

534.23-8

二次共鳴器つきレゾナンスチューブの研究*

(第1報, 共振状態の不安定現象)

川橋正昭**, 鈴木 允**

1. ま え が き

J. Hartmann⁽¹⁾ によって発見された空気噴流音波発生器は, Hartmann 振動子とよばれ, 超音波領域で広く活用されてきた. その後 H. Sprenger⁽²⁾ によって形状の長い Hartmann 振動子の閉端部に発熱現象があることが発見され, あらたにレゾナンスチューブと名づけられて今日まで数多くの研究がなされている. 音波発生器としてのレゾナンスチューブは, 容易に大出力超音波を空中に放射できることから, 集じん, 超音波乾燥および霧消散などの用途に利用されてきたが, これからも霧化を利用した燃料制御, 超音波誘導のための通信などの広範な応用が考えられている. さらに, 二次共鳴器をつけて出力の向上, 高調波ひずみの除去および指向性をもたせるなどの改良が, E. Brun⁽³⁾らによって行なわれている. しかし, 二次共鳴器をつけたレゾナンスチューブは, 相互の音響的結合により共振周波数に変化して, 両者の共振点が近接している場合に共振状態が不安定となる. その不安定現象は共振周波数履歴現象となってあらわれ⁽⁴⁾, チューブ長さとの関係において, 長さを徐々に長くしていく場合と短くしていく場合とでみちすじが異なる部分を生じる. この部分は, チューブ長さが二次共鳴器長さのほぼ $1/(2n+1)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) の関係になる場合に生じる. これは, レゾナンスチューブの共振周波数と, 二次共鳴器の第一次および各高次モードの固有振動数とが, ほぼ一致する状態に相当している.

著者らは可聴周波数領域の発生音を出す形状の装置で共振周波数履歴現象を実測するとともに, 理論的研究を行なった. すなわち, 二次共鳴器およびレゾナンスチューブは二つの独立した音響共振系であるので, それぞれについて音響インピーダンスを計算することができる. さらに, 両者が近接しておかれた場合には

音響的結合により相互インダクタンスを生じ⁽⁵⁾, レゾナンスチューブの音響リアクタンスが変化する. このリアクタンス変化分をもとめることによって, 共振周波数履歴現象の定性的に十分な解析結果が得られたのでここに報告する.

記号表

a	: 音速	m/s
c	: 結合係数	
C	: 音響キャパシタンス	s^2/kg
d	: ノズル, チューブ間距離	mm
f	: 周波数	Hz
I_n	: 第 n 次第 1 種変形ベッセル関数	
K_n	: 第 n 次第 2 種変形ベッセル関数	
j	: 虚数単位	
k_1, k_2	: 定数	
l	: チューブ長さ	mm
M	: 音響インダクタンス	kg
P	: 圧力	N/m^2
p	: 音圧	N/m^2
R	: 音響レジスタンス	kg/s
r	: 半径	mm
S	: 断面積	m^2
t	: 時間	s
X	: 音響リアクタンス	kg/s
x	: 軸方向座標	
Z	: 音響インピーダンス	kg/s
κ	: 空気の体積弾性率	N/m^2
μ	: 粘性係数	Ns/m^2
μ_t	: 乱流うず粘性係数	Ns/m^2
ξ	: 軸方向変位	
$\xi_{\bar{x}}$: ξ の断面積分平均 (平均変位)	
$\bar{\xi}_{\bar{x}}$: 平均速度 $= \partial \xi_{\bar{x}} / \partial t$	
ρ	: 密度	kg/m^3
$\emptyset, \emptyset', \Psi, \Psi'$: 定数	
τ	: 周期	s
ω	: 角周波数	rad/s
λ	: $\lambda = j \omega$	

* 昭和45年4月2日 第47期通常総会講演会および昭和46年4月4日第48期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和46年6月21日.

** 正員, 埼玉大学理工学部 (浦和市下大久保 255).

$$h = \sqrt{\rho \lambda / \mu}$$

添 字

t : レゾナンスチューブについての量

s : 二次共鳴器についての量

r : 共振状態

in : 入口状態

2. 実験装置および実験結果

レゾナンスチューブは、先細平行ノズルから臨界圧力比以下の状態で噴出する空気噴流の圧縮部に、チューブ開口端がおかれる場合に励振される。そして、チューブ長さがほぼ波長の 1/4 に相当する周波数で共振する⁽⁴⁾。

本実験では、共振周波数が可聴周波数領域にあるレゾナンスチューブを用いた。その実験装置を図 1 に示す。図 1 において、入口圧力 P_{in} 、入口温度 T_{in} の圧縮空気が内径 D_N の先細平行ノズルから噴出し、噴流の圧縮部にチューブ開口端がおかれている。またチューブ長さはピストンにより連続的に可変され、一端をとじた筒形の二次共鳴器がチューブと同軸上におかれている。ここで、ノズル出口径 D_N は $2\text{ mm}\phi$ および $4\text{ mm}\phi$ 、チューブ内径 D_t は $2\text{ mm}\phi$ および $4\text{ mm}\phi$ 、外径 D_o は $4\text{ mm}\phi$ および $6\text{ mm}\phi$ 、二次共鳴器内径 D_s は $27\text{ mm}\phi \sim 42\text{ mm}\phi$ 、長さ l_s は $50\text{ mm} \sim 150\text{ mm}$ である。なお、材質はレゾナンスチューブは銅パイプ、二次共鳴器は鉄パイプである。また入口圧力 P_{in} は $3.04 \times 10^5\text{ N/m}^2$ (3.0 at) であり、入口温度 T_{in} は室温である。つぎに測定系を図 2 に示す。レゾナ

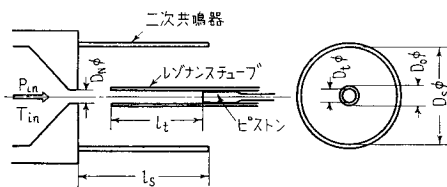


図 1 実験装置

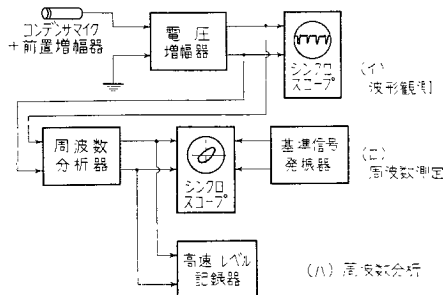
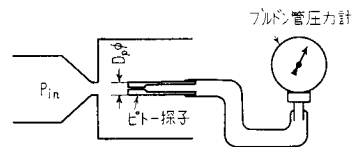


