

前向き後向き差分関数による単一正弦波信号の強調

正員 國枝 伸行[†] 正員 島村 徹也[†]

正員 鈴木 誠史[†]

Enhancement of Single Sinusoidal Signal by Forward and Backward
Difference Function

Nobuyuki KUNIEDA[†], Tetsuya SHIMAMURA[†]

and Jouji SUZUKI[†], Members

[†] 埼玉大学工学部情報工学科, 浦和市

Faculty of Engineering, Saitama University, Urawa-shi, 338 Japan

あらまし 雑音中の単一正弦波をひずみなく強調するための新しい関数として前向き後向き差分関数を定義する。白色雑音の重畳した正弦波を対象に、この関数による SN 比改善特性を求めたところ、自己相関関数よりも優れた効果を得ることができた。

キーワード 前向き後向き差分関数, 自己相関関数, 差分関数, 雑音低減, 正弦波強調

1. ま え が き

雑音に埋もれた正弦波的信号を強調することは、レーダ、振動解析、地球物理学などの信号処理において必要とされる。近年、時間ごとに変化する周波数（瞬時周波数）を推定する試みが数多く行われてるが⁽¹⁾、波形そのものを強調することはあまり検討されていない。そこで、本研究の目的は信号の周波数を推定することではなく、正弦波的信号そのものを復元することに重点を置くものである。

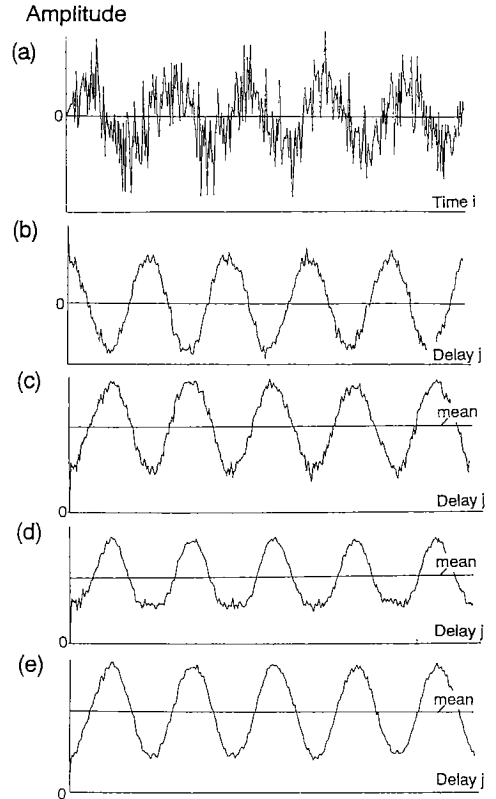
筆者らは、これまでに相関関数を利用して雑音中の音声や準周期信号を強調する手法を提案してきた⁽²⁾⁻⁽⁴⁾。そのうち差分関数を利用した音声処理方式（SPAD）は、単純な計算によって雑音低減を行うことができるが、高調波によるひずみが生じるという欠点を有していた。本論文では、新しく信号の前方と後方との双方向に差分をとる前向き後向き差分関数を定義し、この関数を利用して雑音中の正弦波をひずみなく強調する方法を検討する。

2. 相関関数を利用した雑音低減

まず、相関関数を利用した雑音低減技術について概説しておく。時系列信号 $x(i)$ の自己相関関数

$$r(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \cdot x(i+j) \quad j=0, 1, \dots, M \quad (1)$$

は、もとの信号 $x(i)$ の各周波数成分の振幅を 2 乗した周波数成分で構成される⁽²⁾。このときランダム雑音成分が $r(j)$ の $j=0$ 付近に集中する。そこで、 $x(i)$ の代わりに雑音成分の少ない $j=0$ から離れた $r(j)$ 部分を時



- (a) Single sinusoidal waveform $x(i)$ corrupted by noise
- (b) Autocorrelation function $r(j)$ of $x(i)$
- (c) Auto-difference function $d_1(j)$ of $x(i)$
- (d) Forward and backward difference function $d_2(j)$ of $x(i)$
- (e) Advanced forward and backward difference function $d_3(j)$ of $x(i)$

図 1 各処理の波形

Fig. 1 Waveforms of each processing.

