

偏平回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する円柱のねじり*

内山 豊美**, 土田 栄一郎***
Toyomi UCHIYAMA, Eiichiro TSUCHIDA
中原 一郎†, 小玉 正雄††
Ichiro NAKAHARA, Masao KODAMA

Key Words: Elasticity, Strength of Materials, Penny-Shaped Crack, Stress Intensity Factor, Torsion

1. 緒 言

铸件にしばしば存在するブローホール, 巣などによる応力集中を明らかにするために, 著者ら⁽¹⁾⁽²⁾は, さきに, 回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する円柱が軸方向に様な引張荷重を受ける問題に対する解析法を示すとともに, 空かあるいはき裂近傍の応力分布および最大引張応力におよぼす空か大きさや形状比の影響を明らかにし, さらに, 円形き裂に対する応力拡大係数を求めた. 同様の欠陥を有する弾性体がねじりモーメントを受ける場合も, 回転するシャフトの設計に関連して, 実用上重要である. 回転だ円体状空かあるいは介在物を有する円柱がねじりモーメントを受ける場合については, Neuber⁽³⁾, Das⁽⁴⁾, 宮本⁽⁵⁾らによって解析されたが, これらの結果は円柱側面の条件を考慮していないため, 無限体中に存在する空かや介在物に対するもので, 有限体に対する解析は行われていない. 一方, 円形き裂を有する円柱がねじりモーメントを受ける場合の解析は, Benthem ら⁽⁶⁾によって応力拡大係数に対する近似解が与えられているだけで, き裂周辺の応力分布および応力拡大係数に関する

厳密な弾性計算はなされていない.

本研究は, 偏平回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する円柱がねじりモーメントを受ける軸対称問題を, 三次元弾性論に基づいて厳密に解析したものである. 解析においては, Dougall の調和応力関数に偏平回転だ円体調和関数および円柱調和関数を与え, 両者を互いに座標変換することにより, 空か面と円柱側面の境界条件を同時に満足させた. そして, 一つの極限の場合として, 円形き裂に対する解を求めた.

2. 解 析 法

2.1 偏平回転だ円体状空かを有する円柱のねじり

図 1 に示されるように, 円柱の半径を単位長さとしてすべての長さの基準にとるものとする. 図にみられる長軸 $2a$, 短軸 $2b$ の偏平回転だ円体は, z 軸を含む x 平面上で座標原点 O を中心として z 軸上に長径 $2a$, y 軸上に短径 $2b$ のだ円を考え, これを z 軸まわりに回転させて得られたものである. 解析に当たって, 円柱座標 (r, θ, z) および偏平回転だ円体座標 (α, β, γ) を用いれば, 両座標間には,

$$\left. \begin{aligned} r &= c \cosh \alpha \sin \beta = c \xi \bar{\eta} \\ \theta &= \gamma \\ z &= c \sinh \alpha \cos \beta = c \xi \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

の関係がある. ここで, $\xi = \sinh \alpha$, $\bar{\xi} = \cosh \alpha$, $\eta = \cos \beta$, $\bar{\eta} = \sin \beta$ であり, c は原点と焦点間の距離である.

いま, 円柱座標のもとで, Dougall の 3 個の調和応力関数のうち λ_3 を用いて変位を次のように表せば, これは物体力のない軸対称ねじりの場合の三次元弾性基礎方程式の解になる.

$$2Gv_0 = -2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial r}, \quad u_r = w_z = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここで, u_r, v_θ, w_z はそれぞれ r, θ, z 方向の変位成分, G は横弾性係数であり,

$$\nabla^2 \lambda_3 = 0, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である. 座標間の関係式 (1) を用いて, 式 (2) を

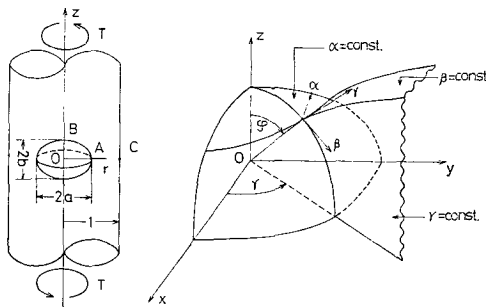


図 1 座標系

* 昭和 53 年 10 月 11 日 第 56 期全国大会講演会において講演, 原稿受付 昭和 55 年 10 月 9 日.
** 正員, 埼玉県庁 (〒338 浦和市高砂 3-15-1).
*** 正員, 埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255).
† 正員, 東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1).
†† 正員, (〒930 大宮市今羽町 477-9-101).

