

有限波列ぜん動流路内流れの数値解析*
(第3報, べき乗則非ニュートン流体の場合)

川橋正昭**, 諏訪透***, 鈴木允**

A Numerical Analysis of Peristaltic Pumping with a Finite Wave Train
(3rd Report, Peristaltic Motion of Power Law Fluid)

Masaaki KAWAHASHI, Tohru SUWA, and Makoto SUZUKI

The numerical method based on the algorithm of the highly simplified MAC method presented in former reports is applied to the peristaltic motion of power law fluid. The calculation model is a two-dimensional pumping duct of a finite train of peristaltic waves, and unsteady peristaltic motions of power law fluid are calculated in a fixed frame. Calculation is stable over a wide range of exponents and Reynolds numbers. Calculated results of pumping characteristics in the case of small amplitude and long waves are compared with the experimental results of a 1% aqueous solution of CMCNa in a quasi-two-dimensional duct.

Key Words: Fluid Transportation System, Numerical Analysis, Peristaltic Pumping, MAC Method, Power Law Fluid

1. 結 言

生理学的興味から始まったぜん動流路内流れの解析は、特殊流体の輸送などの工学的応用の問題へとその範囲を広げつつある。流れの解析には、摂動法⁽¹⁾、差分法⁽²⁾⁽³⁾、有限要素法⁽⁴⁾などが用いられており、その多くはニュートン流体を対象としている。一方、生体内でのぜん動運動により輸送される血液や腸内容物は擬塑性流体としてふるまうことが知られており、ポンプとして利用する場合の輸送対象も、非ニュートン流体であることが多い。しかし、非ニュートン流体についての解析例は、小振幅、低レイノルズ数状態における粘弾性流体⁽⁵⁾、極性流体⁽⁶⁾、べき乗則流体などの摂動法による解析⁽⁷⁾や、長波長、低レイノルズ数でのストークス近似によるべき乗則流体についての解析⁽⁸⁾などに限られている。これらはいずれも慣性力が無視できるレイノルズ数範囲での、無限波列を仮定した定常流解析である。しかし、生体内の流れであっても必ずしも慣性力が無視できるとは限らず、輸送用機器ではさらにその影響が顕著である。

著者らは従来より、流路入口および出口の影響を考慮した有限波列二次元ぜん動流路について、粘性力および慣性力がともに無視できないレイノルズ数範囲での非定常流数値解析を試みてきた⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。本報では、前報までの解析に用いられてきた方法を拡張し、非ニュートン流体の有限波列ぜん動流路内非定常流解析を試みる。はじめに解析対象とする流体は、べき乗則モデルの非ニュートン粘性流体とし、解の安定性や物性値による流動状態の変化などを示す。また、実際の例としてカルボキシメチルセルロースナトリウム(CMCNa)の水溶液を用いて調べたポンプ特性の実験結果と、計算結果とを比較検討する。

2. 解 析 方 法

非ニュートン粘性流体のべき乗則モデル構成方程式は、

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu^* \theta D_{ij} \dots\dots\dots (1)$$

である。ここで、 T_{ij} は応力テンソル、 p は圧力、 δ_{ij} は単位テンソル、 μ^* は係数、 D_{ij} は変形テンソルであり、

$$\theta = \left| \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} \right|^{(n-1)/2} \dots\dots\dots (2)$$

である。ここで $n=1$ でニュートン流体となり、 $n>1$,

* 昭和61年8月19日 第937回講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月15日。

** 正員、埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255)。

*** 准員、川崎重工業(株) (〒136 東京都江東区南砂 2-4-25)。

$n < 1$ のとき, それぞれダイラタント流体, 擬塑性流体と呼ばれる. 生体内の血液や胃腸管内消化物は, 擬塑性流体として振るまうことが知られており, 本報では, $n < 1$ について計算を行う.