間波形として出力すれば雑音低減が行える。但し、振幅が 2 乗となるひずみを生じる。図 1(a), (b) は、雑音を付加した正弦波と式 (1) による処理波形の例を示したものである。

一方、信号 $x(i)$ の差分関数

$$d_1(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |x(i) - x(i+j)| \quad j=0, 1, \dots, M \quad (2)$$

を利用しても図 1(c) のように雑音低減が行える。 $d_1(j)$ は $r(j)$ よりも計算は単純だが、高調波によるひずみが生じる欠点を有する。信号に対するそのひずみの大きさは、正弦波を入力した場合で約 -13 dB に相当する⁽⁴⁾。

今回、このひずみの問題を解決するために前方と後方との双方向に差分をとる前向き後向き差分関数を次式のように定義する。

$$d_2(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |2x(i) - x(i+j) - x(i-j)| \quad j=0, 1, \dots, M \quad (3)$$

入力信号が

$$x(i) = A \sin(\omega i) \quad (4)$$

で示されるような単一正弦波であるとき、式(3)で示される前向き後向き差分関数は

$$d_2(j) = \frac{4A}{\pi} [1 - \cos(\omega j)] \quad (5)$$

を与える。この $d_2(j)$ は、振幅軸を $4A/\pi$ 移動すれば、もとの信号と同じ周波数の正弦波として扱うことができる。しかも、 $d_2(j)$ は $d_1(j)$ のような高調波ひずみや $r(j)$ のような振幅が2乗となるひずみを生じることはない。そこで、この $d_2(j)$ を利用して雑音中の正弦波を強調することを考える。

本方式の処理過程を図2に示す。まず、入力信号 $x(i)$ の前向き後向き差分関数 $d_2(j)$ を計算する。このとき、 $d_2(j)$ の最小値を利用して周期 T を求める。そして、 $j=0$ から離れた $d_2(j)$ を時間長 T だけ出力波形として切り出す。次に、入力信号 $x(i)$ を時間 T だけシフトして、同様の処理を行う。こうして得られた波形を接続していくことによって、雑音低減が実現される。

このとき、計算された $d_2(j)$ はすべて正值であるため、これをそのまま出力信号とすることはしない。ここでは、出力する前に波形の平均値を計算し、その平均値が0となるように振幅軸を移動させる処理を行っている。

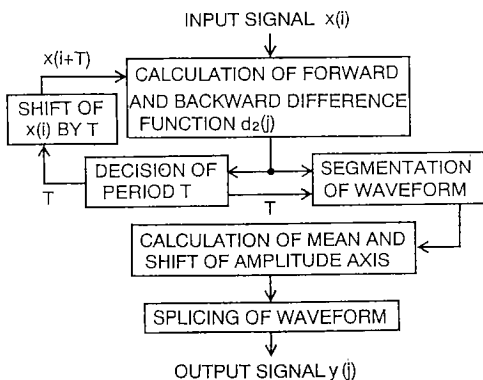


図2 処理過程
Fig. 2 Processing of the system.

3. ひずみの修正

実際に、雑音が重畳した正弦波に対して検討する。図1(d)は、雑音の重畳した正弦波に対する式(3)の前向き後向き差分関数による処理波形であるが、波形ひずみが生じていることに気づく。このひずみは、雑音成分によって絶対値内の符号が変化したことが原因であると考えられる。今、入力信号を

$$x(i) = s(i) + w(i) \quad (6)$$

と表すことにする。ここで $s(i)$ は信号成分、 $w(i)$ は雑音成分である。しかし、式(3)が非線形処理を含んでいるため、式(6)を用いて直接理論解析を行うことは困難であると思われる。そこで、このひずみを検討するため、式(6)を処理したときの式(3)の絶対値内の信号成分を S_{ij} 、雑音成分を W_{ij} として次式のように表記することにする。

$$d_2(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |S_{ij} + W_{ij}| \quad j=0, 1, \dots, M \quad (7)$$