偏平回転だ円体座標に変換すれば、次のようになる。

$$2Gw_r = -2ch^2\xi\bar{\eta}\left(\xi\frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi} - \eta\frac{\partial\lambda_3}{\partial\eta}\right), \quad u_\alpha = v_\beta = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 u_α , v_β , w_r はそれぞれ α , β , r 方向の変位成分であり、

$$\nabla^2\lambda_3 = 0, \quad \nabla^2 \equiv h^2\xi^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2h^2\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + h^2\bar{\eta}^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - 2h^2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}, \quad h^2 \equiv \frac{1}{c^2(\xi^2 + \eta^2)}$$

である。さらに、応力成分を求めると以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\beta r} &= ch^3\bar{\xi}\bar{\eta}^2\left[\xi\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial\xi\partial\eta} - \eta\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial\eta^2} - c^2h^2\left\{2\xi\eta\frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi} + (\xi^2 - \eta^2)\frac{\partial\lambda_3}{\partial\eta}\right\}\right] \\ \tau_{r\alpha} &= ch^3\xi^2\bar{\eta}\left[\eta\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial\xi\partial\eta} - \xi\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial\xi^2} + c^2h^2\left\{(\xi^2 - \eta^2)\frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi} - 2\xi\eta\frac{\partial\lambda_3}{\partial\eta}\right\}\right] \\ \sigma_\alpha &= \sigma_\beta = \sigma_r = \tau_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

まず、空かのない円柱を z 軸まわりに大きさ T のトルクでねじった場合の解として、 λ_3 に次の調和関数を与える。

$$[I] \quad \lambda_3 = \frac{G\omega}{6} z(2z^2 - 3r^2) = \frac{G\omega}{6} c^3\xi\eta(2\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\bar{\eta}^2) \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 $\omega = 2T/\pi G$ は単位長さ当たりのねじり角である。式(5)より導かれる応力成分は、円柱座標では、

$$\tau_{\theta z} = G\omega r, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

となり、円柱側面では応力自由である。この円柱内に、偏平回転だ円体面 ($\alpha = \alpha_0$) を考えると、この面には、次のような応力が生じている。

$$(\tau_{r\alpha})_{\alpha=\alpha_0} = G\omega c^2 h_0 \xi_0^2 \eta \bar{\eta}, \quad (\tau_{\beta r})_{\alpha=\alpha_0} = -G\omega c^2 h_0 \xi_0 \bar{\xi}_0 \eta^2 \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、

$$\xi_0 = \sinh \alpha_0, \quad \bar{\xi}_0 = \cosh \alpha_0, \quad h_0 = \frac{1}{c^2(\xi_0^2 + \eta^2)}$$

であり、このほかの応力成分は恒等的に零になる。

それゆえ、無限遠方においてすべての変位および応力が消失し、以下に示される境界条件を満足する解を導いて、応力関数 [I] の解に重ね合わせれば、偏平回転だ円体状空かを有する円柱のねじりに対する解が得られる。

境界条件：

(i) 円柱側面 $r=1$ において

$$(\tau_{r\theta})_{r=1} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

(ii) 空か面 $\alpha = \alpha_0$ において

$$(\tau_{r\alpha})_{\alpha=\alpha_0} = -G\omega c^2 h_0 \xi_0^2 \eta \bar{\eta} \quad \dots\dots\dots(9)$$

境界条件式(8)、(9)を満足する解を導くために、偏平回転だ円体状空かを有する円柱は偏平回転だ円体領域を除く無限体領域と円柱領域との共通領域であることに注目して、前者に対してだ円体の焦点に特異点をもつ偏平回転だ円体調和関数を、後者に対して円柱調和関数を用いて、応力関数 λ_3 に次のような調和関数を与える*1。

$$[II] \quad \lambda_3 = G\omega \sum_{m=0}^{\infty} A_m \{q_{2m+1}(\xi)P_{2m+1}(\eta) + q_{2m+3}(\xi)P_{2m+3}(\eta)\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$[III] \quad \lambda_3 = G\omega \int_0^{\infty} \phi(\lambda) I_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 A_m および $\phi(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり、 $I_n(\lambda r)$ は n 次の第1種変形ベッセル関数、 $P_n(\eta)$ は n 次の第1種ルジャンドル関数、また $q_n(\xi) = i^{n+1}Q_n(i\xi)$ は n 次の第2種変形ルジャンドル関数⁽²⁾である。