二次元流れでは, 式(2)は,

$$\theta = \left| \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right|^{(n-1)/2} \dots \dots \dots (3)$$

となる. このような応力項を考慮した x および y 方向の運動方程式の無次元化表示は,

$$\left[\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial(UV)}{\partial Y} \right] R_e^* = \frac{\partial P}{\partial X} + aac \left[\frac{2}{c\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial X} \left(\Theta \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\lambda}{ca} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \Theta \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} \right] \dots (4)$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial V^2}{\partial Y} \right] R_e^* = -\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} + aac \left[\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \Theta \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} + \frac{2\lambda}{a^2 c} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Theta \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \dots \dots \dots (5)$$

となる. ここで,

$$\Theta = \left| \left(\frac{2c}{\lambda} \cdot \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{c}{a} \cdot \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right|^{(n-1)/2}$$

ここで, x 方向距離はぜん動波の波長 λ で, y 方向は平均水路幅 a で無次元化されており, 流速の各方向成分はぜん動波の進行速度 c で無次元化されている. また無次元時間は $T = tc/\lambda$, 無次元圧力は $P = a^2 p/\mu^* c\lambda$ である. なお, $\alpha (= a/\lambda)$ は波数, $\varepsilon (= b/a)$ は振幅比, $R_e^* (= \rho ac/\mu^* \cdot a/\lambda)$ はレイノルズ数に相当する. なお, α の値が大きいたときは, x および y はともに a で無次元化される. そのときは, 無次元圧力 $P = p/\rho c^2$, レイノルズ数 $R_e^* = \rho ac/\mu^*$ である.

式(4)および(5)が, 前報までの差分スキームに従って差分化され,

$$U_{i+1/2, j}^{n+1} = U_{i+1/2, j} + \Delta T \left[-\frac{U_{i+1, j}^2 - U_{i, j}^2}{\Delta X} - \frac{(UV)_{i+(1/2), j+(1/2)} - (UV)_{i+(1/2), j-(1/2)}}{a\Delta Y} - \frac{1}{R_e^*} \left\{ \frac{P_{i+1, j} - P_{i, j}}{\Delta X} - aac \left(\frac{2}{c\lambda} \Theta_1 + \frac{\lambda}{ca} \Theta_2 \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (6)$$

ここで,

$$\Theta_1 = \frac{1}{\Delta X^2} \left\{ (\Theta_{i+1, j} - \Theta_{i, j})(U_{i+(1/2), j} - U_{i-(1/2), j}) + \Theta_{i, j} \cdot \frac{1}{2} (U_{i+(3/2), j} - U_{i+(1/2), j} - U_{i-(1/2), j} + U_{i-(3/2), j}) \right\}$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{\Delta Y} (\Theta_{i, j+1} - \Theta_{i, j}) \left\{ \frac{1}{\lambda \Delta X} \cdot \frac{1}{2} (V_{i+1, j+(1/2)} + V_{i+1, j-(1/2)} - V_{i, j+(1/2)} - V_{i, j-(1/2)}) + \frac{1}{a\Delta Y} \cdot \frac{1}{2} (U_{i+(1/2), j+1} + U_{i-(1/2), j+1} - U_{i+(1/2), j} - U_{i-(1/2), j}) \right\} + \Theta_{i, j} \left[\frac{1}{\lambda \Delta X \Delta Y} \{ (V_{i+1, j+(1/2)} - V_{i+1, j-(1/2)}) - (V_{i, j+(1/2)} - V_{i, j-(1/2)}) \} + \frac{1}{a\Delta Y^2} \cdot \frac{1}{2} (U_{i+(1/2), j+1} + U_{i-(1/2), j+1} - 2U_{i+(1/2), j} - 2U_{i-(1/2), j} + U_{i+(1/2), j-1} + U_{i-(1/2), j-1}) \right]$$

$$V_{i, j+(1/2)}^{n+1} = V_{i, j+(1/2)} + \Delta T \left[-\frac{V_{i, j+1}^2 - V_{i, j}^2}{a\Delta Y} - \frac{(UV)_{i+(1/2), j+(1/2)} - (UV)_{i-(1/2), j+(1/2)}}{\Delta X} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{R_e^*} \left\{ \frac{P_{i, j+1} - P_{i, j}}{\Delta Y} - a^2 ac \left(\frac{1}{c} \Theta_3 + \frac{2\lambda}{a^2 c} \Theta_4 \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (7)$$

