

## Burg 法のためのデータ予測

正員 島村 徹也<sup>†</sup> 正員 鈴木 誠史<sup>†</sup>

Data Prediction for the Burg Method

Tetsuya SHIMAMURA<sup>†</sup> and Jouji SUZUKI<sup>†</sup>, Members<sup>†</sup> 埼玉大学工学部情報工学科, 浦和市

Faculty of Engineering, Saitama University, Urawa-shi, 338 Japan

あらまし Burg 法のスペクトル分解能を改善する一方法を提案する。シミュレーション結果は、データ予測によるデータ拡張を介することにより、Burg 法のスペクトル分解能が改善できることを示している。本法は比較的高い SN 比の信号に対して有効である。

キーワード Burg 法, スペクトル分解能, データ予測, AR モデル, 安定性

## 1. まえがき

時系列データを分析する場合、少数データからパワースペクトルを推定することが必要とされる。自己回帰 (AR) モデルを当てはめる AR スペクトル推定法が用いられ、いくつかのアルゴリズムが提案されている<sup>(2)</sup>。なかでも Burg の最大エントロピー法<sup>(1)</sup>は、少ない演算量で、ペリオドグラムでは分解不可能な隣接スペクトルを分離することが可能であることが知られている。

Burg 法は格子形フィルタの反射係数を推定するアルゴリズムに帰着され、推定される AR モデルの安定性を保証する。また、次数更新型アルゴリズムが存在し、設定した次数までの最適推定値が得られるなどの特徴を有する。

与えられるデータ列のパワースペクトルを推定する目的のみにおいては、推定される AR モデルの安定性は保証される必要がない。しかし、提案する方法は、Burg 法の AR モデルの安定性を保証する性質を積極的に利用している。

Levinson・Durbin アルゴリズムに基づく自己相関法がまた、推定される AR モデルの安定性を保証する。与えられるデータ数が十分多い場合、自己相関法と Burg 法はほぼ等しいスペクトル推定結果を与えるが、データ数が少ない場合には、Burg 法は自己相関法よりも高いスペクトル分解能を与える<sup>(3)</sup>。従って、本論文では Burg 法を取り上げることにする。

本論文では、Burg 法のスペクトル分解能を改善する一方法を提案している。従来は、与えられるデータ列に対して Burg 法を施し、反射係数を介して AR 係

数を推定した後に、直接パワースペクトルを算出していった。しかし、提案法(以下ではデータ拡張 Burg 法と呼ぶ)では、一度推定された AR 係数を用いて、与えられる観測時間外のデータを予測し、その予測データをも含めた拡張データから、再度 Burg 法によりパワースペクトルを推定する。

データ拡張 Burg 法は、周知の Burg 法を直接適用できる点に特徴がある。また、重み付き Burg 法<sup>(4),(5),(8)</sup>や花崎らの方法<sup>(6)</sup>(これらはまた、AR モデルの安定性を保証する)などの Burg 法の改良法を利用することもでき、更には 2 次元スペクトル推定法への拡張も可能である<sup>(7)</sup>などの特筆すべき性質を有する。

本論文は、以下 2. で提案するデータ拡張 Burg 法を記述する。続く 3. では、計算機シミュレーション実験の結果より、データ拡張 Burg 法が Burg 法よりも高いスペクトル分解能を与えることを示し、4. でその考察を行う。そして 5. でむすぶことにする。

## 2. データ拡張 Burg 法

提案するデータ拡張 Burg 法は次の 3 ステップからなる。

(Step 1) まず、与えられる有限データ  $x(n)$   $n=1, 2, \dots, N$  に対して Burg 法<sup>(1)</sup>を施し、AR 係数  $a_i'$   $i=1, 2, \dots, M'$  を得る。ここで  $M'$  は AR モデルの次数に対応している。

(Step 2) Step 1 で得られた AR 係数を用いて

$$\hat{x}(n) = -\sum_{i=1}^{M'} a_i' \hat{x}(n-i) \quad n=N+1, N+2, \dots, L \quad (1)$$

によりデータ予測を行う。そして  $x(n)$   $n=1, 2, \dots, N$  および  $\hat{x}(n)$   $n=N+1, N+2, \dots, L$  から拡張データ列

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & n=1, 2, \dots, N \\ \hat{x}(n) & n=N+1, N+2, \dots, L \end{cases} \quad (2)$$

