

論 文

 q -正規分布族に関する考察

田中 勝†

A Consideration on a Family of q -Normal Distributions

Masaru TANAKA†

あらまし 本論文では、非加法的エントロピーである Tsallis エントロピーの平衡分布に 2 次までの q -モーメントの存在を要求したときに得られる確率分布について考察する。この確率分布は一つのパラメータ q と平均と分散を指定することにより特定の確率分布を表すようになる。例えば、 $q = 1$ のときは通常の正規分布を表し、 $q = 2$ のときは Cauchy 分布を表す。ただし、 $q = 2$ の Cauchy 分布の場合は 2 次のモーメントは存在しないので、形式的に確率分布関数の中に現れるパラメータ σ^2 は単にスケールファクタと解釈する。特に $q = 1 + \frac{2}{n+1}$ のときは 't-分布' が得られるが、この場合も 2 次モーメントが存在しない場合には、確率密度関数の中に現れるパラメータ σ^2 をスケールファクタとして解釈する。また、 $q = -\infty$ の場合には標準偏差の 2 倍 (2σ) の幅をもつ一様分布が得られる。すなわち、ここで考察する確率密度関数は、サポートがコンパクトな一様分布からサポートが非コンパクトな正規分布を経て、't-分布' や Cauchy 分布を経由して非コンパクトなサポートをもつ一様分布 (完全に平たんな分布) までを、パラメータ q を通じて滑らかに結ぶことのできる確率密度関数である。ここでは、この確率密度関数を q -正規分布と呼ぶ。 q -正規分布と、従来知られている正規分布を含む確率分布族との最も重要な違いは、通常の正規分布を含む確率分布族では、正規分布のみが情報量すなわち Boltzmann-Shannon エントロピーを最大化するものとして明確なエントロピーとの関係が付けられるのに対して、 q -正規分布では、パラメータ q により決定されるすべての確率分布は、必ずその q の値に応じたエントロピー (Tsallis エントロピー) をただ一つもっており、その対応するエントロピーを最大化するという例外のない明確な情報量との関係をもつことである。このような q -正規分布による期待値には、通常の期待値のほかに、エスコート分布による期待値の 2 通りの期待値が考えられる。それぞれについてモーメントを得るための一般的な公式も与える。また、 q -正規分布は q について滑らかなので、正規分布の周りで展開することができる。つまり、他の確率密度関数を正規分布を用いて近似することができる。このことについても併せて考察する。更に、 q -正規分布 $p_q(x; \mu, \sigma)$ は、エスコート分布を介して、他の q -正規分布 $p_{\frac{1}{2-q}}(x; \mu, \sqrt{\frac{3-q}{5-3q}}\sigma)$ と双対な関係をもつことも示す。

キーワード q -正規分布, q -期待値, q -モーメント, q -Gabor ウェーブレット

1. まえがき

統計学や確率論などの分野で独立に提案されてきた様々な確率密度関数は、いろいろな分野で欠かせないものとなっている。その中には、正規分布のように単に確率密度関数というだけでなく、その関数の形や数学的性質の良さから信号処理や画像処理等におけるフィルタの役割を担うものまで存在している。通常、これらの確率密度関数は、問題に応じて選択され適用される。例えば、心臓の拍動間隔の時間を測定したと

き、そのデータに対して正規分布をまずは当てはめてみる。しかし、正規分布ではあまりよく当てはまらない。そこで、他の分布を当てはめてみることになる。実際には、健康な心臓では、拍動間隔の時間は正規分布ではなくもっと裾の厚い Lévy 型の分布に従うことが知られている [3]。自然界では、至る所で Lévy 型の分布が顔を出すことは周知のとおりである。また、確率密度関数という概念を離れて、その関数の形が有効な処理を保証してくれることもある。画像処理などで前処理としてほかす必要があるときは、通常、正規分布型の関数を用いる。線形スケールスペースなどは、その最たる例である。更に、フーリエ変換との関連においても正規分布型の関数は、その形を変えないとい

† 埼玉大学工学部, さいたま市

Faculty of Engineering, Saitama University, 255 Shimo-Ohkubo, Saitama-shi, 338-8570 Japan

う特徴をもっている。

このように多様な顔をもつ確率密度関数は、そのいくつかが中心極限定理などにより関係するだけで、個別に扱うべきものなのであろうか。もし、確率密度関数のいくつかでも互いにもっと密な関係があれば、事前にどのような確率密度関数を考えておけばよいかを、この範囲内ではそれほど神経質にならずに決めることができるだろう。本論文では、非加法的エントロピーである Tsallis エントロピーの平衡分布に 2 次までの q -モーメントの存在を要求することで、確率密度関数のいくつかは互いに一つのパラメータで結び付いており、そのパラメータに関して滑らかに変化することを示す。つまり、データから 2 次までの q -モーメントを求めることで、一つのパラメータに依存した正規分布を含む確率密度関数の族、すなわち q -正規分布族を構成できることを示す。もちろん、正規分布を含む確率分布族には、ここで議論する q -正規分布以外にも知られているものがあるが、通常の正規分布を含む確率分布族では、正規分布のみが情報量すなわち Boltzmann-Shannon エントロピーを最大化するものとしてエントロピーとの関係が明確に付けられるのに対して、 q -正規分布においては、パラメータ q により決定されるすべての確率分布は、必ずその q の値に応じたエントロピー (Tsallis エントロピー) をただ一つもっており、その対応するエントロピーを最大化するという例外のない明確な情報量との関係がそこに成立している。この点が、通常知られている正規分布を含む確率分布族との最も重要な違いである。すなわち、 q -正規分布の場合は、考慮すべきエントロピーは q の値によって選ばれた確率分布ごとに決まっているのである。

また、この確率密度関数による期待値には、通常の期待値のほかにエスコート分布による期待値も考えることができる。そこで、それぞれについて一般的なモーメントを得るための公式も与える。更に、 q -正規分布族は、 q について滑らかなので正規分布 ($q = 1$) の周りで展開することができる。つまり、他の確率密度関数 ($q \neq 1$) を正規分布を用いて近似することができる。このことについても併せて考察する。そして最後に、 q -正規分布 $p_q(x; \mu, \sigma)$ は、エスコート分布を介して、他の q -正規分布 $p_{\frac{1}{2-q}}\left(x; \mu, \sqrt{\frac{3-q}{5-3q}}\sigma\right)$ と双対な関係をもつことも示す。

2. Tsallis エントロピー

Tsallis エントロピーは、一般化エントロピーの一種で非加法性を有したものである。その原型は 1960 年代後半から 1970 年代前半に既に現れている。物理学者 Tsallis [1] がマルチフラクタルを特徴づける新しい次元を模索する過程で再発見し、そのべき型のエントロピーのために長距離相関の働く系 (例えば、恒星のモデルの一種として、圧力が密度のべき乗で表されるような自己重力ガス球のモデルなどがある) に対して有効であること、その平衡分布として分散が発散してしまうような Lévy 型の分布を導出できることなどが注目され、様々な応用 [2] が考えられている。また、マイクロカノニカルから階段関数の積分表示の任意性を利用して Tsallis エントロピーを導出する試みなども行われている [4]~[6]。以下に、簡単に Tsallis エントロピーについてまとめておく。

まず、確率密度関数 $p(x)$ が与えられたとき、Tsallis エントロピーは次式で定義される。

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int dx p(x)^q \right). \quad (1)$$