特に、円柱半径に比べて空かが十分小さい場合には、応力関数 [I]、[II] だけで解析でき、式(10)で、

*1 [II] の応力関数は、 $\lambda_3 = G\omega \sum_{m=0}^{\infty} A_m q_{2m+1}(\xi)P_{2m+1}(\eta)$ においても解析できるが、極限として円形き裂にした場合には、これを式(10)の形に変形しなければならないので、最初からこの形において。

$$A_0 = \frac{2}{5} c^3 \left(3 \operatorname{arccot} \xi_0 - \frac{3\xi_0^3 + 5\xi_0}{\xi_0^4} \right)^{-1}, \quad A_m = 0 \quad (m \geq 1) \quad \dots\dots\dots (12)$$

とおけば, 境界条件式 (9) は満足される. この結果は, 偏平回転円体状空かが無限体中に存在する場合の解で, これより導かれる応力成分は Neuber⁽³⁾ が求めた結果に一致する.

まず, 円柱側面における境界条件 (i) を満足させるために, 関係式^{(7)*2}

$$\int_0^\infty i_{2m+1}(\lambda c) K_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda = (-1)^m \frac{\pi}{2c} q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) \quad \dots\dots\dots (13)$$

を用いて応力関数 [II] を書き直すと,

$$[IV] \quad \lambda_3 = G\omega \sum_{m=0}^\infty a_m \int_0^\infty \{i_{2m+1}(\lambda c) - i_{2m+3}(\lambda c)\} K_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる. ここで, $i_n(\lambda c) = \sqrt{\pi/2\lambda c} I_{n+1/2}(\lambda c)$ は第 1 種変形球ベッセル関数⁽²⁾, $K_n(\lambda r)$ は n 次の第 2 種変形ベッセル関数であり, $a_m = (-1)^m (2c/\pi) A_m$ である. 応力関数 [III], [IV] より応力成分を求め, 円柱側面における境界条件式 (8) を満足させると,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\tau_{r\theta}}{G\omega}\right)_{r=1} = & \int_0^\infty \lambda^2 \left\{ I_0(\lambda) - 2 \frac{I_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \phi(\lambda) \\ & + \left\{ K_0(\lambda) + 2 \frac{K_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \sum_{m=0}^\infty a_m \{i_{2m+1}(\lambda c) - i_{2m+3}(\lambda c)\} \sin \lambda z d\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となる. 式 (15) にフーリエ逆変換を施せば, 未知関数 $\phi(\lambda)$ は次のように決定される.

$$\phi(\lambda) = -\frac{K_2(\lambda)}{I_2(\lambda)} \sum_{m=0}^\infty a_m \{i_{2m+1}(\lambda c) - i_{2m+3}(\lambda c)\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

次に, 空か面における境界条件 (ii) を満足させるために, 関係式^{(7)*2}

$$I_0(\lambda r) \sin \lambda z = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m (4m+3) i_{2m+1}(\lambda c) p_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) \quad \dots\dots\dots (17)$$

を用いて応力関数 [III] を書き直すと,

$$[V] \quad \lambda_3 = G\omega \sum_{n=0}^\infty \alpha_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる. ここで, $p_n(\xi) = (-i)^n P_n(i\xi)$ は n 次の第 1 種変形ルジャンドル関数⁽²⁾であり,

$$\alpha_n = -\frac{2c}{\pi} (4n+3) \sum_{m=0}^\infty (-1)^{m+n} A_m \int_0^\infty \frac{K_2(\lambda)}{I_2(\lambda)} \{i_{2m+1}(\lambda c) - i_{2m+3}(\lambda c)\} i_{2n+1}(\lambda c) d\lambda \quad \dots\dots\dots (19)$$