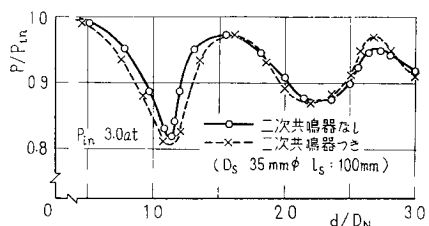
図 2 測定系路図

スチューブ発生音の波形は、図 2 (イ) に示すように、コンデンサマイクで受音され増幅器をへてシンクロスコープで観測される。その周波数は、図 2 (ロ) に示すように、増幅器から周波数分析器をへてシンクロスコープに導かれ、基準信号発振器の出力信号とのリサーチ図形から測定される。また発生音の周波数分析の結果は、図 2 (ハ) に示すように、高速レベル記録器で記録される。

はじめに、入口圧力を一定にして、二次共鳴器をつけない場合とつけた場合の噴流軸中心総圧曲線をもとめる。総圧測定は、ピトー管で行なう。測定結果を、装置とともに図 3 に示す。この結果、総圧曲線は二次共鳴器の有無によらずほぼ同様の曲線となり、噴流の圧縮部すなわちレゾナンスチューブ共振領域⁽⁴⁾の位置に変化はないことがわかる。つぎに共振周波数 (または周期) とチューブ長さとの関係を図 4 に示す。二次共鳴器をつけない場合は音響管共振周波数 $f_r = a/4(l_t + 0.3 D_t)$ ⁽⁶⁾ と同じ傾向を示すが、チューブ長さが短くなると、大きくずれてくる。この状態をチューブ長さとの共振周波数の関係であらわし、図 4 (a) に示す。二次共鳴器をつけた場合は、レゾナンスチューブ長さとの二次共鳴器長さが近接すると共振周波数に履歴現象を生じる。この現象はチューブ長さとの共振周期との関係で表わすほうが都合がよい。その結果を図 4 (b) に示す。この図における履歴ループの部分では不安定な共振状態を示し、同じチューブ長さでも外乱の与え方によっては二つの共振周期のどちらにも移行しうる。しかし長さを 1 方向に変化させると、共振周期はかならず (A→B→C→E→F) か、(F→E→D→B→A) のみちすじに沿って変化する。履歴ループの形は周期とび幅 $\Delta\tau$ と、とびを起こす長さの変化幅 Δl_t から定まる。二次共鳴器の形状変化に対する $\Delta\tau$ との関係は、



(a) 総圧測定装置



(b) 総圧曲線

図 3 噴流軸中心総圧曲線

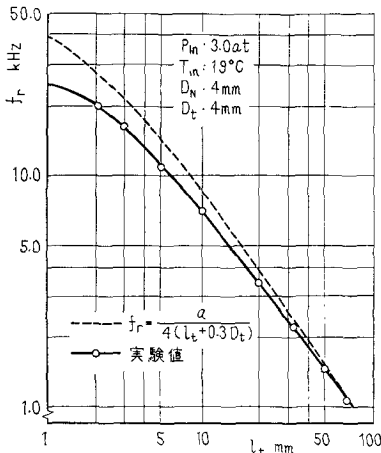
とびの中心周期 τ_c で無次元化して図5に示し, Δl_t との関係を図6に示す. 図5の結果から二次共鳴器内径が小さくなるほど, そして長さが増すほど $\Delta \tau_c$ の値は大きくなり, 図6の結果から, 二次共鳴器容積が大きくなるほど Δl_t の値が大きくなることわかる. このことは, 音響的結合すなわち結合に關与する空気の質量(相互インダクタンス)が多くなるほど Δl_t の値が大きくなることを示していると考えられる. また図4(a)の結果から, チューブ長さとお実質チューブ長さ増加分 Δ との関係を, $f_r = a/4(l_t + \Delta)$ の関係からもとめ図7に示す.

つぎに, 二次共鳴器をつけない場合と, つけた場合の発生音波形を図8に示し, その波形の周波数分析例を図9に示す. これらの結果から, 二次共鳴器をつ

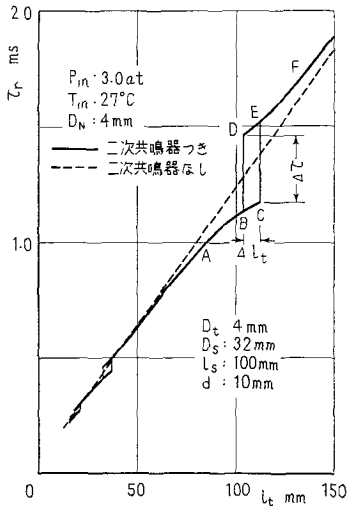
けない場合の発生音は非常にひずみの多い波形であり⁽⁷⁾, 高調波成分のレベルが高く, ノズルエッジ音の影響も大きいことがわかる. 一方二次共鳴器をつけると高調波ひずみが改善され, 高調波成分のレベルが減少し, ノズルエッジ音の影響も少なくなっていることがわかる.