この Tsallis エントロピーは、 $q = 1$ のとき Boltzmann-Shannon エントロピー

$$S_1 = - \int dx p(x) \log p(x), \quad (2)$$

を再現する。

今、二つの独立な系 A と B について、それぞれの系に対応する Tsallis エントロピーを $(S_q)^A$ と $(S_q)^B$ とする。また、それらの合成系 $A \cup B$ に対応する Tsallis エントロピーを $(S_q)^{A \cup B}$ とする。このとき、すべての q に対して次の関係式が成り立つ。

$$(S_q)^{A \cup B} = (S_q)^A + (S_q)^B + (1-q)(S_q)^A (S_q)^B. \quad (3)$$

この関係式が成り立つために、Tsallis エントロピーは、‘非加法的エントロピー’と呼ばれている。また、特に $q > 1$ のとき、合成系のエントロピーは各系のエントロピーの和よりも小さくなるので ‘subextensive’ と呼ばれ、 $0 < q < 1$ のときには、合成系のエントロピーは各系のエントロピーの和よりも大きくなるので ‘superextensive’ と呼ばれ、 $q = 1$ のときは加法的極限と呼ばれている。

論文/q-正規分布族に関する考察

一方、情報分野では一般化エントロピーとして Renyi エントロピー

$$S_q^R = \frac{1}{1-q} \log \int dx p(x)^q, \quad (4)$$

が知られている。この Renyi エントロピーと Tsallis エントロピーは以下のような関係式でつながっている。

$$S_q^R = \frac{1}{1-q} \log(1 + (1-q) S_q). \quad (5)$$

Renyi エントロピーは、Tsallis エントロピーと違って加法的エントロピーであることに注意する。

また、物理では、エントロピーの凸性が Tsallis エントロピーの場合、 $q > 0$ でないと満たされないということとエントロピー増大の法則が（熱力学の第3法則）が $q > 0$ でないと満たされないということから、パラメータ q に対して $q > 0$ の制限を付けるが、この条件を無視することで、情報処理の分野での利用の可能性が広がることを期待できるため本論文では、この制限は付けずにすることにする。ちなみに、 $q < 0$ の場合は、Tsallis エントロピーは凹性をもち、系の状態が平衡でなければ、エントロピーは系の時間発展とともに減少する。

3. q-正規分布

q-正規分布は、Tsallis エントロピーの平衡分布のうち、規格化可能条件、1次の q-モーメントの存在、2次の q-モーメントの存在を拘束条件として与えることで、変分法により、以下の汎関数を $p_q(x)$ で汎関数微分することで得ることができる。ただし、ここで q-モーメントとは、エスコート分布によるモーメントを意味している。また、エスコート分布とは、確率密度関数 $p_q(x)$ が与えられたとき、それを q 乗することにより得られる関数を規格化したものであり、マルチフラクタルの研究分野においては、マルチフラクタル次元の計算に用いられているものである（例えば、[7]）。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q-1} \left\{ 1 - \int p_q(x)^q dx \right\} \\ & + A \left\{ \int p_q(x) dx - 1 \right\} \\ & + B \left\{ \frac{1}{D} \int x p_q(x)^q dx - \mu \right\} \\ & + C \left\{ \frac{1}{D} \int (x - \mu)^2 p_q(x)^q dx - \sigma^2 \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 A, B, C は Lagrange の未定乗数であり、 D は規格化定数を表し、 q は実数である。

これを解くことで以下のような q-正規分布を得ることができる。

$$p_q(x) = \frac{1}{Z_q} \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}^{\frac{1}{1-q}}, \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} Z_q &= \int dx \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{3-q}{q-1} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} B \left(\frac{3-q}{2(q-1)}, \frac{1}{2} \right) & \text{for } 1 \leq q < 3 \\ \left(\frac{3-q}{1-q} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} B \left(\frac{2-q}{1-q}, \frac{1}{2} \right) & \text{for } q < 1 \end{cases}, \quad (8) \end{aligned}$$

で、 $B(u, v)$ はベータ関数である。

ところで、確率密度関数 (7) は、非負である必要があるため、 $q < 1$ のとき自然にカットオフ x_- と x_+ が導入される。

$$x_- = \mu - \sqrt{\frac{3-q}{1-q}} \sigma, \quad (9)$$

$$x_+ = \mu + \sqrt{\frac{3-q}{1-q}} \sigma. \quad (10)$$

このとき、平衡分布 (7) による Tsallis エントロピーは、次のように求められる。

$$\begin{aligned} S_q &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \int p_q(x)^q dx \right) \\ &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{3-q}{2} Z_q^{1-q} \right). \quad (11) \end{aligned}$$

特に、 $q = 1$ のときには、

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2), \quad (12)$$

となり、通常の Boltzmann-Shannon エントロピーと一致することが確認できる。また、Renyi エントロピーを計算すると次のようになる。

$$S_q^R = \frac{1}{1-q} \log \left(\frac{3-q}{2} \right) + \log Z_q. \quad (13)$$

ところで、q-正規分布は、パラメータ q に関して滑らかであることは、その関数形を見れば明らかである

が、特にいくつかの q の値で、これまで独立に発見され取り扱われていた確率密度関数を再現することができる。つまり、この q -正規分布一つで、これまで知られていた確率密度関数のうちのいくつかをまとめて扱うことができるという利点がある。しかも、 q -正規分布は q に関して滑らかなので、このパラメータを滑らかに変えていくことにより、それらの確率密度関数を「滑らか」に結ぶこともできる。以下に、その代表的な例を挙げる。まず、 $q = 1$ のときは、

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (14)$$

のように通常の正規分布を再現する。

$q = 1 + \frac{2}{n+1}$ のときには、

$$p_{1+\frac{2}{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)\sigma} \left[1 + \frac{1}{n} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{n+1}{2}} \quad (15)$$

のように「 t -分布」を再現する。ただし、このとき分散を表す σ^2 は、スケール因子として解釈する。ここで、 n はサンプル数を表しているの、 q -正規分布のパラメータ q は、系の有限性と関連している可能性がある。実際、このパラメータ q の 1 からの「ずれ」が系の有限性を反映している可能性があるという報告もある [8]。

また、 $q = 2$ のときは、

$$p_2(x) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\sigma} \left[1 + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right]^{-1} \quad (16)$$

のように Cauchy 分布を再現するが、この場合も、分散を表す σ^2 は、スケール因子として解釈する。しかし、 q -モーメントだけを考えるのであれば、当然「 t -分布」の場合も Cauchy 分布の場合も分散として σ^2 を考えることができる。

図 1 に、様々な q の値に対する q -正規分布のグラフを示す。 $q \rightarrow 3$ の極限では、分布は非コンパクトなサポートをもち、完全に平らな高さ 0 の一様分布になる。ここで、 q に上限があるのは、2 次までの q -モーメントの存在を要求することにしたからである。詳細は次の章で述べる。図では、 $q = 2.9$ の場合のグラフが示されている。 $q = 2$ の場合は、Cauchy 分布となり、 $q = 1$ で通常の正規分布となる。 $1 \leq q < 3$ のときは、分布はすべて非コンパクトなサポートをもち、