である. 応力関数 [II], [V] より応力成分を求め, さらに, 式 (9) をルジャンドル関数で書き直して, 境界条件 (ii) を満足させると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{r\alpha}}{G\omega c^3 h^3 \xi^2 \eta}\right)_{\alpha=\alpha_0} = & \sum_{n=1}^\infty \{t_{A1} A_{n-3} + (t_{A1} + t_{A2}) A_{n-2} + (t_{A2} + t_{A3}) A_{n-1} \\ & + (t_{A3} + t_{A4}) A_n + t_{A4} A_{n+1} + t_{A1} \alpha_{n-2} + t_{A2} \alpha_{n-1} + t_{A3} \alpha_n + t_{A4} \alpha_{n+1}\} P_{2n}'(\eta) \\ = & -\frac{8}{693} c^3 P_6'(\eta) - \left(\frac{4}{35} \xi_0^2 + \frac{4}{77}\right) c^3 P_4'(\eta) - \left(\frac{1}{3} \xi_0^4 + \frac{2}{7} \xi_0^2 + \frac{5}{63}\right) c^3 P_2'(\eta) \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\left. \begin{aligned} t_{A1} = & \frac{(2n-1)(2n-2)}{(4n-1)(4n-3)(4n-5)} \{ (2n-4) q_{2n-3}'(\xi_0) - \xi_0 q_{2n-3}''(\xi_0) \} \\ t_{A2} = & -\frac{1}{(4n+3)(4n-1)(4n-3)} [2(2n-1)(4n+3)(4n-3) \xi_0 q_{2n-1}(\xi_0) \\ & - 2\{n(4n+3)(4n-3)\xi_0^2 + 2(6n^3 - 4n^2 - 5n + 3)\} q_{2n-1}'(\xi_0) \\ & + \{(4n+3)(4n-3)\xi_0^3 + (4n^2 + 2n - 3)\} \xi_0 q_{2n-1}''(\xi_0)] \\ t_{A3} = & -\frac{1}{(4n+5)(4n+3)(4n-1)} [2(2n+2)(4n+5)(4n-1) \xi_0 q_{2n+1}(\xi_0) \\ & - \{(2n+1)(4n+5)(4n-1)\xi_0^2 + (24n^3 + 52n^2 + 14n - 15)\} q_{2n+1}'(\xi_0) \\ & - \{(4n+5)(4n-1)\xi_0^3 + (4n^2 + 2n - 3)\} \xi_0 q_{2n+1}''(\xi_0)] \\ t_{A4} = & \frac{(2n+3)(2n+2)}{(4n+7)(4n+5)(4n+3)} \{ (2n+5) q_{2n+3}'(\xi_0) + \xi_0 q_{2n+3}''(\xi_0) \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

*2 文献(7)では, 半奇数次の第 1 種変形ベッセル関数 $I_{n+1/2}(\lambda c)$ で表示されているが, 本論文では計算の都合上, 第 1 種変形球ベッセル関数 $i_n(\lambda c)$ で書き直した.

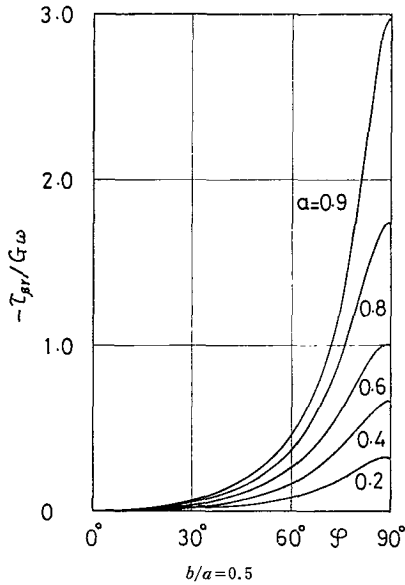


図 2 空か面における $\tau_{\beta r}$ の分布

であり、' はそれぞれの変数による微分を表す。また、 t_{a1} は t_{A1} に含まれる第 2 種変形ルジャンドル関数 $q_n(\xi_0)$ を第 1 種変形ルジャンドル関数 $p_n(\xi_0)$ に置き換えたものとなる。

式 (20) で、 $p_{2n}'(\eta)$ の各係数を等置すれば、 A_n に関する無限連立一次方程式が得られる。これら A_n について解けば、偏平回転だ円体状空かを有する円柱のねじりの解は完全に決まる。そして、全体の変位および応力各成分は、応力関数 [I], [II], [III] を重ね合わせて得られる。

2.2 円形き裂を有する円柱のねじり $\alpha_0=0$ とおくと、 $a=c$, $b=0$ となって、偏平回転だ円体状空かは、原点 O を中心とする半径 c の円形き裂となる。連立方程式 (20) は $\alpha_0=0$ の場合にも有効であって、 $\xi_0=0$ において解けば、円形き裂を有する円柱のねじりの場合の係数が決まる。特に、式 (12) において、 $\xi_0=0$ とおけば、