3. 理論解析

二次共鳴器つきレゾナンスチューブ共振周波数の履



(a) 二次共鳴器をつけない場合の共振周波数



(b) 二次共鳴器をつけた場合の共振周期

図4 レゾナンスチューブの共振周波数および周期

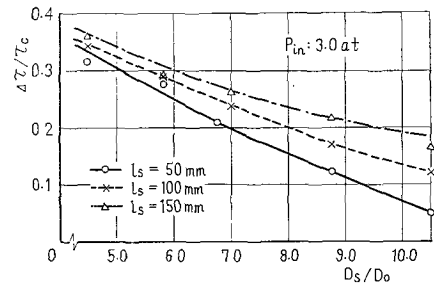


図5 共振周期のとお幅

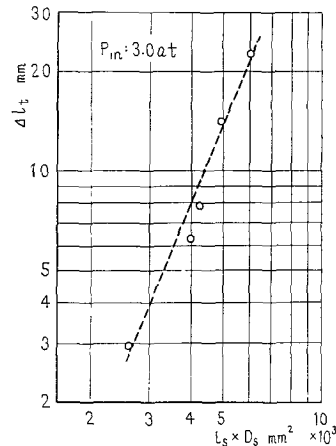


図6 履歴ループのチューブ長さ方向のとお幅

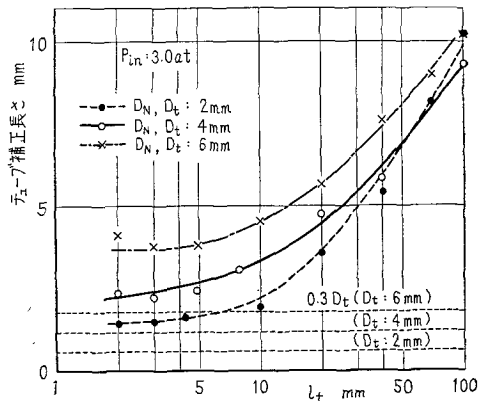


図7 レゾナンスチューブ開口端補正長さ

歴現象は、つぎのような原因によって起こるものと考えられる。

レゾナンスチューブおよび二次共鳴器がそれぞれ独立した音響共振系であるとすれば、二つの共振系が近接しておかれた場合に、周辺の空気を介して音響的結合を生じ、レゾナンスチューブの音響インピーダンスが変化する。とくに両方の共振点が近づいた場合には複雑な変化を生じて共振状態が不安定になる。音響的結合は、それに関与する部分の空気の質量の関数として定まる相互インダクタンスによるものとして、レゾナンスチューブおよび二次共鳴器のそれぞれの音響インピーダンスを計算する。さらに結合によるレゾナンスチューブ音響インピーダンスの増加の状態をもとめて、共振周波数履歴現象を明らかにする。

3・1 運動方程式および平均変位 この系についての運動方程式を定めるために、変位および圧力の変動は小さく、二次共鳴器内の時間平均粒子速度は 0 であ

ると仮定する。これらの仮定から、運動方程式に円筒座標表示のナビエ・ストークスの式を適用する。この場合、軸方向速度に対して半径方向および円周方向速度を微小項として省略し、軸方向速度の半径方向こう配のみを考慮する。さらに外力項を省略して、軸方向速度を ξ で表わせば、運動方程式は

$$\rho \xi = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (1)$$

となる。つぎに、この系においてはつねに $\xi = j\omega \xi$ の関係が成立する周期変動のみが存在するものと仮定して、式 (1) を変形すると⁽⁸⁾

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{j\omega\rho}{\mu} \xi = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (2)$$

となる。式 (2) は変形ベッセル微分方程式であり、その一般解は

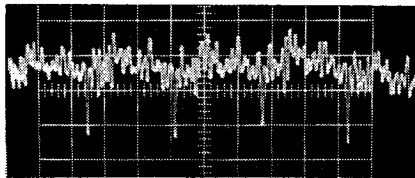
$$\xi = \left\{ \Phi I_0(hr) + \Psi K_0(hr) - \frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで、 $h^2 = \rho\lambda/\mu$ である。式 (3) における定数 Φ および Ψ は、レゾナンスチューブおよび二次共鳴器のそれぞれの境界条件から定まる。それぞれの境界条件を図 10 に示す。図 10 (a) はレゾナンスチューブについての境界条件

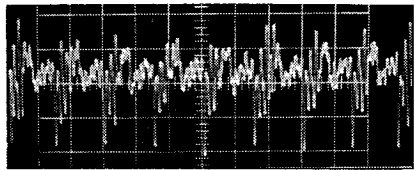
$$r = r_t \rightarrow \xi = 0, \quad r = 0 \rightarrow \partial \xi / \partial r = 0 \dots\dots\dots (4)$$

を表わし、図 10 (b) は二次共鳴器についての境界条件

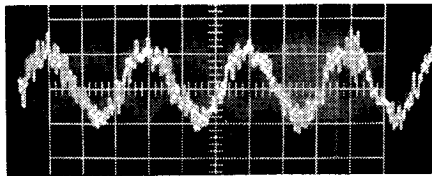
$$r = r_s \rightarrow \xi = 0, \quad r = r_0 \rightarrow \xi = 0 \dots\dots\dots (5)$$



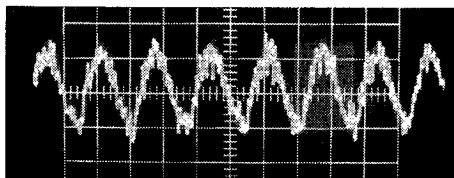
$l_t = 104 \text{ mm}, f_r = 776 \text{ Hz}$



$l_t = 58.1 \text{ mm}, f_r = 1338 \text{ Hz}$
(a) 二次共鳴器なし



$l_t = 104 \text{ mm}, l_s = 100 \text{ mm}$
 $f_r = 675 \text{ Hz}, D_s = 32 \text{ mm} \phi$



$l_t = 58.1 \text{ mm}, l_s = 51 \text{ mm}$
 $f_r = 1220 \text{ Hz}, D_s = 32 \text{ mm} \phi$
(b) 二次共鳴器つき

図 8 レゾナンスチューブの発生音波形

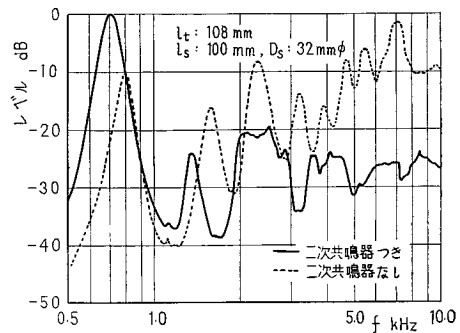
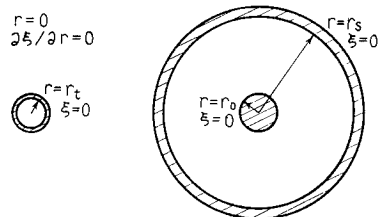