を得る。但し、式(1)の再帰式の初期値には、 $\hat{x}(N) = x(N)$ ,  $\hat{x}(N-1) = x(N-1)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{x}(N-M'+1) = x(N-M'+1)$  を用いることにする。

(Step 3) Step 2 で得られた  $y(n)$  に Burg 法を施し、AR 係数  $a_i$   $i=1, 2, \dots, M$  および予測誤差パワー  $\sigma_y^2$  を求め

$$P_y(k) = \frac{\sigma_y^2}{\left| 1 + \sum_{i=1}^M a_i \exp\{-j2\pi ki/L\} \right|^2} \quad (3)$$

としてパワースペクトルを算出する\*。ここで、AR モ

\* 本論文で比較される従来の Burg 法の記述は、観測信号  $y(n)$  が与えられたとして、式(3)に従うものとする。

デルの次数  $M$  を Step 1 における  $M'$  と区別していることに注意されたい。

上記のデータ拡張 Burg 法は、本質的には Burg 法に帰着される。すなわち、その推定精度は Burg 法に依存することになる。従って、データ拡張 Burg 法は、Burg 法が適用可能な比較的高い SN 比の信号に対してまた適用可能である。

本論文では Burg 法のみを取り上げる。しかし、本法には、式(1)の再帰的フィルタリングを、安定性を保持しつつ行える AR スペクトル推定法はすべて適用可能である。推定される AR モデルの安定性を保証する方法としては、Swingler<sup>(4)</sup>、Kaveh ら<sup>(5)</sup>、Helme ら<sup>(6)</sup>の重み付き Burg 法や花崎らの方法<sup>(6)</sup>などが挙げられよう。

正弦波信号を処理する場合、Burg 法の性質を保持する本法においてはまた、初期位相に依存したスペクトルピークの偏差<sup>(9)</sup>やラインスプリッティング<sup>(10),(11)</sup>の問題が残されることになる。しかし、上記の改良 Burg 法を適用することにより、これらの問題は大幅に低減されると予想される。

### 3. シミュレーション結果

本章では、計算機シミュレーション実験の結果を示す。

[例題 1] 文献(2)の Table III に記されている Kay・Marple のデータ列を用いた。このデータ列はデータ数 64 であり、その周波数がそれぞれ 0.10, 0.20, 0.21 である三つの正弦波信号と帯域通過雑音過程からなっている。各正弦波信号の雑音に対するパワーの比はそれぞれ 10 dB, 30 dB, 30 dB である。しかし、文献(2)にも示してあるように、このデータ列の全データ

から Burg 法により (16 次の AR モデルから) そのスペクトルを求めると、含有される周波数 0.20 と 0.21 の隣接する正弦波スペクトルを明確に分離することができる。従って、ここでは、スペクトル分解能の比較をより明確に示すために、64 サンプルの前部 32 サンプルのみを用い、Burg 法とデータ拡張 Burg 法を比較した。

まず、AR モデルの次数  $M$  が 10 次から 18 次までの中で、Burg 法が最も高いスペクトル分解能を与える場合を探索した。図 1 がその最終的な結果である。図 1 は 14 次の AR モデルによる Burg 法のスペクトル推定結果を示している。但し、スペクトル表示は最大値を 1 に正規化してある。

データ拡張 Burg 法においては、スペクトルの推定のための AR モデルの次数  $M$  の他に、Step 2 での予測されるデータの数  $(L-N)$  およびデータ予測に用いられる AR モデルの次数  $M'$  によってその推定精度が変わる。そこで、次数  $M$  は 10 次から 18 次までと先と同様の範囲で、かつ、Step 2 でのデータ拡張の比  $L/N$  が 1.5 倍から 5 倍までの中で最もスペクトル分解能の高い結果を与える場合を探索した。図 2 がその最も高分解能なスペクトルの推定結果を示している。図 2 は、 $M=M'=14$ 、データ拡張比 3 倍の場合のデータ拡張 Burg 法による結果である。隣接する正弦波スペクトルの存在する周波数 0.20 と 0.21 に着目し、図 1, 2 を比較すると、データ拡張 Burg 法の方がより分解能の高いスペクトルを与えていることがわかる。

[例題 2] 雑音の付加された二つの正弦波信号

$$x(n) = \cos\{2\pi(0.04n)\} + \cos\{2\pi(0.06n)\} + v(n) \\ n=1, 2, \dots, 15 \quad (4)$$

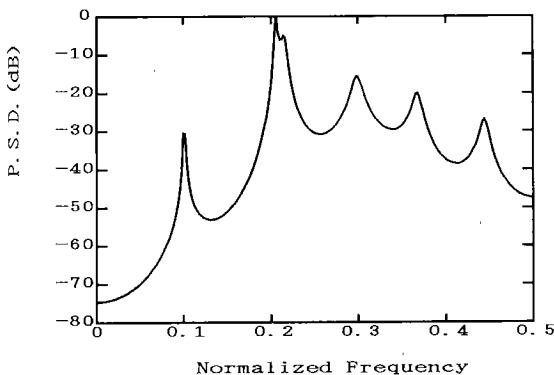


図 1 Burg 法  
Fig. 1 Burg method.