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\beta r}}{G\omega} = & -c^2 h \xi \bar{\xi} \bar{\eta}^2 - c^3 h^3 \bar{\xi} \bar{\eta}^2 \sum_{n=0}^{\infty} [(A_n q_{2n+1}(\xi) + \alpha_n p_{2n+1}(\xi)) \{(\xi^2 - \eta^2) P_{2n+1}'(\eta) \\ & + (\xi^2 + \eta^2) \eta P_{2n+1}''(\eta)\} + \xi \{A_n q_{2n+1}'(\xi) + \alpha_n p_{2n+1}'(\xi)\} \{2\eta P_{2n+1}(\eta) \\ & - (\xi^2 + \eta^2) P_{2n+1}'(\eta)\} + A_n q_{2n+3}(\xi) \{(\xi^2 - \eta^2) P_{2n+3}'(\eta) + (\xi^2 + \eta^2) \eta P_{2n+3}''(\eta)\} \\ & + A_n \xi q_{2n+3}'(\xi) \{2\eta P_{2n+3}(\eta) - (\xi^2 + \eta^2) P_{2n+3}'(\eta)\}] \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

特に、空か面における応力は、上式において $\xi = \xi_0 (= b/c)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 (= a/c)$ とおけば求められる。

図 2 は、形状比が $b/a=0.5$ の場合の空か面における $\tau_{\beta r}$ の分布を示したものである。ここで、 φ は x 軸から測った角度で、空か面においては β と $\tan \varphi = (a/b) \tan \beta$ の関係がある。応力 $\tau_{\beta r}$ は $\varphi=0^\circ$ (図 1 の点 B) で零であり、 φ の増加とともに単調に増加して、 $\varphi=90^\circ$ (点 A) で最大となる。また、 $\varphi < 30^\circ$ では空かの大

$$A_0 = \frac{4c^3}{15\pi}, \quad A_1 = 0 \quad (m \geq 1) \dots \dots \dots (22)$$

となり、円形き裂が無限体中に存在する場合の解が得られる。

さて、本問題のき裂の変形はモード III であるから、応力拡大係数は次式で定義される。

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2\pi(r-c)} (\tau_{z\theta})_{z=0} \dots \dots \dots (23)$$

偏平回転だ円体座標では、 $z=0 (r > c)$ は $\eta=0$ で表され、また、この面においては $r = c\bar{\xi}$, $r^2 - c^2 = c^2(\bar{\xi}^2 - 1) = c^2\bar{\xi}^2$ すなわち $r - c = c^2\bar{\xi}^2 / (c\bar{\xi} + c)$ であり、 $(\tau_{z\theta})_{z=0} = -(\tau_{\beta r})_{\eta=0}$ である。さらに、 $r \rightarrow c$ のとき $\bar{\xi} \rightarrow 0$ であることを考慮すれば、結局、式 (23) は、

$$K_{III} = -\sqrt{\pi c} \lim_{\bar{\xi} \rightarrow 0} \bar{\xi} (\tau_{\beta r})_{\eta=0} \dots \dots \dots (24)$$

となる。特に、き裂が無限体中にある場合には、応力 $(\tau_{\beta r})_{\eta=0}$ は

$$\left(\frac{\tau_{\beta r}}{G\omega}\right)_{\eta=0} = \frac{2c}{3\pi} \left(3 \operatorname{arccot} \bar{\xi} - \frac{3\bar{\xi}^2 + 2}{\bar{\xi}^3}\right) \dots \dots \dots (25)$$

となるから、これを式 (24) に代入すれば、無限体中にある円形き裂がねじりを受ける場合の応力拡大係数 $K_{III\infty}$ が、次式のとおり求まる。

$$K_{III\infty} = \frac{4G\omega c^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \dots \dots \dots (26)$$

3. 数 値 計 算

まず、形状比を $b/a=0.5$ として、 $a=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9$ の各場合について、次に、形状比をいくつか変化させた場合についても数値計算を行った。計算に当たっては、式 (19) の α_n に含まれる積分値が必要となるが、これはシンプソン則による数値積分によって求めた。すべての無限級数の収束は良好であるが、空かあるいはき裂が大きくなるにしたがって次第に悪くなる。そこで、最終的に得られる結果の有効数字が 3 けた以上になるように、 A_n を 9~14 項とって計算を行った。以下に、これらの係数より得られる空かあるいはき裂近傍の応力を示す。