図 9 レゾナンスチューブ発生音の周波数分析結果



(a) レゾナンスチューブ (b) 二次共鳴器

図 10 半径方向境界条件

を表わす。式(4)を式(3)に代入して Φ および Ψ を定めると

$$\Phi = \frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{I_0(hr_t)}, \quad \Psi = 0 \dots\dots\dots (6)$$

となり, 変位 ξ は

$$\xi = -\frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ 1 - \frac{I_0(hr_t)}{I_0(hr_t)} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。そこで式(7)をチューブ断面について積分平均して平均変位をもとめると,

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{1}{S_t} \int_0^{r_t} 2\pi r \xi dr \\ &= \frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \frac{2}{hr_t} \frac{I_1(hr_t)}{I_0(hr_t)} - 1 \right\} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる。

つぎに, 式(5)を式(3)に代入すると, 二次共鳴器についての Φ および Ψ は

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{K_0(hr_s) - K_0(hr_0)}{I_0(hr_s)K_0(hr_0) - I_0(hr_0)K_0(hr_s)} \\ \Psi &= -\frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{I_0(hr_s) - I_0(hr_0)}{I_0(hr_s)K_0(hr_0) - I_0(hr_0)K_0(hr_s)} \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となる。式(9)を式(3)に代入して式(8)と同様に平均変位をもとめると

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= -\frac{2}{r_s^2 - r_0^2} \frac{1}{h\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\{r_s I_1(hr_s) - r_0 I_1(hr_0)\} \Phi' \right. \\ &\quad \left. - \{r_s K_1(hr_s) - r_0 K_1(hr_0)\} \Psi' + \frac{r_s^2 - r_0^2}{2} h \right] \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\Phi = -\frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \Phi', \quad \Psi = -\frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \Psi'$$

である。

3.2 音圧および音響インピーダンス 圧力変動分すなわち音圧は, 粒子変位によってもたらされる媒質の体積変化から, 体積弾性率と変位の進行方向こう配によって定義される⁽⁹⁾。ここでは, 粒子変位に前節でもとめた平均変位を代入して, 音圧を

$$p = -\kappa \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \dots\dots\dots (11)$$

と定義する。

式(11)を式(8)に代入すると, レゾナンスチューブについてつぎのような波動方程式が成立する。

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial x^2} - k_1^2 \bar{\xi} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

ここで

$$k_1^2 = \frac{\rho\lambda^2}{\kappa} \frac{1}{[1 - \{2I_1(hr_t)/hr_t I_0(hr_t)\}]}$$

である。また, 式(11)を式(10)に代入すると, 二次共鳴器について, つぎのような波動方程式が成立す

る。

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial x^2} - k_2^2 \bar{\xi} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ここで,

$$k_2^2 = \frac{\rho\lambda^2}{\kappa} \frac{h(r_s^2 - r_0^2)}{[2\{r_s I_1(hr_s) - r_0 I_1(hr_0)\} \Phi' - 2\{r_s K_1(hr_s) - r_0 K_1(hr_0)\} \Psi' + (r_s^2 - r_0^2)h]}$$

である。一方, 式(8)および(10)の両辺を x で微分し, 式(11)に代入することによってそれぞれについての音圧に関する波動方程式が成立する。すなわち, レゾナンスチューブについては,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - k_1^2 p = 0 \dots\dots\dots (14)$$

となり, 二次共鳴器については,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - k_2^2 p = 0 \dots\dots\dots (15)$$

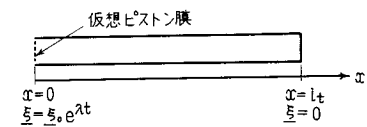
となる。

式(12)と(14)および式(13)と(15)の関係は, 分布定数電気伝送回路において成立する波動方程式と同じ形のものであり, 電氣的インピーダンスと同様に, 音響インピーダンスとして

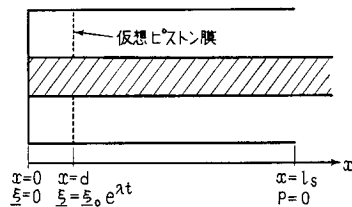
$$Z = \frac{p}{\bar{\xi}} S \dots\dots\dots (16)$$

を定義することができる。そこで, 式(12)および式(13)を, それぞれの境界条件のもとで解き, $\bar{\xi}$ をもとめて式(11)に代入して p をもとめる。さらに式(16)から, それぞれについての音響インピーダンスを決定することができる。

はじめに, レゾナンスチューブおよび二次共鳴器についての式(12), (13)に対する境界条件を図11に示す。図11(a)は, レゾナンスチューブについての境界条件を表わしており, チューブ開口端で質量0の仮想ピストン膜が一定振幅 ξ_0 , 一定角周波数 ω で振



(a) レゾナンスチューブ



(b) 二次共鳴器

図 11 長さ方向境界条件

動しているものと仮定して

$$x=0 \rightarrow \xi = \xi_0 e^{i\omega t}, \quad x=l_t \rightarrow \xi = 0 \dots\dots\dots(17)$$

となる。図 11 (b) は二次共鳴器についての境界条件を表わしており、レゾナンスチューブ開口端位置に仮想ピストン膜があるものとして、

$$x=0 \rightarrow \xi = 0, \quad x=d \rightarrow \xi = \xi_0 e^{i\omega t}, \quad x=l_s \rightarrow p=0 \dots\dots\dots(18)$$

となる。境界条件 (17) のもとで式 (12) を解くと、平均変位は

$$\xi = \frac{e^{k_1(l_t-x)} - e^{-k_1(l_t-x)}}{e^{k_1 l_t} - e^{-k_1 l_t}} \xi_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(19)$$

となり、式 (19) を式 (11) に代入して音圧は

$$p = \kappa k_1 \left\{ \frac{e^{k_1(l_t-x)} + e^{-k_1(l_t-x)}}{e^{k_1 l_t} - e^{-k_1 l_t}} \right\} \xi_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(20)$$