ここで,

$$\Theta_3 = \frac{1}{\Delta X} (\Theta_{i+1, j} - \Theta_{i, j}) \left\{ \frac{1}{\lambda \Delta X} \cdot \frac{1}{2} (V_{i+1, j+(1/2)} + V_{i+1, j-(1/2)} - V_{i, j+(1/2)} - V_{i, j-(1/2)}) + \frac{1}{a\Delta Y} \cdot \frac{1}{2} (U_{i+(1/2), j+1} + U_{i-(1/2), j+1} - U_{i+(1/2), j} - U_{i-(1/2), j}) \right\} + \Theta_{i, j} \left[\frac{1}{\lambda \Delta X^2} \cdot \frac{1}{2} (V_{i+1, j+(1/2)} + V_{i+1, j-(1/2)} - 2V_{i, j-(1/2)} - 2V_{i, j-(1/2)} + V_{i-1, j+(1/2)} + V_{i-1, j-(1/2)}) + \frac{1}{a\Delta X \Delta Y} \{ (U_{i+(1/2), j+1} - U_{i-(1/2), j+1}) - (U_{i+(1/2), j} - U_{i-(1/2), j}) \} \right]$$

$$\Theta_4 = \frac{1}{\Delta Y^2} \left\{ (\Theta_{i, j+1} - \Theta_{i, j})(V_{i, j+(1/2)} - V_{i, j-(1/2)}) + \Theta_{i, j} \cdot \frac{1}{2} (V_{i, j+(3/2)} - V_{i, j+(1/2)} - V_{i, j-(1/2)} + V_{i, j-(3/2)}) \right\}$$

となる。

3. 計算結果および実測値との比較

計算は、実験値との比較を考慮した片壁ぜん動長波長二次元流路 ($\alpha=0.05, \epsilon=0.5$) モデル、および両壁ぜん動短波長二次元流路 ($\alpha=0.3, \epsilon=0.3$) モデルについて行う。なお、両者とも両端がヘッド一定のリザーバに接続された3波列の流路とし、実験室系に座標を固定して、ぜん動波を移動境界とした非定常流計算を

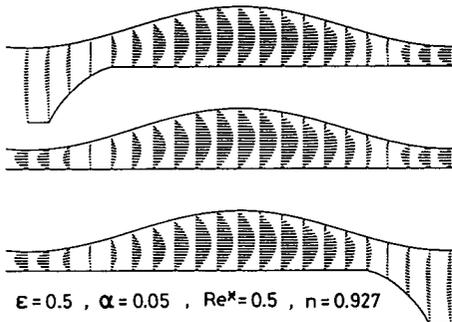


図1 ぜん動流路内流速ベクトル線図 (最大流量状態)