弾性体内の任意の点における応力 $\tau_{\beta r}$ は、次式で表される。

きさの影響はほとんど見られないが、 $\varphi > 30^\circ$ では影響を受け、その影響の度合は φ の増加とともに著しくなる。

図3に $b/a=0.5$ の場合の r 軸上の応力 $(\tau_{z\theta})_{z=0} = -(\tau_{\theta r})_{r=0}$ の分布を示す。 $\tau_{z\theta}$ は空か面より少し離れた位置で最小となるが、これに対し、最大せん断応力は a がだいたい 0.6 以下では円柱側面で生じ、 a がそれよりも大きくなると空か面における応力が円柱側面における応力よりも大きくなる。また、点線は空か面のせん断応力 $(\tau_{z\theta})_{r=a}$ の a による変化を示しており、 $(\tau_{z\theta})_{r=a}$ は a の増加とともに急激に増加し、

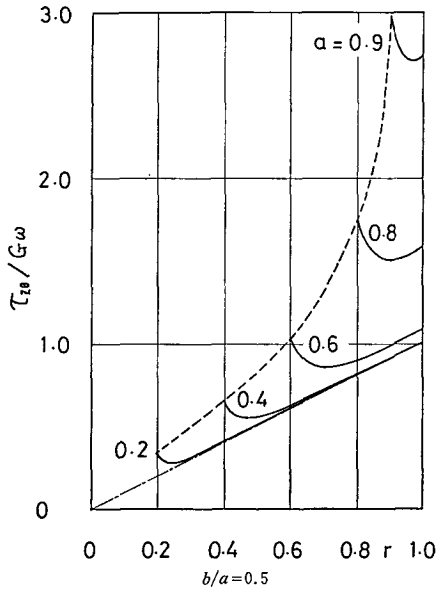


図3 $z=0$ 面における $\tau_{z\theta}$ の分布

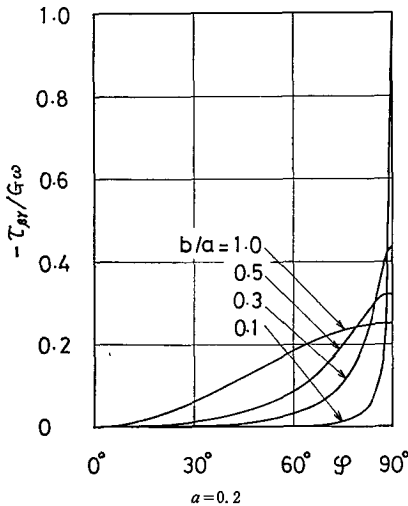


図4 空か面における $\tau_{\theta r}$ の分布

その増加の度合は円柱側面のせん断応力 $(\tau_{z\theta})_{r=1}$ の a による変化に比べ著しい。

図4は、 $a=0.2$ として、形状比を $b/a=0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ と変えた場合の空か面における $\tau_{\theta r}$ の分布を示したものである。特に、 $b/a=1.0$ は球かの場合を表しており、川島ら⁽⁹⁾によって求められた結果を使用した。いずれの場合も、 $\tau_{\theta r}$ は φ の増加とともに単調に増加しているが、点A近傍における応力の立ち上がりは b/a が小さいほど急激である。また、点

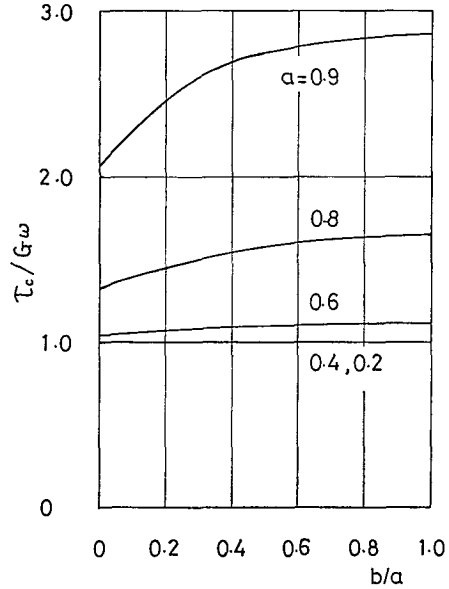


図5 τ_c の形状比 b/a による変化

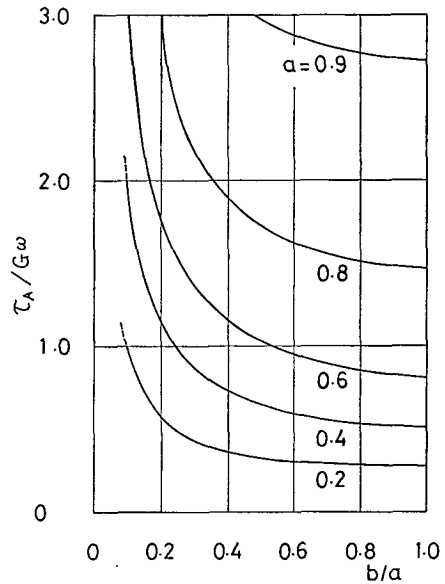


図6 τ_A の形状比 b/a による変化

表 1 $\tau_A = \tau_C$ となる形状比

a	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
b/a	0.10	0.25	0.45	0.63	0.69