となる。式 (16) の定義から、レゾナンスチューブ開口端における音響インピーダンスは

$$Z_t = \frac{\kappa k_1^2}{\lambda} S_t \coth k_1 l_t \dots\dots\dots(21)$$

となる。

つぎに境界条件 (18) のもとで式 (13) を解くと、平均変位は

$$\xi = \left\{ \frac{e^{k_2 x} - e^{-k_2 x}}{e^{k_2 d} - e^{-k_2 d}} + \frac{e^{k_2(l_s-x)} + e^{-k_2(l_s-x)}}{e^{k_2(l_s-d)} + e^{-k_2(l_s-d)}} \right\} \xi_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(22)$$

となり、式 (22) を式 (11) に代入して音圧は

$$p = \kappa k_2 \left\{ \frac{e^{k_2 x} + e^{-k_2 x}}{e^{k_2 d} - e^{-k_2 d}} + \frac{e^{k_2(l_s-x)} - e^{-k_2(l_s-x)}}{e^{k_2(l_s-d)} + e^{-k_2(l_s-d)}} \right\} \xi_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(23)$$

となる。式 (16) の定義から、二次共鳴器内のレゾナンスチューブ開口端位置に相当する点での音響インピーダンスは、

$$Z_s = \frac{\kappa k_2}{\lambda} S_s \{ \coth k_2 d + \tanh k_2(l_s-d) \} \dots\dots\dots(24)$$

となる。

3.3 音響的結合 式 (21) および (24) にもとめられたレゾナンスチューブおよび二次共鳴器の音響インピーダンスは、レジスタンス分とリアクタンス分に分けることができ

$$Z_t = R_t + jX_t, \quad Z_s = R_s + jX_s \dots\dots\dots(25)$$

となる。Z_t および Z_s は、ほぼ $\omega = (2n+1)a/8\pi l_t$ および $\omega = (2n+1)a/8\pi l_s (n=0,1,2,\dots)$ なる角周波数の値付近でリアクタンス分が 0 となり、極小値を示す。この状態でレゾナンスチューブおよび二次共鳴器は共振する。そこで、n=0 の場合についての第一共振状態を示す周波数近傍について、X_t および X_s をもとめる。なお、これらの量は粘性係数の関数であるが、この系の実際の流れには乱れを含んでいるものと

して、乱流うず粘性係数の値を代入して計算する。この場合は、20°C の空気のもつ粘性係数値を基準にして、その値の 0.5×10²~4×10² 倍を乱流うず粘性係数の値として代入し、X_t および X_s の計算結果を、図 12 および 13 に示す。図 12 の結果からレゾナンスチューブ長さとの共振周期 (τ_r=1/2πω_r) との関係をもとめ、実験値とともに図 14 に示す。一方レゾナンスチューブおよび二次共鳴器は、ラグランジュの電気、音響系

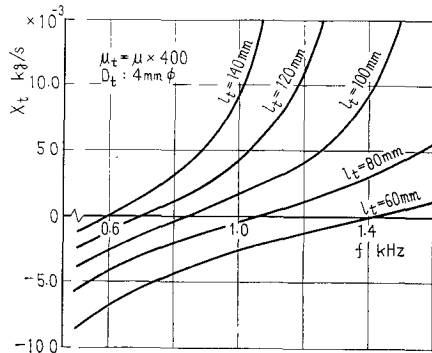


図 12 レゾナンスチューブの音響リアクタンス

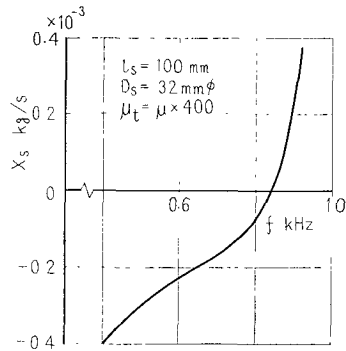


図 13 二次共鳴器音響リアクタンス

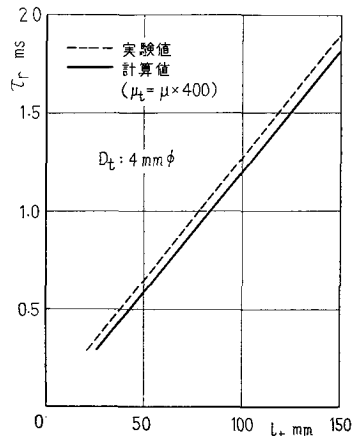


図 14 レゾナンスチューブ共振周期の計算値および実験値

対応関係のもとで, 集中定数直列共振回路に近似的におきかえられる. そこでリアクタンス分は, 空気質量に対応するインダクタンス分および気室のもつこわさの逆数に対応するキャパシタンス分に分けられ

$$X_t = \omega M_t - \frac{1}{\omega C_t} \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$X_s = \omega M_s - \frac{1}{\omega C_s} \quad \dots\dots\dots(27)$$

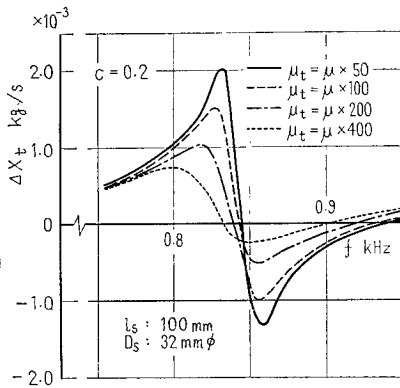
となる.

式(21)で表わされるような音響インピーダンスをもち, そのリアクタンス分が式(26)のような共振系と, 式(24)で表わされる音響インピーダンスをもち, そのリアクタンス分が式(27)であるような, 二つの共振系が近接しておかれた場合には, ξ および p が伝ばする媒質すなわち空気を介して, 音響的に結合し, 相互インダクタンスが生じてレゾナンスチューブのリアクタンスは増加する. この相互インダクタンスは, 結合係数を c とすれば,

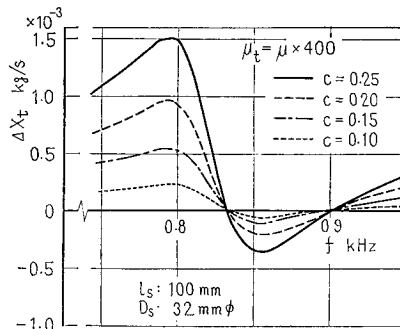
$$M_m = c\sqrt{M_t M_s} \quad \dots\dots\dots(28)$$

となり, レゾナンスチューブのリアクタンス増加分は

$$\Delta X_t = -\frac{\omega^2 M_m^2}{|Z_s|^2} X_s \quad \dots\dots\dots(29)$$



(a) 結合係数一定



(b) 粘性係数一定

図 15 結合によるレゾナンスチューブの音響リアクタンス増加分

となる. そして結合後のリアクタンスは,

$$X_t + \Delta X_t = X_t - \frac{\omega^2 M_m^2}{|Z_s|^2} X_s \quad \dots\dots\dots(30)$$

となる. 相互インダクタンスの値は結合係数によって変化するが, 結合係数は二次共鳴器の形状および取付位置によって変化する.