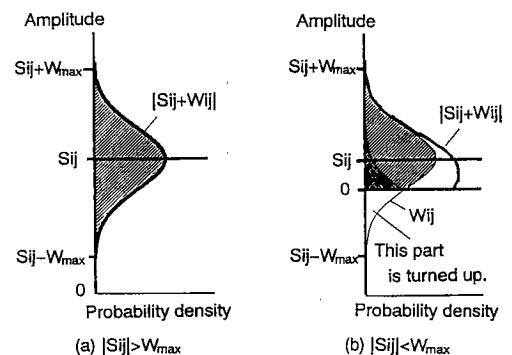
但し、

$$S_{ij} = 2s(i) - s(i+j) - s(i-j)$$

$$W_{ij} = 2w(i) - w(i+j) - w(i-j) \quad (8)$$

である。また、雑音振幅 $w(i)$ 、すなわち W_{ij} の確率密度はガウス分布に従うものと仮定する。但し、以下における説明を簡単化するために、ここでは雑音の最大振幅は有限であるとし、その絶対値を W_{\max} で表現することとする。

まず、 $S_{ij} + W_{ij}$ の符号が W_{ij} の値によって変化しない



- (a) When a sign of $|S_{ij} + W_{ij}|$ does not be changed by W_{ij} , the mean of $|S_{ij} + W_{ij}|$ is close to $|S_{ij}|$
 (b) When the sign is changed by W_{ij} , the mean is greater than $|S_{ij}|$ because the absolute calculation often makes the sign turn up

図3 $|S_{ij} + W_{ij}|$ の確率分布
Fig. 3 Probability density of $|S_{ij} + W_{ij}|$.

いと仮定する。このとき、 $|S_{ij} + W_{ij}|$ の値は、雑音によって図3(a)のような分布に従う。 $d_2(j)$ は $|S_{ij} + W_{ij}|$ の N 個の平均として求められるため、雑音成分 W_{ij} が平均化されて雑音がないときの値に近づく。その結果、ひずみなく信号の雑音低減が行われる。

一方、図3(b)のように $S_{ij} + W_{ij}$ の符号が W_{ij} の値によって変化するとき、すなわち雑音の最大振幅の絶対値を W_{\max} として $|S_{ij}| < W_{\max}$ となる場合を考える。このとき、 $|S_{ij} + W_{ij}|$ の分布には図3(b)のような符号変化による折返しが生じる。そのため、このような $|S_{ij} + W_{ij}|$ の N 個の平均をとって $d_2(j)$ を計算しても、雑音成分 W_{ij} は0にはならず、ひずみとなって現れる。図1(d)において、 $d_2(j)$ による波形ひずみが振幅の最小値、すなわち $d_2(j)$ が0に近い値であるときに生じているのはこのためと考えられる。

この問題を解決するためには、雑音によって絶対値内の符号が変化しないようにすればよい。そこで式(3)を次式のように変形することにする。

$$d_3(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |2x(i) - x(i+j) - x(i-j) + \alpha \cdot \text{Sign}(S_{ij})|$$

$$j=0, 1, \dots, M \quad (9)$$

ここで、 α は振幅軸の移動量を表す定数であり、 $\alpha > |W_{\max}|$ を満たすものとする。また $\text{Sign}(\cdot)$ は、

$$\text{Sign}(S_{ij}) = \begin{cases} 1 & S_{ij} \geq 0 \\ -1 & S_{ij} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

である。

入力信号が雑音のない単一正弦波 $s(i)$ であると、

$$\text{Sign}(S_{ij}) = \text{Sign}(s(i)) = \text{Sign}(x(i)) \quad (11)$$

が成立する。従って、式(9)は良好な結果を与えるが、雑音が重畳している場合には、式(11)は保証されない。そこで、 $\text{Sign}(S_{ij})$ のより確からしい値を得るために、ここでは3値の移動平均を利用し、

$$\text{Sign}(S_{ij}) = \text{Sign}(x(i-j) + x(i) + x(i+j)) \quad (12)$$

として $\text{Sign}(S_{ij})$ を計算することにする。

図1(e)は、式(9)、式(12)を利用して得られた処理波形の例を示している。この図から、波形ひずみの問題が解決されていることがわかる。結局、この改良した前向き後向き差分関数によって、雑音中の正弦波をひずみなく強調することができるわけである。