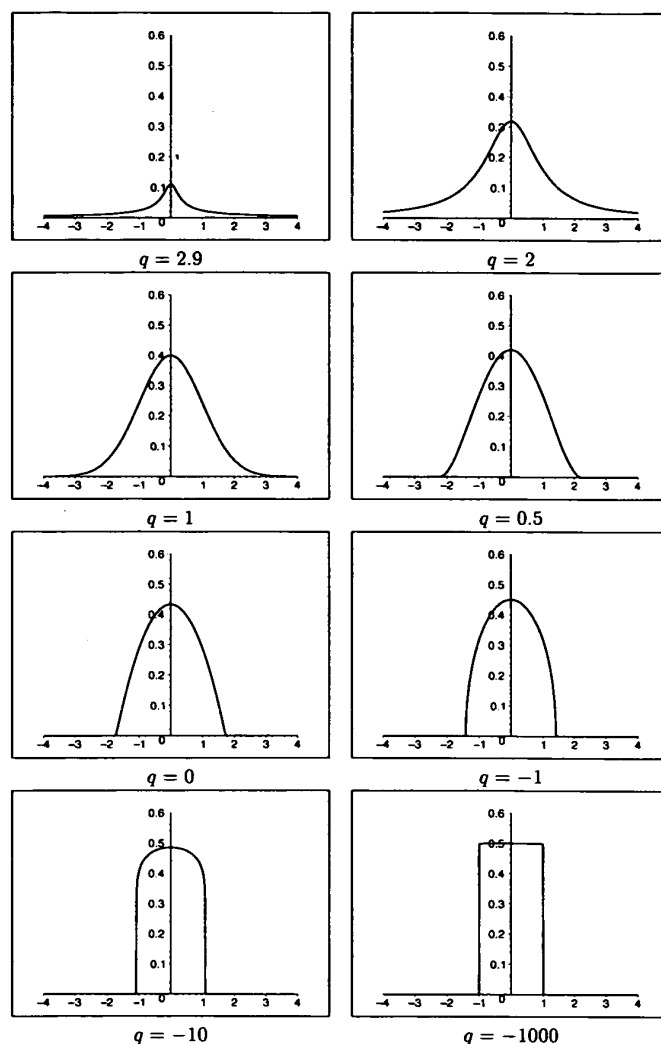


図 1 様々な q の値に対する q -正規分布 ($\mu = 0, \sigma = 1$)

Fig. 1 The q -normal distributions for various q ($\mu = 0, \sigma = 1$).

$q < 1$ の場合には、分布はコンパクトなサポートをもち、それに伴いカットオフ x_-, x_+ をもつようになる。

図では、 $q = 0.5, 0, -1, -10, -1000$ の場合のグラフが示されている。 $q \rightarrow -\infty$ の極限で、分布は幅が 2σ のコンパクトなサポートをもち一様分布になる。特に、 $\mu = \frac{1}{2}, \sigma = \frac{1}{2}$ のときには、分布は Haar のスケーリング関数と一致する。

そこで、分布のサポートがコンパクトになる $q < 1$ の場合に、 q -正規分布をウェーブレットのスケーリング関数として利用することが考えられる。まず、二つの同一の q -正規分布を反対称になるように接続したものが考えられる (図 3 の左)。更に、Gabor ウェーブレットのエンベロープ関数を正規分布型からこの q -正規分布に変えることで、正規「直交」Gabor ウェーブ

レット (q -Gabor ウェーブレット) [9] を構成することができる。ここで「直交」としたのは、厳密にはシフトに関しては直交するが、スケールに関しては近似的にしか直交しないためである。この q -Gabor ウェーブレットにはサポートがコンパクトであることを積極的に利用した場合 (タイプ 2) とそうでない場合 (タイプ 1) の 2 種類が更に考えられる。これに関する詳細については別途報告する予定である。ここでは、タイプ 2 q -Gabor ウェーブレットと呼んでいるものについて、通常の Gabor ウェーブレットとの比較を通じて、その優れている点を示すにとどめる。

まず、通常の Gabor ウェーブレットは、

$$G_a^b(t) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(t-b)^2}{2\sigma^2}} \times \left(e^{i\frac{\omega_0}{\sigma}(t-b)} - e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega_0^2} \right) \quad (17)$$

で与えられ、時間-周波数窓のサイズが最小であることが他のウェーブレットに比べて優れている点である。そこで q -正規分布の場合について、その時間-周波数窓のサイズ、すなわち不確定性関係を求めると次のようになる：

$$\Delta_t \Delta_\omega = \sqrt{\frac{5-q}{2(7-3q)(1+q)}}, \quad (18)$$

for $-1 < q < \frac{7}{3}$.

ただし、時間-周波数窓の幅 Δ_t と高さ Δ_ω は

$$\Delta_t = \sqrt{\frac{3-q}{7-3q}} \sigma, \quad \text{for } q < \frac{7}{3}, \quad (19)$$

$$\Delta_\omega = \sqrt{\frac{5-q}{2(3-q)(1+q)}} \frac{1}{\sigma}, \quad \text{for } q > -1 \quad (20)$$

で与えられる。これにより、 q -Gabor ウェーブレットの時間-周波数窓のサイズは式 (18) で求めることができ、図 2 より、 $q=1$ (Gabor ウェーブレット) の近傍ではほとんど通常の Gabor ウェーブレットと変わらない時間-周波数窓のサイズをもつことがわかる。

q -Gabor ウェーブレットは、 $q < 1$ の範囲ではコンパクトなサポートをもつため、そのサポートのサイズが q -Gabor ウェーブレットに含まれる三角関数の周期 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ の整数倍であると仮定してみる。つまり、

$$\frac{2\pi}{\omega_0} n = 2\sqrt{\frac{3-q}{1-q}} \sigma, \quad (21)$$

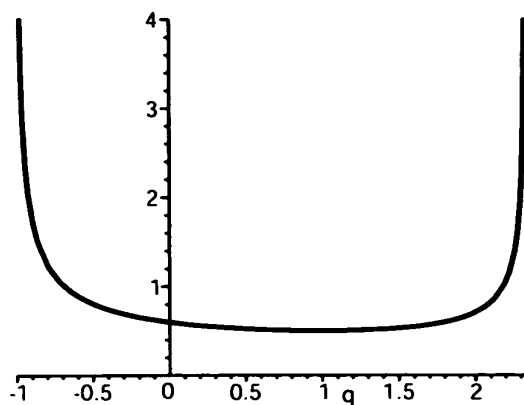


図 2 q -正規分布の不確定性関係
Fig. 2 The uncertainty relation for the q -normal distribution.

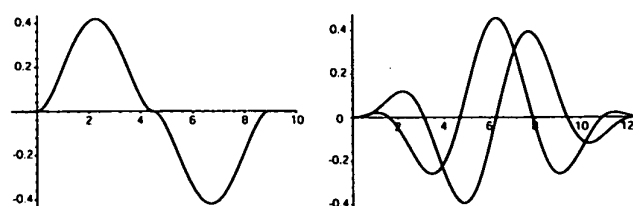


図 3 q -正規分布から作られるウェーブレットの例：左は $q = 0.5$ のときの q -正規分布の組合せ、右は $q = 0.5$, $m = 0$, $n = 2$, $\omega_0 = 1$ のときのタイプ 2 q -Gabor ウェーブレット

Fig. 3 The examples of wavelets constructed by the q -normal distribution: the left is the simple combination of the q -normal distribution with $q = 0.5$, and the right is a type 2 q -Gabor wavelet with $q = 0.5$, $m = 0$, $n = 2$, $\omega_0 = 1$.