ここでは, $c=0.1\sim 0.25$ の範囲であるとして式(29)および(30)を計算し, 図15および16に示す.

3.4 検討 前節までの結果から, 二次共鳴器つきレゾナンスチューブの音響リアクタンスを明らかにすることができた. 二次共鳴器をつけた場合のリアクタンスは, 図12のつけない場合と異なり, 二次共鳴器共振周波数付近に極大および極小点をもつ. 図16から明らかのようにチューブ長さが十分短い間は極大点および極小点ともに負の領域にあり, 横軸との交点の一つであり安定な共振状態を保つ. チューブ長さが徐々に長くなると極大点が横軸に接しさらに正の領域に移行する. この状態では横軸との交点は三つとなるが, 慣性の影響で最も周波数の高い共振状態が保たれる. さらにチューブ長さを増すと, 極小点が横軸に接し, さらに正の領域にはいる. この瞬間横軸との交点はただ一つとなり, 共振状態はその点の周波数にとびを起し安定状態となる. 逆に, チューブ長さが十分長い間は横軸との交点の一つであり安定な共振状態が持続する. チューブ長さを徐々に短くすると極小点が横軸と接し, さらに負の領域へ移行する. この状態では交点は三つであり不安定な状態だが, 慣性の影響で最も周波数の低い点での共振状態が保たれる. さらにチューブ長さを減じると極大点も横軸に接し, さらに負の領域へと移行する. その瞬間交点の一つとなり, 共振状態もその点の周波数へと, とびを起し安定となる. このことから, チューブ長さ変化に対する共振周波数の履歴現象が生じることがわかる.

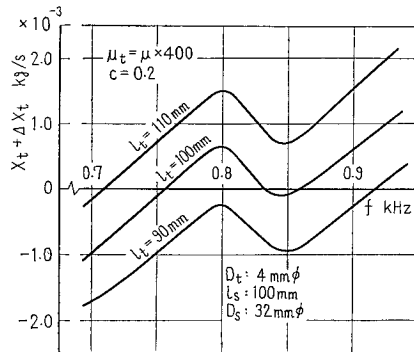


図 16 結合後のレゾナンスチューブの音響リアクタンス

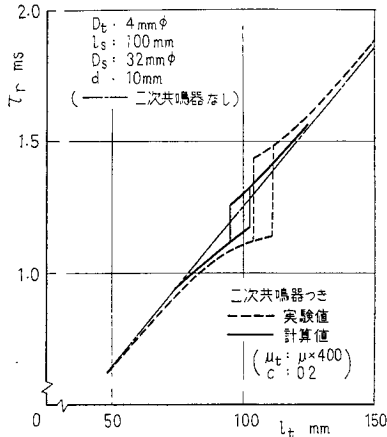


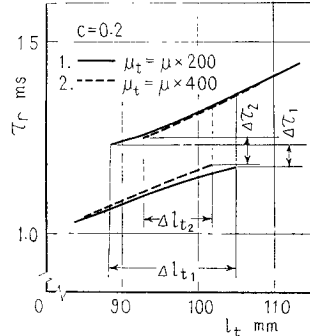
図 17 二次共鳴器つきレゾナンスチューブの共振周期計算値および実験値

そこで実測値と比較して、最も妥当と考えられる粘性係数および結合係数の値を選び、結合後のレゾナンスチューブリアクタンスを計算してその結果からチューブ長さとの関係をもとめて図 17 に示す。この図から明らかなように理論計算値と実測値は定性的によい一致が得られていることがわかる。

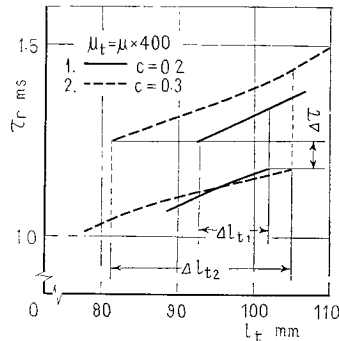
つぎに、図 15 の結果を用いて、粘性係数の値および結合係数の値を変化させたときのレゾナンスチューブ音響リアクタンスを計算し、チューブ長さとの関係をもとめて図 18 に示す。図 18 (a) の結果から、粘性係数の値を増すと、 $\Delta\tau$ が大きくなり Δl_t が小さくなることわかる。また、図 18 (b) の結果から、結合係数の値を増すと Δl_t が著しく大きくなるが、 $\Delta\tau$ には変化がないことがわかる。これらの結果から、図 5 および 6 の実測値を比較検討すると、つぎのことがわかる。二次共鳴器の内径を小さくすると、平均変位に対する粘性の影響が大きくなり、容積は小さくなる。すなわち、粘性の影響が大きくなると $\Delta\tau$ の値が大きくなり、容積が大きくなると結合による相互インダクタンスの値が大きくなり、 Δl_t の値が大きくなる。このことは、理論計算における粘性係数の値が履歴ループの $\Delta\tau$ におもに影響し、結合係数の値が Δl_t に影響するという傾向と同じであることを示している。

4. あとがき

二次共鳴器つきレゾナンスチューブの共振周波数履歴現象は、音響的结合による音響インピーダンスの増加によってひき起こされる不安定現象であることを明



(a) 粘性係数の値による変化



(b) 結合係数の値による変化

図 18 二次共鳴器つきレゾナンスチューブ共振周期履歴ループの形 (計算値)