さて、式(9)における定数 α の設定法であるが、雑音の振幅が既知である場合には、 $\alpha > W_{\max}$ を満たす適当な数値を用いればよく、 α による効果の違いはない。一方、雑音の振幅値が既知でない場合には、 α が $|S_{ij} + W_{ij}|$ の最大値 $\max(|S_{ij} + W_{ij}|)$ より大きな数値であ

れば問題ない。すなわち、まず経験的に α として大きな数値を設定しておき、前向き後向き差分関数の計算において、もし $\alpha > \max(|S_{ij} + W_{ij}|)$ を満たさないことがあれば、この条件を満たすように α を設定し直せばよい。

4. シミュレーション実験

4.1 SN比改善特性

式(1)～式(3)、式(9)の関数を利用して、正弦波信号の雑音低減を行い、SN比改善特性を求める。正弦波に、帯域制限(3.4 kHz)した白色雑音のパワーを変化させて重畳し、SN比が-10～30 dBの範囲で5 dBごとの信号を生成した。また、雑音低減に利用した関数の $j=50 \sim 561$ から出力波形のSN比を求めることとした。但し、SN比はFFT(512点、ハニング窓)で求めたスペクトル上のパワー比によって近似的に算出した。このため、正弦波信号の周波数は625 Hz、振幅は100とした。標準化周波数は10 kHz、その他の定数は、 $M=200$ 、 $M=600$ 、 $\alpha=1 \times 10^6$ を用いた。

100 波形について雑音低減を行い、その平均値によってSN比改善度を求めた。その結果をスプラインで結んだSN比改善特性を図4に示す。SN比改善度 SNR_{imp} [dB] は、入力信号と出力信号のSN比を SNR_{in} [dB]、 SNR_{out} [dB] として次式で定義してある。

$$\text{SNR}_{\text{imp}} = \text{SNR}_{\text{out}} - \text{SNR}_{\text{in}} \quad (13)$$

図4を見ると、大局的には式(9)の改良した前向き後向き差分関数によって10～22 dB程度の改善が得

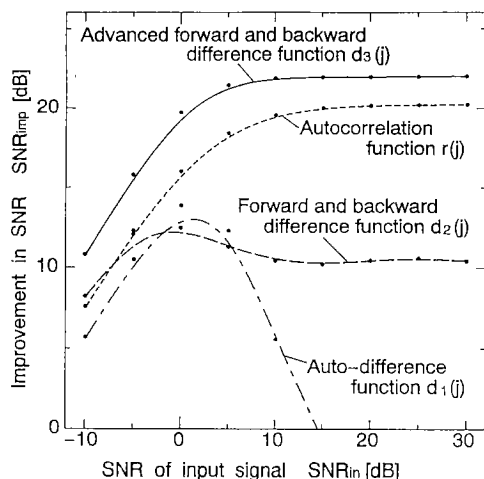
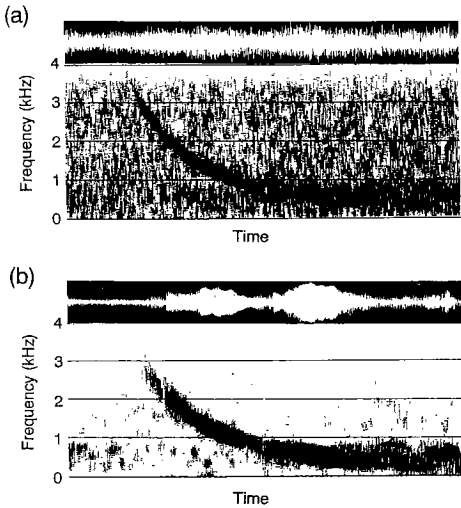


図4 SN比改善特性
Fig. 4 Improvement in SNR.



(a) Whistler atmospherics corrupted by noise
(b) Whistler atmospherics processed by forward and backward difference function

図 5 処理前後のスペクトログラム

Fig. 5 Spectrograms of before and after processing.