と仮定する。このとき、アドミッシブル条件を考慮に入れたタイプ 2 q -Gabor ウェーブレットは次のように定義される (図 3 の右)。

$\frac{2mn\pi}{\omega_0} \leq t \leq \frac{2mn\pi}{\omega_0} + \frac{2n\pi}{\omega_0}$ の範囲では、

$$G_q^m(t|n, \omega_0) = \sqrt{\frac{\omega_0}{n\pi}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{7-3q}{2(1-q)}\right)^2}{\pi \Gamma\left(\frac{3-q}{1-q}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{4}} \times \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_0}{n\pi}\right)^2 \left(t - \frac{2mn\pi}{\omega_0} - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{1-q}} \times \left\{ e^{i\omega_0\left(t - \frac{2mn\pi}{\omega_0} - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)} - \left(\frac{2}{in\pi}\right)^{\frac{3-q}{2(1-q)}} \Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}\right) I_{\frac{3-q}{2(1-q)}}(in\pi) \right\} \quad (22)$$

であり、他の範囲では、 $G_q^m(t|n, \omega_0) = 0$ である。こ

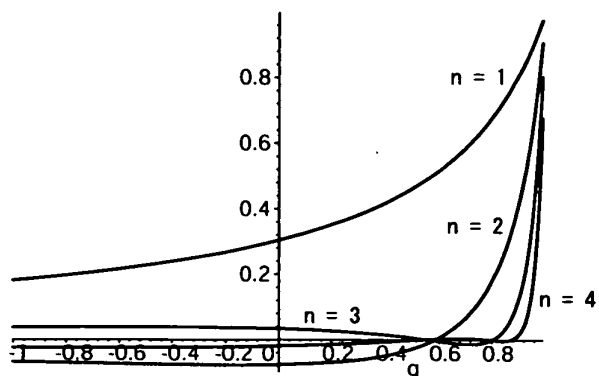


図4 アドミッシブル条件を満たすために導入された項の n と q による変化の様子

Fig. 4 The graphs of the term introduced for the admissible condition.

ここで、関数 $I_\nu(x)$ は第1種の変形された Bessel 関数であり、 m は整数、 n は自然数である。また、アドミッシブル条件を満たすために導入した項は、図4から $n \geq 2$ で $q \leq 0.6$ であれば無視しても構わないことがわかる。

次に、通常の Gabor ウェーブレットでは、時間-周波数窓の幅 $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ と高さ $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ がすべての周波数に対して一定で変化しないという性質をもっていることに注目する。この性質のために、非常に高い周波数や低い周波数を含む信号を解析する際に、Gabor ウェーブレットを用いることは効果的ではない。しかし、タイプ 2 q -Gabor ウェーブレットの場合は、時間-周波数窓の幅と高さはそれぞれ次のようになり、

$$\Delta_t = \sqrt{\frac{1-q}{7-3q}} \frac{n\pi}{\omega_0}, \quad (23)$$

$$\Delta_\omega = \sqrt{\frac{5-q}{2(1-q)(1+q)}} \frac{\omega_0}{n\pi}, \quad (24)$$

$$\Delta_t \Delta_\omega = \sqrt{\frac{5-q}{2(7-3q)(1+q)}}, \quad (25)$$

周波数に応じて時間-周波数窓の幅と高さが変化することがわかる。したがって、この点において q -Gabor ウェーブレットは通常の Gabor ウェーブレットよりも優れているといえる。

以上のことから、 q -Gabor ウェーブレットは、通常の Gabor ウェーブレットとほとんど変わらない時間-周波数窓のサイズをもち、しかも通常の Gabor ウェーブレットとは異なり、時間-周波数窓の幅と高さが周波数に依存して変化するという信号処理にとって都合の良い性質を併せ持っていることがわかる。

また、 q -正規分布は、例えば、スケールスペース

でのカーネルとして、また SVM (Support vector machine) のカーネルとして、そして RBFN (Radial basis function network) の RBF 関数として有用である可能性がある点もここで指摘しておく。

次に、 q -正規分布から構成されるエスコート分布についてまとめておく。エスコート分布は、マルチフラクタル次元を計算するときや、心理学において集団の意見の分布の推移を評価する際に使われる NID モデル (Norm-Information-Distance model) で使われることがある。NID モデルは、人数による規範的影響、意見それ自体の情動的・知的影響及び意見間の距離の三つの要因を考慮に入れたモデルである。

q -正規分布に対するエスコート分布の定義は、次のようになる。

$$\begin{aligned} P_q(x) &= \frac{2}{3-q} \frac{(Z_q p_q(x))^q}{Z_q} \\ &= \frac{2}{3-q} \frac{1}{Z_q^{1-q}} p_q(x)^q \\ &= \frac{2}{3-q} \frac{1}{Z_q} \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}^{\frac{q}{1-q}}. \quad (26) \end{aligned}$$

ここでのエスコート分布の定義は、単純に確率密度関数 $p_q(x)$ を q 乗するだけではなく、その後 q 乗して得られた関数の規格化を行う部分と、もとの確率密度関数自体がパラメータ q に依存する点が特徴となっている。

q -モーメントは、こうして得られたエスコート分布によるモーメントである。このエスコート分布 $P_q(x)$ は、5. で示されるように、 q 乗する前の確率密度関数 $p_q(x)$ と双対な関係をもっている。また、このエスコート分布による期待値を、ここでは、 q -期待値と呼び次のように定義する。

$$\begin{aligned} E_q[f(x)] &= \frac{2}{3-q} \int \frac{dx}{Z_q^{1-q}} f(x) p_q(x)^q \\ &= \int dx f(x) P_q(x). \quad (27) \end{aligned}$$

もちろん $q = 1$ の場合には、 q -期待値は通常の正規分布による期待値 $E[f(x)]$ と一致する。

$$\begin{aligned} E_1[f(x)] &= \int dx f(x) p_1(x) \\ &= \int dx f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

$$= E[f(x)] . \tag{28}$$

4. q-モーメントとフーリエ変換

q-モーメントは、q-期待値により定義されるモーメントである。q-正規分布に対しては、確率密度関数の対称性から奇数次の q-モーメント及び通常のモーメントは 0 になる。偶数次の q-モーメントについては以下のように一般的な公式を与えることができる。ただし、q-期待値に含まれる積分が収束するための条件として q に対して制限が付くことに注意する必要がある [10].

まず、 $q \geq 1$ の場合について、 $2m$ 次までの q-モーメントが必要なときには、 $k = 0, 1, \dots, m = \lceil \frac{3-q}{2(q-1)} \rceil$ として

$$E_q[x] = \mu \tag{29}$$

$$E_q[(x - \mu)^2] = \sigma^2 \tag{30}$$

$$E_q[(x - \mu)^{2k}] = \left(\frac{3-q}{q-1} \sigma^2 \right)^k \frac{B\left(\frac{q+1}{2(q-1)} - k, \frac{1}{2} + k\right)}{B\left(\frac{q+1}{2(q-1)}, \frac{1}{2}\right)}, \tag{31}$$

のように q-モーメントの公式を得ることができる。このとき、k の範囲に対する制限は、q に対する次のような制限を与える。2m 次までの q-モーメントが必要なときの q の範囲は、

$$1 \leq q < 1 + \frac{2}{2m-1}, \tag{32}$$

でなければならない。これは、2m 次の q-モーメントの計算に含まれる積分の収束条件からくるものである。ただし、 $m = 0$ 、すなわち規格化さえできればよい場合には、 $q \geq 1$ でよいことに注意する。また、2 次の q-モーメントの存在までを要求するときには、 $m = 1$ として、 $1 \leq q < 3$ となる。偶数次の q-モーメントすべての存在を要求すると、 $q \geq 1$ の範囲では、 $q = 1$ となる。つまり、この範囲では、通常の正規分布である必要がある。ちなみに $q = 1$ のとき、

$$E_1[x] = \mu \tag{33}$$

$$E_1[(x - \mu)^2] = \sigma^2 \tag{34}$$

$$E_1[(x - \mu)^{2k}] = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) \sigma^{2k}, \tag{35}$$