らかにした。また、この系についての音響インピーダンスは、変動が小さいとの仮定のもとに成立する波動方程式の解から得られ、その結果導き出されたレゾナンスチューブ音響リアクタンスおよびチューブ長さとの共振周期の関係は、実測値と比べて定性的に十分一致する結果を得た。しかし、実測値との定量的ずれおよび結合係数の決定、さらに共振現象の安定化などについては、今後解決しなければならない点が残っている。

おわりに、本研究に協力された、当時本学学生であった、村尾、佐々木、安斉の諸君に感謝します。

文 献

- (1) Hartmann, J., *Phil. Mag.*, 11 (1931), 926.
- (2) Sprenger, H., *Mitt. E. T. H.*, 21 (1954), 18.
- (3) Brun, E. and Boucher, R., *J. Acous. Soc. Amer.*, 29 (1957), 573.
- (4) 川橋・鈴木, 機講論, No.700-7 (昭 45-4), 147.
- (5) 川橋・鈴木, 機講論, No.710-3 (昭 46-4), 137.
- (6) 伊藤, 音響工学原論, (昭 33), 276, コロナ社.
- (7) 川橋・ほか 2 名, 日本音響学会講演論文集, No.3-1-9 (昭 44-5), 273.
- (8) 早坂, 電気試験所報告, No. 467 (昭 18), 1.
- (9) 早坂, 音響工学, (昭 34), 174, 日刊工業新聞社.

討 論

〔質問〕 梶 昭次郎 (東京大学工学部)

(1) 図9はレゾナンスチューブ発生音が基本周波数の2倍, 3倍, …… n 倍の周波数成分を含むことを示している。一方音の発生を文字どおり管の共鳴と考えるならば音のモードは開口端で腹, 閉端で節となるもので発生音周波数は基本周波数の3倍, 5倍, …… $2n+1$ 倍となるはずである。著者は図9の基本周波数の2倍, 4倍, …… $2n$ 倍の音の発生をどのように理解されておられるのか。

(2) 著者は理論解析においてなら根拠を示すことなくナビエ・ストークスの運動方程式(1)を採用している。さらに乱流うず粘性係数を導入し, 検討の部分では粘性係数があつたかも現象の本質であるかのように取扱っておられる。

音の発生機構において流れの粘性や乱れが重要なことは考えられるが, 音の伝ばに関する運動方程式において粘性を本質的とみることにどれほどの根拠があるのか。ちなみに式(1)において粘性項と慣性項の比を考えてみると

$$\frac{\mu}{\rho \omega D_i^2} \approx 10^{-3} \sim 10^{-4}$$

と粘性項はきわめて小さくなる。

また, 音の発生機構についていっさいふれることなくヒステリシスといった現象の側面を説明するために粘性係数をいじくりまわすようなことは危険すぎないであろうか。

(3) 二次共鳴器についてはなぜ式(18)のように境界条件が3個も必要なのか。また式(22)や(23)が境界条件式(18)を満足しているとうどうしていえるのか。式(24)は本論文の本質ともいべき式(29)にきいてくるようだが結果はだいじょうぶであろうか。

〔回答〕 (1) レゾナンスチューブの音の発生は, 管の共鳴によって起こるものである。しかし, その振幅は大きく, 音響的な共鳴で考える正弦波状の波動による定在波状態の共鳴とは異なったものとなる。したがって, 音響的共鳴では, 管の固有振動モードによる奇数次の高調波成分が考えられるが, レゾナンスチューブでは大振幅波動であり, チューブ内での圧縮波前縁は先鋭化し, 膨張波ではし緩し, 内部で波にひずみが生じる。その結果, 開口端より放射される音には, 整数倍の高調波成分を含みうるものとする。

(2) レゾナンスチューブ内流れについて運動方程式を考える場合, せん断項を省略すると, 音響インピーダンスのレジスタンス分は零となり, 本文式(29)

の結合による音響リアクタンス増加分は, 二次共鳴器共振点で無限大となり, これは有限な履歴現象に矛盾する。したがってチューブ内平均変位 ξ の減衰に関与する流れのせん断力を考慮すると, 音響インピーダンスのレジスタンス分が定まり, 有限な履歴現象を説明することができる。そこで, 運動方程式は, ナビエ・ストークスの式を適用したわけだが, 流れのせん断力項に粘性によるもののみを考慮すると, 履歴現象の ξ の値が, 実験値に比べて著しく大きくなる。そのため, せん断力項に, 乱れによるものを合わせて考慮し, 定量的に実験値に近づけた。

すなわち本著では, 粘性が現象の本質であるとしているのではなく, あくまでも現象の本質は, 音響的結合であり, それによって生じる音響相互インダクタンスである。

また, 乱流うず粘性係数値を変化させて現象を比較したのは, レジスタンス分の増減によって, 履歴現象が受ける影響を調べたものである。

なお本著では, 音響インピーダンスのレジスタンス分を定める要素として, 粘性を代表させて考えたが, これ以外の要素について今後検討し, 音響的結合による流れの変化の状態を明らかにしていく所存である。

(3) 二次共鳴器についての音響インピーダンスは, $x=d$ なる位置について定める必要がある。この場合, $x=d$ に仮想ピストン膜をおくと, $0 \leq x \leq d$, $d \leq x \leq l_s$ の二つの部分に対する音響インピーダンスが直列につながったものとしてすることができる。したがって本文式(24)の音響インピーダンスの式には誤りはないが, 式(22), (23)は, ご指摘のように, 書き誤っている。正しくは,

$$\xi = \left[\{U(x) - U(x-d)\} \frac{e^{k_2 x} - e^{-k_2 x}}{e^{k_2 d} - e^{-k_2 d}} + U(x-d) \frac{e^{k_2(l_s-x)} + e^{-k_2(l_s-x)}}{e^{k_2(l_s-d)} + e^{-k_2(l_s-d)}} \right] \xi_0 e^{i\omega t} \quad \dots(22)$$

$$p = \kappa k_2 \left[\{U(x) - U(x-d)\} \frac{e^{k_2 x} + e^{-k_2 x}}{e^{k_2 d} - e^{-k_2 d}} + U(x-d) \frac{e^{k_2(l_s-x)} - e^{-k_2(l_s-x)}}{e^{k_2(l_s-d)} + e^{-k_2(l_s-d)}} \right] \xi_0 e^{i\omega t} \quad \dots(23)$$