られることがわかる。特に、入力信号が高 SN 比の場合に改善度が大きいことがわかる。

また、この前向き後向き差分関数による改善度は、自己相関関数よりも 2~5 dB 程度優れていることに気づく。この理由は、差分関数の方が自己相関関数よりも雑音レベル低減効果が優れていること⁽⁴⁾、前向き後向き差分関数では前方との差分 $x(i) - x(i+j)$ と後方との差分 $x(i) - x(i-j)$ の二つの差分を利用していることが挙げられる。前向き後向き差分関数では、雑音による誤差の分布の分散が従来の差分関数の 2 倍に広がる。しかし実験結果からは、前向き後向き差分関数は自己相関関数よりも優れた効果を上げており、この誤差の雑音低減効果に与える影響は大きいものではない。

一方、式(3)の前向き後向き差分関数 $d_2(j)$ では、波形ひずみにより大きな改善は得られず、また差分関数 $d_1(j)$ においても、高調波ひずみのために出力の SN 比は 13 dB 以下に抑えられている。なお、これらの SN 比改善特性は、式(1)~式(3)、式(9)の関係において安定的なものであり、他の周波数の場合についても同様の特性を得ることができたことを付記しておく。

4.2 時間変化する信号に対する処理

本方式は、時間的に緩やかに変化する正弦波に対しても適応可能と考えられる。そうした正弦波的信号の

例として、地球物理学で知られるホイストラ空電の検出がある。ホイストラ空電は、宇宙空間に出た雷放電が半球を越えて伝搬した低周波の電波で、検波すると尻下りの音として聞こえる。雑音の重畳したホイストラ空電に対して、前向き後向き差分関数による雑音低減を試みってみた。図 5 に処理前後のスペクトログラムを示す。この図 5 から、大幅に雑音が低減されていることがわかる。ホイストラ空電の帯がやや太くなっているのは、この前向き後向き差分の処理によって平滑化されたためである。

5. むすび

前向き後向き差分関数を定義し、単一正弦波の雑音低減に有効であることを示した。シミュレーションの結果、特に SN 比 5 dB 以上では、この関数によって約 22 dB の改善が行えることがわかった。この改善度は、自己相関関数による手法よりも優れている。この収束値 22 dB は、式(9)における時間の範囲を示す定数 N によって決定される値である。従って、 N を大きくすればその収束値も大きくできる。

前向き後向き差分関数を用いることの利点は、入力信号の振幅を線形に変化させることにある。自己相関関数では、出力信号の振幅が 2 乗になるため、振幅が変化する正弦波においてはひずみが生じる問題は不可避であった。

本方式では、前向き後向き差分関数の計算のみという極めて単純な処理によって単一正弦波の強調が実現できた。また、ホイストラ空電のような時間によって周波数の変化する正弦波に対する処理も検討し、単一正弦波と同様の雑音低減効果があることが示せた。このほかモールス信号を局所的に見た場合など、さまざまな単一正弦波の強調に応用することも可能であると思われる。しかし、本方式を複合波に適用した場合には、その周波数成分の構成が保存される保証はなく、ひずみが生じることも考えられる。こうした信号に対する処理を検討することが今後の課題である。

謝辞 ホイストラ空電資料を提供された郵政省通信総合研究所の渡辺成昭博士に謝意を表する。

文 献

- (1) Boashash B.: "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of Signal", Proc. IEEE, 80, 4, pp. 519-568 (April 1992).
- (2) 吉谷清澄, 鈴木誠史: "自己相関関数を利用した音声処理方式 (SPAC) の SN 比改善特性", 信学論 (A), J61-A, 3, pp. 217-223 (1978-03).
- (3) 國枝伸行, 島村徹也, 鈴木誠史, 八嶋弘幸: "差分関数を利用した"

用した音声処理方式—SPAD”，信学論 (A)，J75-A，11，
pp. 1769-1772 (1992-11)．

(4) 國枝伸行，島村徹也，鈴木誠史，八嶋弘幸：“差分関数を利

用した音声処理方式 (SPAD) の SN 比改善効果”，信学技
報，SP93-4 (1993-05)．

(平成 6 年 4 月 12 日受付， 5 月 23 日再受付)