のようにモーメントが与えられる。ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots$ である。

また、 $q \leq 1$ の場合には、すべての偶数次の q-モーメントが存在し次のように与えられる。

$$E_q[x] = \mu \tag{36}$$

$$E_q[(x - \mu)^2] = \sigma^2 \tag{37}$$

$$E_q[(x - \mu)^{2k}] = \left(\frac{3-q}{1-q} \sigma^2 \right)^k \frac{B\left(\frac{1}{1-q}, \frac{1}{2} + k\right)}{B\left(\frac{1}{1-q}, \frac{1}{2}\right)}. \tag{38}$$

ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots$ である。特に、 $q < 1$ の場合には、q-正規分布はコンパクトなサポートをもつことに注意する。

一方、通常のモーメントは、次のようになる。 $q \geq 1$ の場合で、2m 次までのモーメントが必要なとき、q の範囲は $1 \leq q < 1 + \frac{2}{2m+1}$ となり、

$$E[x] = \mu \tag{39}$$

$$E[(x - \mu)^2] = \frac{3-q}{5-3q} \sigma^2 \tag{40}$$

$$E[(x - \mu)^{2k}] = \left(\frac{3-q}{q-1} \sigma^2 \right)^k \frac{B\left(\frac{3-q}{2(q-1)} - k, \frac{1}{2} + k\right)}{B\left(\frac{3-q}{2(q-1)}, \frac{1}{2}\right)}, \tag{41}$$

となる。ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots, m = \lceil \frac{5-3q}{2(q-1)} \rceil$ であることに注意する。また、 $q \leq 1$ の場合には、

$$E[x] = \mu \tag{42}$$

$$E[(x - \mu)^2] = \frac{3-q}{5-3q} \sigma^2 \tag{43}$$

$$E[(x - \mu)^{2k}] = \left(\frac{3-q}{1-q} \sigma^2 \right)^k \frac{B\left(\frac{2-q}{1-q}, \frac{1}{2} + k\right)}{B\left(\frac{2-q}{1-q}, \frac{1}{2}\right)}, \tag{44}$$

のようになる。ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots$ である。

2 次以上の高次のモーメントが q-モーメントの場合と異なっていることがわかる。また、 $q = 1$ の場合には、既に述べたように通常のモーメントと q-モーメントは、どちらも正規分布によるモーメントに一致する。

このようにモーメントは得ることができが、q の値に応じて何次のモーメントまで存在するかが変わってくることに注意する必要がある。そのため、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} E[x^k] = E[e^{i\omega x}], \tag{45}$$

のようにモーメントを用いて特性関数を得ようとした

場合、 $q > 1$ の場合には得ることができない。形式的に、モーメントが存在する次数まで和をとることで‘特性関数’を定義できるが、これは $q > 1$ の場合の q -正規分布の本来の特性関数であるフーリエ変換とは一致しない(ただし、規格化定数の $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ を無視している)。

一般に、 $1 < q < \frac{5}{3}$ の場合の q -正規分布のフーリエ変換の公式を与えることは難しいが、 $q = 1 + \frac{1}{n}$ の場合には次のような公式を与えることができる。ただし、 $n = 2, 3, 4, \dots$ である。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\omega x} p_{1+\frac{1}{n}}(x) \\ &= \frac{e^{i\omega\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sqrt{2n-1}\sigma|\omega|} \left[1 + \sqrt{2n-1}\sigma|\omega| \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=0}^{n-3} \left\{ \prod_{k=0}^m \frac{2}{2+k} \frac{n-2-k}{2n-3-k} \right\} \right. \\ & \quad \left. \times (\sqrt{2n-1}\sigma|\omega|)^{m+2} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

一方、 $q \leq 1$ のときには、 q -正規分布のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\frac{3-q}{1-q}}\sigma}^{\sqrt{\frac{3-q}{1-q}}\sigma} dx e^{i\omega x} p_q(x) \\ &= \frac{e^{i\omega\mu}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3-q}{4(1-q)} \omega^2 \sigma^2 \right)^k \\ & \quad \times \frac{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}+k\right)}, \end{aligned} \quad (47)$$

のように求めることができる。ただし、この場合はすべての次数のモーメントが存在するので、式(45)で定義される特性関数を用いて、モーメントの公式を使うことにより、楽に求めることができる。

5. q -正規分布の双対性

これまで、 q -正規分布とそれから構成されるエスコート分布を別々に扱ってきたが、実は両者の間には、以下で見るとように双対な関係が存在している。これにより、エスコート分布に対する別の解釈も可能となる。つまり、エスコート分布は、 q -正規分布を別の q -正規分布に写し、同時にその標準偏差をスケールしたものであるとみなすことができるのである。また、この関係を利用して、 q -正規分布同士の双対性も定義することができる。

まず、 q -正規分布とエスコート分布との間に成り立つ双対性を示す。 q -正規分布 $p_{q'}(x : \mu, \sigma')$ が与えられたとき、その分布を表すパラメータ q' とその標準偏差 σ' に対して、次のようなパラメータの変換を考える。

$$\begin{aligned} q' &= 2 - \frac{1}{q} \\ \sigma' &= \sqrt{\frac{3-q}{1+q}} \sigma \end{aligned} \quad (48)$$

この変換のもとで、 $q' = 1$ のとき、すなわち通常の正規分布の場合は、 $q = 1$ となり、したがって標準偏差も $\sigma' = \sigma$ となる。つまり、この変換のもとで、正規分布は自分自身に写ることがわかる。

さて、このとき以下に示すように、この変換により、 q -正規分布 $p_{q'}(x : \mu, \sigma')$ は、別の q -正規分布 $p_q(x : \mu, \sigma)$ のエスコート分布 $P_q(x : \mu, \sigma)$ に写されることがわかる。

$$\begin{aligned} & p_{q'}(x : \mu, \sigma') \\ &= \frac{1}{Z_{q'}} \left\{ 1 - \frac{1-q'}{3-q'} \frac{(x-\mu)^2}{(\sigma')^2} \right\}^{\frac{1}{1-q'}} \\ &= \frac{1}{\frac{3-q}{2} Z_q} \\ & \quad \times \left\{ 1 - \frac{1-(2-\frac{1}{q})}{3-(2-\frac{1}{q})} \frac{(x-\mu)^2}{\left(\sqrt{\frac{3-q}{1+q}}\sigma\right)^2} \right\}^{\frac{1}{1-(2-\frac{1}{q})}} \\ &= \frac{2}{3-q} \frac{1}{Z_q} \left\{ 1 - \frac{1-q}{1+q} \frac{(x-\mu)^2}{\frac{3-q}{1+q}\sigma^2} \right\}^{\frac{q}{1-q}} \\ &= \frac{2}{3-q} \frac{1}{Z_q} \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}^{\frac{q}{1-q}} \\ &= P_q(x : \mu, \sigma) \end{aligned} \quad (49)$$