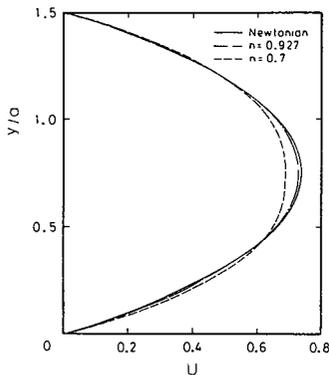


図2 流路中央部流速分布

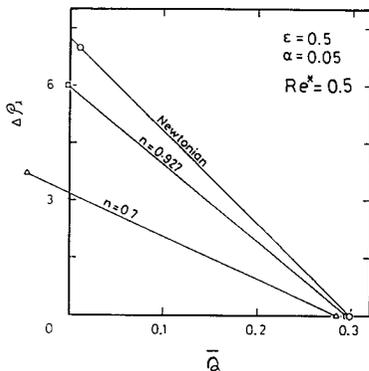


図3 ポンプ特性

行う。さらにべき指数の値は、長波長流路では $n=0.93, 0.7$ とし、短波長流路では $n=0.25$ とする。

計算結果と比較検討するための実験では、流路形状 $\alpha=0.05, \epsilon=0.5$ の3波列片壁ぜん動擬似二次元流路が用いられる。作動流体には、擬塑性流体の性質を示す CMCNa (カルボキシメチルセルロースナトリウム) の1%水溶液が用いられる。なお CMCNa 水溶液の物性値は Patel らの方法⁽¹¹⁾によって測定され、

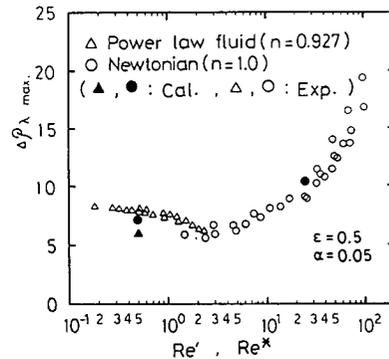
$$\mu^* = 0.10, \quad n = 0.93$$

を得た。

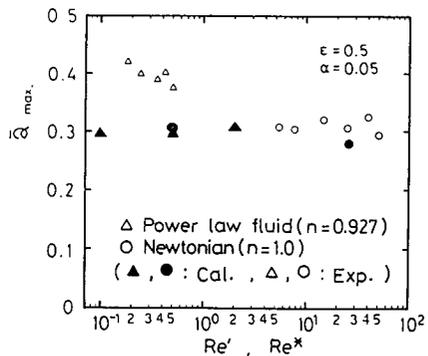
実験では n の値を一定として、レイノルズ数 $Re^* = 0.1 \sim 2$ の範囲でポンプ特性が調べられ、最大ヘッド差および最大流量について計算結果と比較される。

はじめに、片壁ぜん動長波長流路内の流動状態および流速分布に与えるべき指数の影響、およびポンプ特性などについての計算結果例を示す。

図1は、 $n=0.93$ のべき乗則流体について、 $Re^* = 0.5$ としたときの最大流量状態におけるベクトル線図



(a) レイノルズ数による最大ヘッド差の変化



(b) レイノルズ数による最大流量の変化

図4

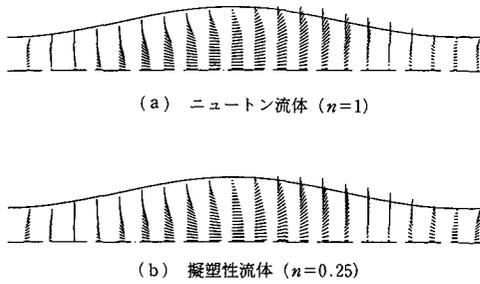


図5 流路中央部流速ベクトル線図(最大流量状態)

を示す。この結果は、 n の値が1に近い場合ほぼニュートン流体についての結果⁽¹⁰⁾と同様の流動状態を示している。なお前報までの計算流路と異なり、入口および出口の形状を、実験装置と一致するように変更したが、その影響は現れなかった。

図2は、 $R_*^*=0.5$ 一定として、 $n=1\sim 0.7$ の範囲で計算された、ぜん動流路山部流路幅方向の流速分布の変化を示している。流速分布変化の傾向は、管路内べき乗則流体定常流流速分布の傾向と一致している。

図3は、 n の値によるポンプ特性の変化を示している。横軸は無次元平均流量(= Q/ach)、縦軸は一波長当たりの無次元ヘッド上昇である。 n の増加とともに、流量が減少する傾向にあり、Shuklaらの解析結果⁽⁸⁾の傾向と一致している。