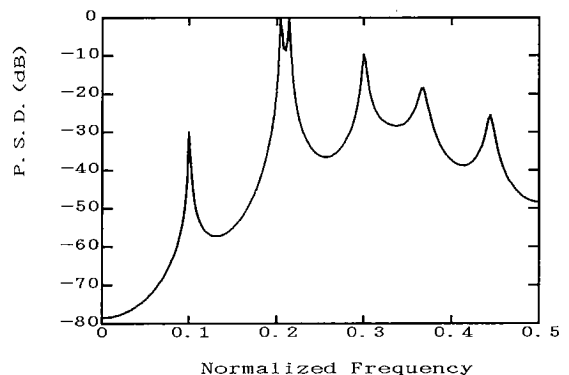


図 2 データ拡張 Burg 法  
Fig. 2 Data-extended Burg method.

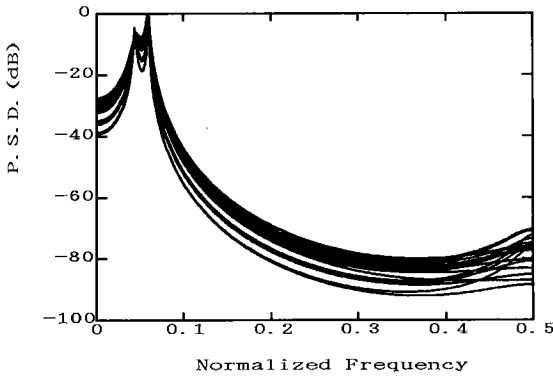


図3 Burg法  
Fig. 3 Burg method.

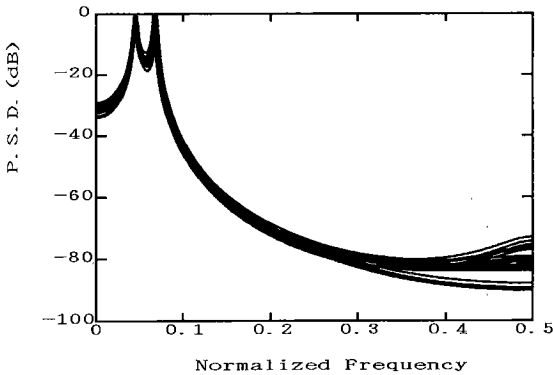


図4 データ拡張Burg法  
Fig. 4 Data-extended Burg method.

を生成し、シミュレーションを行った。但し、 $v(n)$  は平均零、分散  $\sigma_v^2$  の正規性白色雑音を示している。

分散  $\sigma_v^2$  を調整し、一つの正弦波信号に対する雑音の SN 比が 55 dB になるように設定した。図 3 は、AR モデルの次数  $M$  を 5 とし、Burg 法を施したときのパワースペクトルの推定結果を示している。20 回の独立した雑音生成を行ったときの結果がプロットされている。

一方、図 4 はデータ拡張 Burg 法によるスペクトル推定の結果を示している。AR モデルの次数は  $M=M'=5$  と設定した。またステップ 2 では  $L$  を 45 とし、3 倍に拡張したデータ列を用いた。図 3, 4 の結果は再び、データ拡張 Burg 法のより高いスペクトル分解能性を示している。

Burg 法による正弦波信号の周波数推定値は、特に少数データの場合、正弦波信号の初期位相に大きく依

存することが知られている<sup>(9)</sup>。しかし、本例題では、Burg 法とデータ拡張 Burg 法は、同一の初期位相値で、対等に比較されていることに注意されたい。

#### 4. 考 察

少数のデータが与えられた場合の、データ拡張 Burg 法によるパワースペクトルの推定精度を解析的に考察することは、Burg 法自体が非線形性を有するためにはたいへん困難と思われる。しかし、3.でのシミュレーション結果のように、データ拡張 Burg 法が Burg 法よりも高いスペクトル分解能を与える理由は、明らかに式(2)における予測データ列  $\hat{x}(n)$   $n=N+1, N+2, \dots, L$  に起因すると考えられる。