ただし、ここで上記の変換式(48)のもとでの、以下のような規格化定数 $Z_{q'}$ の変換性を用いた。

$$\begin{aligned} & Z_{q'} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{3-q'}{q'-1}(\sigma')^2\right)^{\frac{1}{2}} B\left(\frac{3-q'}{2(q'-1)}, \frac{1}{2}\right), & 1 \leq q' \\ \left(\frac{3-q'}{1-q'}(\sigma')^2\right)^{\frac{1}{2}} B\left(\frac{2-q'}{1-q'}, \frac{1}{2}\right), & q' < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} \left(\frac{3 - (2 - \frac{1}{q})}{(2 - \frac{1}{q}) - 1} \left(\sqrt{\frac{3-q}{1+q}} \sigma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \quad \times B \left(\frac{3 - (2 - \frac{1}{q})}{2((2 - \frac{1}{q}) - 1)}, \frac{1}{2} \right), & 1 \leq q \\ \left(\frac{3 - (2 - \frac{1}{q})}{1 - (2 - \frac{1}{q})} \left(\sqrt{\frac{3-q}{1+q}} \sigma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \quad \times B \left(\frac{2 - (2 - \frac{1}{q})}{1 - (2 - \frac{1}{q})}, \frac{1}{2} \right), & q < 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \left(\frac{1+q}{q-1} \frac{3-q}{1+q} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} B \left(\frac{1+q}{2(q-1)}, \frac{1}{2} \right), & 1 \leq q \\ \left(\frac{1+q}{1-q} \frac{3-q}{1+q} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} B \left(\frac{1}{1-q}, \frac{1}{2} \right), & q < 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \left(\frac{3-q}{q-1} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{3-q}{2} B \left(\frac{3-q}{2(q-1)}, \frac{1}{2} \right), & 1 \leq q \\ \left(\frac{3-q}{1-q} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{3-q}{2} B \left(\frac{2-q}{1-q}, \frac{1}{2} \right), & q < 1 \end{cases} \\
 &= \frac{3-q}{2} Z_q. \tag{50}
 \end{aligned}$$

ここで、この関係を逆に見てみると、エスコート分布 $P_q(x; \mu, \sigma)$ を通じて、 q -正規分布 $p_q(x; \mu, \sigma)$ が、別の q -正規分布 $p_{q'}(x; \mu, \sigma')$ に写されたとみることができる。そこで、上のエスコート分布 $P_q(x; \mu, \sigma)$ に対応した q -正規分布を、もとの q -正規分布のパラメータ q' と σ' で表すと、

$$\begin{aligned}
 &p_{\frac{1}{2-q'}} \left(x; \mu, \sqrt{\frac{3-q'}{5-3q'}} \sigma' \right) \\
 &= \frac{1}{Z_{\frac{1}{2-q'}}} \left\{ 1 - \frac{1-q'}{3-q'} \frac{(x-\mu)^2}{(\sigma')^2} \right\}^{\frac{1}{1-2-q'}} \tag{51}
 \end{aligned}$$

のようになる。このことから、 q -正規分布族は、エスコート分布を介して、

$$\begin{aligned}
 q &\longleftrightarrow \frac{1}{2-q} \\
 \sigma &\longleftrightarrow \sqrt{\frac{3-q}{5-3q}} \sigma
 \end{aligned} \tag{52}$$

のような双対な関係をもっていることがわかる。

図5に、 q -正規分布 $p_q(x; \mu, \sigma)$ の分布を決めるパラメータ q と、それに双対な分布である $p_{q'}(x; \mu, \sigma')$ のパラメータ q' との関係を示す。すなわち、 $q' = \frac{1}{2-q}$ のグラフである。これまでの説明とは逆に、プライム

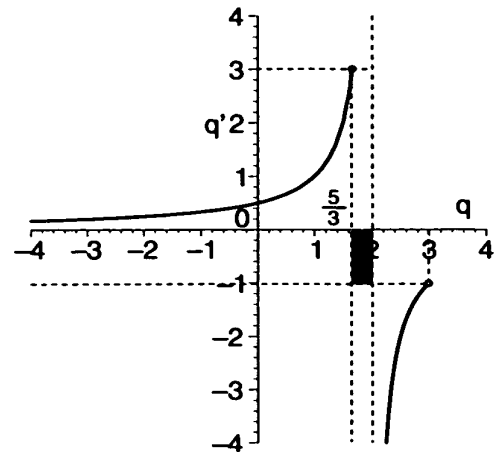


図5 q -正規分布間の双対性：分布を決めるパラメータ q と q' の関係
Fig. 5 The duality of q -normal distributions: the relation between the parameters q and q' .

のない q -正規分布 $p_q(x; \mu, \sigma)$ からプライム付きの q -正規分布 $p_{q'}(x; \mu, \sigma')$ へのエスコート分布を介した写像を考えていることに注意する。

この q -正規分布族の間に成り立つ双対性は、実はすべてのパラメータ q に対して成り立つわけではなく、図5の灰色の四角い部分 ($\frac{5}{3} \leq q \leq 2$) では、対応する q -正規分布は存在しないことに注意する必要がある。これは、 q -正規分布族では分布を決めるパラメータの値が3未満でないとは2次の q -モーメントが存在しないという事情によるものである。すなわち、 q -正規分布の導出の過程で、少なくとも2次までの q -モーメントの存在を要請したために起こる非対応である。

また、対応する q の範囲は、 q -期待値を使うのか、通常の期待値を使うのかによっても変化するので注意が必要である。ここでは、 q -期待値を使う場合を想定している。通常の期待値を使う場合には、 q の上限が $\frac{5}{3}$ となり、図中の灰色の部分には、 q' も同様に $q' < \frac{5}{3}$ を満たす必要があるため、 $q \geq \frac{7}{5}$ の半平面に拡大されることに注意する。

$q = 2$ のときは、 q -正規分布は Cauchy 分布 (σ はスケール因子とみなす) になるが対応する q -正規分布は存在しない。ところが、逆に $q' = 2$ のときには、対応する q -正規分布は $q = \frac{3}{2}$ で指定される。これは、 $n = 3$ のときの 't-分布' (式 (15)) に相当している。また、 $q = 1$ の正規分布は自分自身に対応している。

この双対性のもつ意義については、まだ、あまりよくわかってはいないが、今後 q -正規分布の幾何学を取り扱うことで、より明確になってくるものと期待して

いる。

現在のところ、情報幾何における α -期待値とここでの q -期待値との関係や、非加法的エントロピーである Tsallis エントロピーから派生する q -ダイバージェンスと α -ダイバージェンスとの関係などを具体的に示すことができている。また、幾何学的な量に対して新たな解釈を与えることにも成功している。それに伴い α -接続の定義も多少変更を受けることになるが、この変更は、正規分布族に対しては何の影響も及ぼさない。これは正規分布族の場合には、 q -期待値と通常の期待値が一致するからである。

面白いのは、 α -接続のパラメータ α は確率分布族からなる多様体上に構成される接続構造を変化させるものであるのに対して、 q -正規分布族の幾何学を考えると、その接続構造を変化させるパラメータ α とは独立に、ベースとなる確率分布族からなる多様体そのものを変化させることができるパラメータ q が存在するということである。つまり、 q -正規分布族の q が変化すると、ベースとなる多様体それ自身がそれに伴い変化していくのである。また、正規分布に対する自然座標系を局所スケール変換することで、 q -正規分布の自然座標系が得られるが、計量に関しては局所コンフォーム変換にはならないことも示されている。更に、 q -正規分布族に対する Ricci スカラ曲率の性質についても興味ある結果が得られている。これらの結果に関しては、現在、別の稿としてまとめているところである。