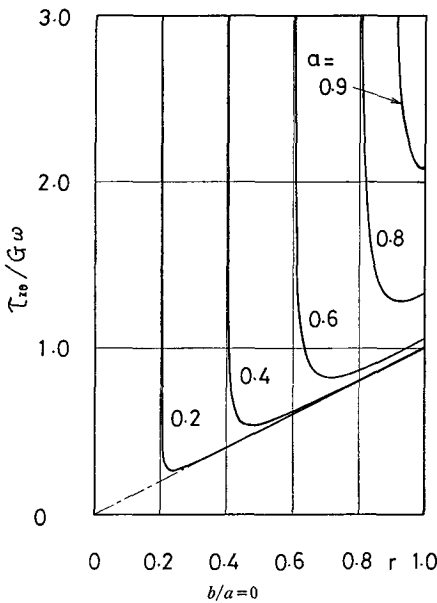


図 7 $z=0$ 面における $\tau_{z\theta}$ の分布

A における応力は b/a が小さいほど大きい。

以上の計算結果より、最大せん断応力は、円柱側面上の $z=0$ の点 (点 C) に生じる $\tau_{z\theta}$ または空か面上

の円柱側面に最も近い点 (点 A) に生じる $\tau_{z\theta}$ であることがわかった。そこで、これらの応力をそれぞれ $\tau_C = (\tau_{z\theta})_{r=1, z=0}$, $\tau_A = (\tau_{z\theta})_{r=a, z=0}$ として、これらと形状比 b/a の関係を求めたのが図 5, 6 である。 τ_C については、 $b/a=1.0$ すなわち球かの場合が最も大きく、 b/a の減少とともにゆるやかに減少する。また、 τ_A については、逆に、球かの場合が最小であり、 b/a の減少とともに急激に増加して、空かがき裂に近づくにしたがって無限大に向かう。なお、図 5 で $a=0.2$ と 0.4 の曲線は線の太さの範囲で一致する。

これらの二つのグラフを重ね合わせれば $\tau_A = \tau_C$ となる b/a の値がわかるが、これをまとめると表 1 のようになる。 a を一定にした場合、表 1 の下欄に示される値以下の b/a に対しては $\tau_A > \tau_C$ となる。すなわち、空かが大きければ、形状が球かに近くなっても、空か面における応力が円柱側面における応力よりも大きくなる。

図 7 に $b/a=0$ すなわち円形き裂の場合の $z=0$ 面における $\tau_{z\theta}$ の分布を示した。 $\tau_{z\theta}$ はき裂縁で無限大となるが、やや離れた位置で最小値を示す。その後は、ほぼ r の一次関数的に増加する。すなわち、き裂の場合、応力はき裂縁近傍に集中し、応力集中がきわめて局所的となる。

次に、応力拡大係数を求めるために、極限值 $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi$ ($\tau_{\beta r}$) $_{r=0}$ を計算すると、

$$-\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left(\frac{\tau_{\beta r}}{G\omega} \right)_{r=0} = \Sigma_1 + \frac{\Sigma_2}{\xi^2} \dots\dots\dots(28)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 = & -\frac{1}{c^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[\left\{ \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!} - \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(4m-4k+1)(2m-2k-1)!!}{(2k+1)(2m-k+1)(2m-2k)!!} \right\} P_{2m+1}'(0) \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{(4m-4k+1)(2m-2k+1)!!}{(2k+1)(2m-k+1)(2m-2k-2)!!} \left. \right\} P_{2m+1}'(0) \\ & + \left\{ \frac{(2m+3)!!}{(2m+2)!!} - \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \frac{(4m-4k+5)(2m-2k+1)!!}{(2k+1)(2m-k+3)(2m-2k+2)!!} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(4m-4k+5)(2m-2k+3)!!}{(2k+1)(2m-k+3)(2m-2k)!!} \right\} P_{2m+3}'(0) \left. \right\} \dots\dots\dots(29) \\ \Sigma_2 = & \frac{1}{c^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(4m-4k+1)(2m-2k-1)!!}{(2k+1)(2m-k+1)(2m-2k)!!} P_{2m+1}'(0) \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \frac{(4m-4k+5)(2m-2k+1)!!}{(2k+1)(2m-k+3)(2m-2k+2)!!} P_{2m+3}'(0) \right\} \end{aligned} \right.$$

