応力の乱れの影響が谷底の応力分布に影響を及ぼし，分底の応力分布を正確には評価し得なくなる．