6. q -正規分布の正規分布の周りでの展開

正規分布に‘近い’ある確率密度関数が正規分布からどのくらい離れているかを評価したいとき、若しくはモーメントやキュミュラントはわかっているが、それを与えてくれる確率密度関数を近似的に構成したいときなどに、通常、Gram-Charlier 展開や Edgeworth 展開が用いられる。ここでは、 q -正規分布が正規分布からどのくらい離れているかをより見やすい形で与えたいのであるが、 q -正規分布の場合には、 $q > 1$ のとき、すべての次数のモーメントが存在するわけではないので単純に展開を行うことはできない。また、形式的に展開を行う場合においても、 q -期待値と通常の期待値のどちらで評価すればよいのかが取り扱われる状況によっても変化するので、正規分布に‘近い’にもかかわらず、単純に Gram-Charlier 展開や Edgeworth 展開を q -正規分布に対して行うことはできない。例

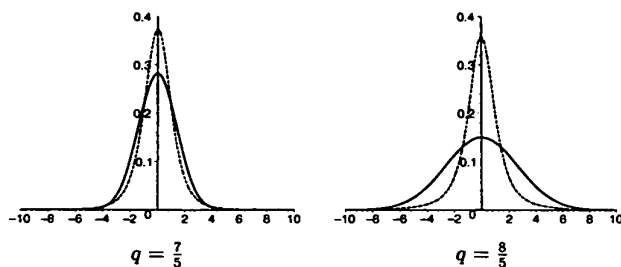


図 6 Gram-Charlier 展開で得られた近似と q -正規分布との比較 ($\mu = 0, \sigma = 1$)

Fig. 6 The comparison of the Gram-Charlier expansion and the q -normal distribution ($\mu = 0, \sigma = 1$).

えば、 q の範囲が $\frac{7}{5} \leq q < \frac{5}{3}$ のときで、通常の期待値を使って Gram-Charlier 展開を試みると、4 次以上のモーメントは発散してしまい存在しないので、3 次までのキュミュラントで近似することになるが 3 次のキュミュラントは 0 になるので、結局

$$\frac{1}{Z_q} \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}^{\frac{1}{1-q}} \approx \sqrt{\frac{5-3q}{2\pi(3-q)\sigma^2}} e^{-\frac{5-3q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (53)$$

で近似することになる。ところが、これは q -正規分布を正規分布そのもので近似するもので、あまり精度の良い近似とはいえない。

実際、図 6 に示すように、この近似はうまくいかない。ここで、図中の点線は q -正規分布を表しており、実線が Gram-Charlier 展開で得られた近似によるグラフを表している。モーメントが 2 次までしか存在しないために、近似が非常に悪くなっているが、 q が $\frac{7}{5}$ になると近似が少し良くなる。これは、 q が 1 に近づくことで正規分布により近くなったことに関係している。

ところで、 q -正規分布は、分布を決めるパラメータ q に関して滑らかなので、 $q = 1$ 、すなわち正規分布の周りで Taylor 展開をすることができる。これにより、 q -正規分布が表すことのできる確率分布が、正規分布からどれだけ離れているかを、より見やすい形で、そして望む次数で近似することができる。

実際、 $q - 1$ の 4 次のオーダーまでならば次のように展開することができる。

$$\frac{1}{Z_q} \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}^{\frac{1}{1-q}}$$

$$\begin{aligned}
 &\simeq \left[1 + \frac{1}{8}(q-1) \left\{ \frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4} - 2\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 1 \right\} \right. \\
 &+ \frac{1}{384}(q-1)^2 \left\{ 3\frac{(x-\mu)^8}{\sigma^8} - 28\frac{(x-\mu)^6}{\sigma^6} \right. \\
 &+ 54\frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4} - 36\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 21 \left. \right\} \\
 &+ \frac{1}{3072}(q-1)^3 \left\{ \frac{(x-\mu)^{12}}{\sigma^{12}} - 22\frac{(x-\mu)^{10}}{\sigma^{10}} \right. \\
 &+ 137\frac{(x-\mu)^8}{\sigma^8} - 316\frac{(x-\mu)^6}{\sigma^6} + 303\frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4} \\
 &- 102\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 57 \left. \right\} \\
 &+ \frac{1}{1474560}(q-1)^4 \left\{ 15\frac{(x-\mu)^{16}}{\sigma^{16}} \right. \\
 &- 600\frac{(x-\mu)^{14}}{\sigma^{14}} + 7820\frac{(x-\mu)^{12}}{\sigma^{12}} \\
 &- 42456\frac{(x-\mu)^{10}}{\sigma^{10}} + 108330\frac{(x-\mu)^8}{\sigma^8} \\
 &- 140520\frac{(x-\mu)^6}{\sigma^6} + 87660\frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4} \\
 &\left. - 17640\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 4545 \right\} \left. \right] \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (54)
 \end{aligned}$$

このとき、 $q < 1$ の場合には、カットオフ x_- , x_+ が存在するため、この展開式においてもカットオフの外側での近似式の値は 0 と定義する。

図 7 に、様々な q に対する q -正規分布と Taylor 展開により得られた近似式によるグラフを示す。点線で示されたグラフが q -正規分布のグラフで、実線が Taylor 展開による近似で得られたグラフを表している。かなり q の広い範囲でうまく近似できていることがわかる。

また、上記の近似式はエルミート多項式を用いて以下のように表すこともできる。

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{Z_q} \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}^{\frac{1}{1-q}} \\
 &\simeq \left[1 + (q-1) \left\{ \frac{1}{8}h_4 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + \frac{1}{2}h_2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\} \right. \\
 &+ (q-1)^2 \left\{ \frac{1}{128}h_8 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + \frac{7}{48}h_6 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right. \\
 &+ \frac{11}{16}h_4 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + \frac{3}{4}h_2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \left. \right\} \\
 &+ (q-1)^3 \left\{ \frac{1}{3072}h_{12} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right.
 \end{aligned}$$