与えられるデータ数が増大するにつれて、Burg 法の推定精度が向上することは知られている<sup>(9)</sup>。従って、本法での場合、予測データ列  $\hat{x}(n)$  が与えられるデータに対するいかなる精度の予測値となっているかが問題となろう。

例えば、与えられるデータ列が二つの正弦波信号を含む場合、式(1)の再帰的フィルタリングにおいて、AR 係数の推定値  $a_i'$  が正弦波信号を表現するのに正確であり、 $a_i'$  からなる予測誤差フィルタの根が単位円上に存在するならば、式(1)のフィルタリングは安定限界となるが、式(2)が純然たるデータ数の増大をほぼ満足すると考えられる。また一方で、少ないデータ数や付加雑音の影響で、 $a_i'$  に推定誤差が含まれたとしても、式(1)は大局的なフィルタリングを行う。 $a_i'$  からなる AR スペクトルが隣接する正弦波スペクトルを十分に分解できなかったとしても、再帰フィルタの出力  $\hat{x}(n)$  は、振幅値に変化がもたらされるにせよ、周波数成分は保持できるであろう。従って、与えられるデータ列に  $\hat{x}(n)$  を付加すれば、少なくとも、正弦波の周波数に関する情報を増大させることになる。結局、その拡張されたデータ列に再度 Burg 法を施すデータ拡張 Burg 法は、スペクトル分解能をより向上させる結果となるわけである。3.でのシミュレーション結果は、データ拡張 Burg 法の有する、大局的なフィルタリングによる正弦波周波数の情報量増大の効果を示していると言えよう。

#### 5. む す び

本論文では、Burg 法のスペクトル分解能を改善する方法、データ拡張 Burg 法を提案している。シミュレーション結果は、データ予測によるデータ拡張を介することにより、Burg 法のスペクトル分解能が改善できることを示している。

提案するデータ拡張 Burg 法は、比較的高い SN 比の信号に対して有効である。与えられるデータ数  $N$  に対して AR 次数を  $N/3$  程度に設定し、データ拡張比を 2 倍から 3 倍とすることにより、良好な推定結果を得ることができる。

### 文 献

- (1) Burg J.: "Maximum entropy spectral analysis", Proc. the 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists (1967).
- (2) Kay S.M. and Marple S.L.: "Spectrum analysis-A modern perspective", Proc.IEEE, **69**, 11, pp. 1380-1419 (Nov. 1981).
- (3) Ulrych T.J. and Bishop T.N.: "Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition", Rev. Geophysics and Space Phys., **13**, pp. 183-200 (Feb. 1975).
- (4) Swingler D.N.: "A modified Burg algorithm for maximum entropy spectral analysis", Proc. IEEE, **67**, 9, pp. 1368-1369 (Sept. 1979).
- (5) Kaveh M. and Lippert G.A.: "An optimum tapered Burg algorithm for linear prediction and spectral analysis", IEEE Trans. Acoustics, Speech & Signal Process., **ASSP-31**, 2, pp. 438-444 (April 1983).
- (6) 花崎 泉, 中島 毅, 秋月影雄: "スペクトル解析のための Burg 法の改善", 計測自動制御学会論文集, **21**, 1, pp. 63-70 (1985).
- (7) Frost O.L. and Sullivan T.M.: "High-resolution two-dimensional spectral analysis", Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech & Signal Process., pp. 673-676 (1979).
- (8) Helme B.I. and Nikias C.L.: "Improved spectrum performance via a data-adaptive weighted Burg technique", IEEE Trans. Acoustics, Speech & Signal Process., **ASSP-33**, 4, pp. 903-910 (Aug. 1985).
- (9) Chen W. Y. and Stegen G. R.: "Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids", J. Geophysical Research, **79**, 20, pp. 3019-3022 (July 1974).
- (10) Fougere P.F., Zawalick E.J. and Radoski H.R.: "Spontaneous line splitting in maximum entropy power spectrum analysis", Physics of the Earth and Planetary Interiors, **12**, pp. 201-207 (1976).
- (11) 小野敏郎, 山口 隆: "スペクトル解析のための Burg 法の改良", システムと制御, **30**, 9, pp. 594-596 (1986).  
(平成 6 年 1 月 14 日受付, 3 月 10 日再受付)