ここで、項数を多くするにしたがって $\Sigma_2 \rightarrow 0$ となるので、 Σ_2/ξ^2 の項を省略する⁽²⁾と、結局 K_{\square} は式 (24) より

$$K_{\square} = G\omega\sqrt{\pi c} \Sigma_1 \dots\dots\dots(30)$$

となる。これより、応力拡大係数 K_{\square} と円形き裂の半径 c との関係を求めたのが、図 8 である。 K_{\square} は c の増加とともに増加し、 c が 1 に近づくにしたがって無限大に発散する。また、 c の K_{\square} に及ぼす影響は、特に $c > 0.4$ で顕著である。なお、 $c=0$ に対する応力拡大係数は、円形き裂が無限体中に存在する場合の値 $K_{\square\infty} = 4G\omega c^{3/2}/(3\sqrt{\pi})$ に相当する。

表 2 応力拡大係数

c		0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
$K_{II}/K_{II\infty}$	厳密解	1.000	1.003	1.025	1.149	1.409
	近似解 ⁽⁶⁾	1.000	1.003	1.025	1.147	1.404

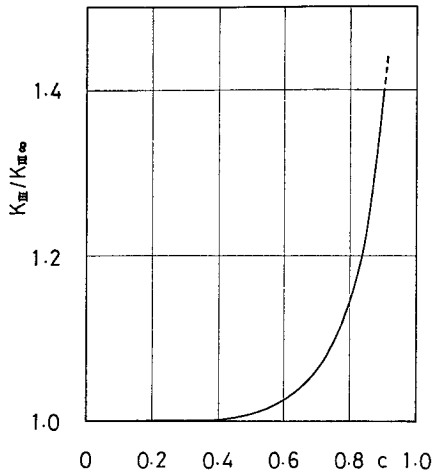


図 8 応力拡大係数

本解析法による厳密解と Benthem ら⁽⁶⁾による近似解を比較したのが表 2 である。これより、両者の差異は最大 0.4% で、よい一致を示した。

4. 結 言

1 個の偏平回転円筒状空かあるいは円形き裂を有する円柱がねじりモーメントを受ける問題を、三次元弾性論に基づいて厳密に解析する方法を示した。理論解に基づいて数値計算を行い、空かあるいはき裂周辺の応力分布ならびに応力集中に及ぼす空かの大きさや

形状比の影響を明らかにするとともに、円形き裂に対する応力拡大係数を求めた。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 最大せん断応力は、円柱側面上の点 C あるいは空か面上の円柱側面に最も近い点 A に生じ、空かが大きくなるにしたがって増加する。

(2) 点 C に生じる応力は、球かの場合が最も大きく、形状比 b/a が減少するにつれゆるやかに減少する。これは、空かがき裂に近づくにしたがい応力集中が局所的になるためである。

(3) 点 A に生じる応力は、球かの場合が最も小さく、 b/a が減少するにつれて急激に増加し、空かがき裂に近づくにしたがって無限大に発散する。

(4) 空か面におけるせん断応力 $\tau_{\theta r}$ の分布曲線は、 b/a が零に近づくにつれ点 A 近傍での応力の立ち上がり急激になる。

(5) 応力拡大係数 K_{II} は、円形き裂の半径 c の増加とともに単調に増加し、 c が 1 に近づくにつれ無限に大きくなる。

なお、数値計算には、東京大学大形計算機センターの HITAC 8800/8700 を使用した。

文 献

- (1) 土田・内山, 機論, 44-384 (昭 53), 2577.
- (2) 土田・内山, 機論, 45-393, A (昭 54), 455.
- (3) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1958), 135, Springer-Verlag.
- (4) Das, S.C., *J. Appl. Mech.*, 21-1 (1954), A 83.
- (5) Miyamoto, H., *Proc. 1st Jpn. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1 (1951), 43.
- (6) Benthem, J. P. and Koiter, W. T., *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, (1973), 131, Noordhoff.
- (7) Cooke, J.C., *Z. AMM*, 42-7/8 (1962), 305.
- (8) Kawashima, K., ほか 2 名, *Proc. 24th Jpn. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 24 (1974), 357.