つぎに、ぜん動ポンプとしての特性を示す最大ヘッド差および最大流量の、レイノルズ数による変化の実測値を、計算値とともに図4に示す。実験装置の動作範囲の限界などにより、作動流体を水としたときと、CMCNa水溶液を用いたときのレイノルズ数範囲の重なる部分は少ないが、図4(a)の結果から、CMCNa水溶液の場合に最大ヘッド差がやや増加する傾向にあることが分かる。また、最大ヘッド差についての計算結果は、実測値とよく一致している。図4(b)に示す最大流量については、精度の良い実験が困難なためデータ数が少ないが、最大流量の計算値は実測値と比較して少なめである。

以上のような長波長流路についての計算に加えて、腸管内などの流れのシミュレーションに相当する、両側ぜん動短波長二次元流路内擬塑性流体の流れの計算例を示す。流路の形状は $\alpha=0.3$ 、 $\varepsilon=0.3$ とし、 $n=0.25$ 、 $R_*^*=1.5$ の場合について計算を行い、ニュートン流体についての計算結果と比較する。図5は、流路中央部一波長分の流速ベクトル線図であり、(a)はニュートン流体($n=1$)、(b)は擬塑性流体($n=0.25$)についての結果である。この結果は、中央部流速分布の顕著な相違を示している。

4. 結 言

有限波列ぜん動流路内のべき乗則非ニュートン流体非定常流の解析に、単純化されたMAC法を基礎とする数値解法の適用を試みた。その結果、べき指数およびレイノルズ数の広い範囲についての適用性が示された。また得られた計算結果は、一部実測値と比較されるとともに、他の解析結果とも比較され、ほぼその妥当性が示された。しかし、べき指数の値によってはレイノルズ数が非常に低いときに収れん性が悪くなることもあり、今後検討が必要である。なお本計算に協力された、本学学生 田村健一君に謝意を表します。

文 献

- (1) Jaffrin, M. Y., *Int. J. Eng. Sci.*, 11-6 (1973), 681.
- (2) Brown, T. D. and Hung, T. K., *J. Fluid Mech.*, 83-2 (1977), 249.
- (3) Takabatake, S. and Ayukawa, K., *J. Fluid Mech.*, 122 (1982), 439.
- (4) Tong, P. and Vawter, D., *Trans. ASME, Ser. E*, 39-4 (1972), 857.
- (5) Bohme, G. and Riedrich, R., *J. Fluid Mech.*, 128- (1983), 109.
- (6) Girija, R. and Deranathan, R., *Proc. Indian Acad. Sci.*, 81-A4 (1975), 149.
- (7) Raju, K. K. and Gupta, S. P., *Rheol. Acta*, 11 (1972), 170.
- (8) Shukla, J. B. and Gupta, S. P., *Trans. ASME (J. Biomech. Engng.)* 104 (1982), 182.
- (9) 川橋・ほか3名, 機論, 48-427, B (昭57), 473.
- (10) 川橋・ほか2名, 機論, 49-442, B (昭58), 1125.
- (11) Patel, P. D., ほか2名, *Biorheology*, 10 (1973), 441.

討 論

〔質問〕 坪 井 一 洋〔日本情報サービス(株)〕

この種の移動境界問題では計算領域が時間的に変化するため内部の流れ場を求める際、連続の条件(質量の保存)が重要となる。MAC法を初めとして、現在の非圧縮性流体に対する計算法は、この点に困難があるといわれている。今回の計算例で、連続の条件がどの程度満足されているか。

〔回答〕 ご指摘の点は常に問題となるが、本計算

モデルでは周期的なぜん動波(正弦波状)の伝ばを考え、かつ計算領域のぜん動波進行方向長さは、常に波長の整数倍をとっている。したがって、ぜん動波を移動境界として扱っても計算領域のセル数は常に同じであり、比較的計算は安定で、収れん性もよい。実際の計算では、連続の条件の判別を 10^{-5} で打ち切っている。