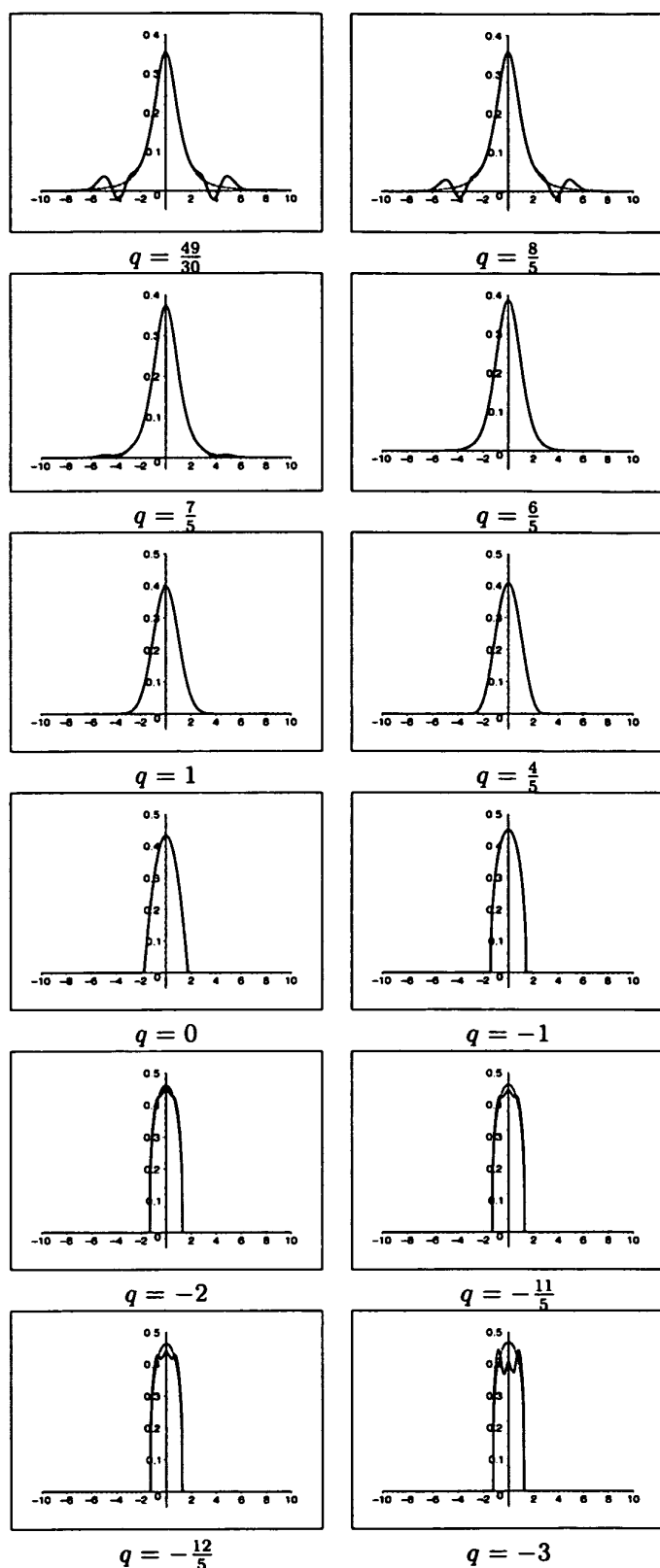


図 7 様々な q の値に対する q -正規分布の Taylor 展開による近似と q -正規分布との比較 ($\mu = 0, \sigma = 1$)
 Fig. 7 The comparison of the Taylor expansion of the q -normal distribution and the q -normal distribution for various q ($\mu = 0, \sigma = 1$).

$$\begin{aligned}
& + \frac{11}{768} h_{10} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + \frac{79}{384} h_8 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \\
& + \frac{55}{48} h_6 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + \frac{73}{32} h_4 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \\
& + \frac{9}{8} h_2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \Big\} \\
& + (q-1)^4 \left\{ \frac{1}{98304} h_{16} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right. \\
& + \frac{5}{6144} h_{14} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + \frac{439}{18432} h_{12} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \\
& + \frac{2467}{7680} h_{10} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + \frac{3181}{1536} h_8 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \\
& + \frac{1153}{192} h_6 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + \frac{419}{64} h_4 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \\
& \left. + \frac{27}{16} h_2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\} \Big\} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}. \quad (55)
\end{aligned}$$

ただし、エルミート多項式 $h_n(x)$ は次のように定義されている。

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (56)$$

7. む す び

本論文では、非加法的エントロピーである Tsallis エントロピーの平衡分布に、2次までの q -モーメントの存在を要求することで得られる確率密度関数は、互いに一つのパラメータ q で結び付いていることを示した。つまり、データから2次までの q -モーメントを求めることで、一つのパラメータに依存した正規分布を含む確率密度関数の族、すなわち q -正規分布族を構成できることを示した。 q -正規分布と、従来知られている正規分布を含む確率分布族との最も重要な違いは、通常の正規分布を含む確率分布族では、正規分布のみが情報量すなわち Boltzmann-Shannon エントロピーを最大化するものとして明確なエントロピーとの関係が付けられるのに対して、 q -正規分布では、パラメータ q により決定されるすべての確率分布は、必ずその q の値に応じたエントロピー (Tsallis エントロピー) をただ一つもっており、その対応するエントロピーを最大化するという例外のない明確な情報量との関係をもつことである。

この確率密度関数による期待値には、通常の期待値のほかに、エスコート分布による期待値の2通りの期待値が考えられ、それぞれについて一般的なモーメントを得るための公式も与えた。また、 q -正規分布 $p_q(x; \mu, \sigma)$ は、エスコート分布を介して、別の q -正

規分布 $p_{\frac{1}{2-q}} \left(x; \mu, \sqrt{\frac{3-q}{5-3q}} \sigma \right)$ と双対な関係をもつこと、正規分布はこの双対変換に対して不変であることを示した。更に、 q -正規分布は q について滑らかなので、正規分布の周りで展開できることを具体的に示した。

この q -正規分布は、通常の正規分布を含むので、これまで正規分布を用いて考えられてきた様々な分野に適用することで、最低でもこれまでのパフォーマンスを保証し、更により良いパフォーマンスが得られる可能性がある。今後、具体的な応用に関しても研究を進めていく予定である。

謝辞 議論をして頂いた旧電子技術総合研究所情報科学部情報数理研究室 (現産業技術総合研究所) の皆様に感謝致します。また、有益なコメントを頂いた埼玉大学の重原孝臣、日本大学の阿部純義の両氏にも感謝致します。

文 献

- [1] C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics," J. Stat. Phys., vol.52, pp.479-487, 1988.
- [2] "Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics," Special Issue, Brazilian J. Physics, vol.29, no.1, 1999.
- [3] C.-K. Peng, J. Mietus, J.M. Hausdorff, S. Havlin, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger, "Long-range anticorrelations and non-Gaussian behavior of the heart-beat," Phys. Rev. Lett., vol.70, pp.1343-1346, 1993.
- [4] S. Abe and A.K. Rajagopal, "Microcanonical foundation for systems with power-law distributions," J. Phys. A: Math. Gen., vol.33, pp.8733-8738, 2000.
- [5] S. Abe and A.K. Rajagopal, "Nonuniqueness of canonical ensemble theory arising from microcanonical basis," Phys. Lett. A, vol.272, pp.341-345, 2000.
- [6] S. Abe and A.K. Rajagopal, "Justification of power law canonical distributions based on the generalized central-limit theorem," Europhys. Lett., vol.52, no.6, pp.610-614, 2000.
- [7] M. Schroeder, Fractals, Chaos, Power Laws, W.H. Freeman and Company, 1991.
- [8] A.R. Plastino and A. Plastino, "From Gibbs microcanonical ensemble to Tsallis generalized canonical distribution," Phys. Lett. A, vol.193, pp.140-143, 1994.
- [9] M. Tanaka, On the q -Gabor wavelet, SPIE Vision Geometry X, 2001.
- [10] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信, 数学公式 I, p.222, 岩波書店, 1986.

(平成 13 年 2 月 15 日受付, 8 月 30 日再受付)



田中 勝 (正員)

1986 九大・理・物理卒. 1988 同大大学院修士課程了. 1991 同博士課程了. 理博. 同年電子技術総合研究所情報科学部(現産業技術総合研究所)に入所. 1995~1996 カナダ国立科学研究協議会(NRC) 招聘研究員. 1995~1999 阪大・連携大学院助教授(兼). 2000 埼大・工・情報システム工学科助教授, 独立行政法人産業技術総合研究所脳神経情報研究部門に兼任, 現在に至る. パターン認識及び生体模倣型情報処理の研究に従事. 1999~2001 本会誌編集委員. 日本神経回路学会, 日本視覚学会, IEEE CS 各会員.