となる。ここで $U(x)$ は, 単位ステップ関数である。

ご指摘いただき, 感謝する。

したがって, 式(22), (23)より, $x=d$ なる点においては, 変位は連続であるが, 音圧は, x の正方向をみた場合と, 負方向をみた場合とでは異なっており, 二つの音場の部分にわけられていることになる。したがって境界条件は, 式(18)のように定める必要

があるわけである。

〔質問〕 梶 昭次郎

(2) について、レゾナンスチューブの開口端位置で音響抵抗が存在することは明らかで、けっして運動方程式に粘性項を導入して初めて音響抵抗が現われるという性質のものではないと思う。すなわち、レゾナンスチューブの開口端では管端としていわゆる放射音響抵抗が存在し〔付図 1 の (a)〕、一方二次共鳴器ではレゾナンスチューブ開口端位置で断面積が急変するためやはり音響抵抗が存在する〔図の (b)〕。そして現実の音響系 (c) は (a)、(b) という二つの音響系が結合したものと考えるのが妥当だと思う。

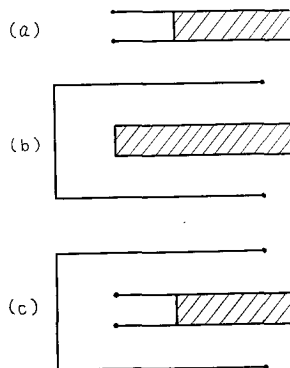
本来このようにして定まるべき音響抵抗を単に媒質の粘性抵抗で置換える (運動方程式に粘性項を導入して) というのはかなり誤った方向であり、実験結果に合わせるためその粘性係数を変化させるようなことも意味がないように思う。

〔回答〕 音響管の音響インピーダンスは、開口端にピストンを仮定し、そのピストンの受ける反作用力によってもとめる。したがって、インピーダンスは、開口端から閉端方向をみたインピーダンスと、外部への音の放射インピーダンスとの和として与えられる。しかし当然のことながら、インピーダンスは前者が支配的であり、後者はあくまでも付加的なものにすぎない。前者は、本文式 (21) で与えられ、粘性を考慮して、そのレジスタンス分 (R_t) およびリアクタンス分 (X_t) が定まる。一方後者は、無限大パツフルの仮定のもとで、

$$Z_R = \pi r_t^2 \rho a \left\{ 1 - \frac{a}{\omega r_t} J_1 \left(\frac{2\omega r_t}{a} \right) \right\} - j\omega \frac{\pi \rho a^3}{2\omega^3} K_1 \left(\frac{2\omega r_t}{a} \right)$$

となることが知られている。

ここで、両者の大きさを比較するため、実部のみを



付図 1

考える。本論文中的実験における装置の幾何学的条件および周波数範囲について、 20°C での空気の粘性係数値を代入すると、

$$R_t \approx 2.0 \times 10^{-1} \text{ g/s}$$

であり、放射インピーダンスの実部 R_{Rt} は、

$$R_{Rt} \approx 2.5 \times 10^{-3} \text{ g/s}$$

である。このことから、放射インピーダンスは省略できることが明らかである。

さらに、二次共鳴器については、断面積の変化は約 4% であり、むしろレゾナンスチューブとの幾何学的位置関係の影響は、チューブ外壁 ($r=r_0$) で変位 0 になるための断面平均変位減少による音響抵抗増加として現われる。したがって、本文式 (5) の境界条件が必要になる。また、図 11 (b) のようなピストン位置から、開口端方向をみたインピーダンスは、本文式 (24) の第 2 項により定まり、その実部は、

$$R_0 \approx 3.0 \times 10 \text{ g/s}$$

であり、付加される放射インピーダンスの実部 R_{R_0} は、

$$R_{R_0} \approx 8.0 \text{ g/s}$$

となる。

すなわち、この音響系について、音響インピーダンスを決定する場合、損失項としては第 1 に粘性を考慮すべきである。

しかし、これらは、あくまでも音響的な取扱いの場合であり、実際にそくして有限振幅波として扱う場合には、当然定量的なずれを生じることが考えられ、今後検討すべき問題ではある。

〔質問〕 大橋 秀雄 (東京大学工学部)

二次共鳴器の履歴現象に関して巧みな説明を与えられ、感心した。

このような履歴現象が、レゾナンスチューブの一次と二次共鳴器の一次、二次などの組合せのみならず、二次共鳴器の一次とレゾナンスチューブの高次との組合せにおいても起こるかどうか伺いたい。

〔回答〕 レゾナンスチューブでは、基本周期での共振状態が支配的であり、発生音の高調波成分は、大振幅波動によるひずみにもとづくものである。したがって二次共鳴器の共鳴と、履歴現象は、レゾナンスチューブの基本共振周期と、二次共鳴器の各固有共振モードの周期とが近接するところで起こるが、レゾナンスチューブ発生音の高調波成分周期での共鳴、および履歴現象は起こりにくく、実験においても観測されていない。

〔質問〕 岩本順二郎 (東京電機大学)

ノズルとレゾナンスチューブ開口端の間の距離について触れておられないようだが、この距離によって、

周波数および履歴現象そのものも若干異なってくるように思われるがいかがか。また、実験において、この距離はどのくらいに設定されておられるのか伺いたい。

〔回答〕 本著における実験では、無次元化ノズル・チューブ間距離 (d/D_N) は、2.5であり、この値は第二共振領域で安定な共振をおこす位置を示す。また共振周期は、レゾナンスチューブの温度状態が定常になった後では、 d/D_N の変化によっても、数%前後しか

変化しない。しかし、二次共鳴器をつけることによる総圧曲線の変化はほとんどないが、履歴現象が起こる場合、ノズルからの噴流も影響を受ける。そのため、安定な共振領域はせばまり、レゾナンスチューブ共振周期にとびが起こる前後では、 d/D_N の変化によっても、とびが起こってしまう。したがって本実験では、このような影響をのぞくために、安定で定常な共振状態が得られる d/D_N の値を選んで、履歴現象の観測を行なった。