

論 文

プライム符号の相互相関特性の解析と光 CDMA システムにおけるビット誤り率

志村 弦[†] 八嶋 弘幸[†] 鈴木 誠史[†]

An Analysis of Crosscorrelation Property of Prime Code and Bit Error Rate in Optical CDMA System

Yuzuru SHIMURA[†], Hiroyuki YASHIMA[†], and Jouji SUZUKI[†]

あらまし プライム符号を用いた光 CDMA システムのビット誤り率を解析する。従来、プライム符号を用いた光 CDMA システムの詳細な特性は示されていない。本研究では、まずプライム符号の相互相関特性を詳細に解析する。その解析結果を利用して、相互相関値の確率密度関数を用いる符号の組合せが最悪となる場合と平均の場合で求め、ビット誤り率の近似式を導出する。得られた理論値をシミュレーションの結果と比較し、良好な近似であることを示す。また、光直交符号を用いたシステムと比較し、プライム符号がビット誤り率の低い優れた符号であることを示す。

キーワード 光通信, 光 CDMA システム, プライム符号, 相互相関特性

1. まえがき

符号分割多元接続 (Code Division Multiple Access, CDMA) の光通信への適用が近年幅広く研究されてきている [1]~[5]。CDMA システムでは、多重化された通信路から特定のユーザへの信号のみを検出する必要があるため、それぞれのユーザに signature code と呼ばれる固有の符号 (以下単に「符号」とする。) を与える。この符号は、異なる二つの符号の相互相関値が小さくなるように設計する。受信する際には、多重化された信号と符号との相関をとり、検出を行う。

CDMA システムにおいて符号はシステムの性能を決定する極めて重要な要素である。無線通信における CDMA システムでは ± 1 の値をとる M 系列がよく知られているが、本研究が対象とする非コヒーレント光通信においては、光の強度は非負であるため、0 と 1 からなる符号を用いる。光 CDMA に用いられる符号としては、光直交符号 (Optical Orthogonal Code, OOC), プライム符号などが提案されている [1],[3]。

プライム符号 [3] は相互相関値が大きいものの、符号の数が多し、この符号の相互相関関数は、使用する

符号によって変化するため、ビット誤り率の解析を困難にしている。従来の研究では、相互相関値の分散を 0.29 とおき、他ユーザによる干渉をガウス分布に近似して誤り率を求めている [4],[5]。

本研究では、プライム符号の相互相関特性を詳しく解析し、その結果を用いて光 CDMA システムにおけるビット誤り率の理論式を導出する。そして、シミュレーションで得られたビット誤り率と比較し、検討を行う。求めた理論式を用いて、現在光 CDMA システムにおいて盛んに検討されている符号である OOC [1] を用いたシステムとの比較を行う。

2. プライム符号

符号のプライムナンバーを素数 P とする。また、“ \cdot ” を modulo P の乗算の演算子とする。まず、プライムシーケンス $S_i^P(j)$ (但し、 $0 \leq i, j < P$) を次の式で生成する。

$$S_i^P(j) = i \cdot j \quad (1)$$

このシーケンス $S_i^P(j)$ を用いて、符号 C_i^P の n ビット目 $C_i^P(n)$ (但し、 $0 \leq n < P^2$) は次の式で定義される。

$$C_i^P(n) = \begin{cases} 1 & n = jP + S_i^P(j) \quad (0 \leq j < P) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

[†] 埼玉大学工学部情報システム工学科, 浦和市
Department of Information and Computer Sciences, Saitama
University, Urawa-shi, 338-0825 Japan

表3 C_3^5 と C_4^5 の相互相関特性
Table 3 Crosscorrelation property of C_3^5 and C_4^5 .

	j_2	0	1	2	3	4
j_1	h_{4j_2}	0	9	13	17	21
	h_{3j_1}	0	9	13	17	21
0	0	0	16	12	8	4
1	8	8	24	20	16	12
2	11	11	2	23	19	15
3	19	19	10	6	2	23
4	22	22	13	9	5	1

$$n_1 + 2n_2 = P^2 \quad (9)$$

から n_1 が求められる。また、符号の長さは P^2 であるので、

$$n_0 + n_1 + n_2 = P^2 \quad (10)$$

から n_0 が求められる。このようにして、プライム符号の相互相関特性が求められる。

一般に二つのプライム符号を $C_{i_1}^P$ と $C_{i_2}^P$ とした場合、 $\text{Lag}[j_1, j_2]$ は式 (8) および式 (2) から、

$$\text{Lag}[j_1, j_2] = P(j_1 - j_2) + (i_1 \cdot j_1 - i_2 \cdot j_2) \pmod{P^2} \quad (11)$$

となる。従って、 $\{(j_{a1}, j_{a2}), (j_{b1}, j_{b2})\}$ が

$$\text{Lag}[j_{a1}, j_{a2}] = \text{Lag}[j_{b1}, j_{b2}] \pmod{P^2} \quad (12)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} P(j_{a1} - j_{a2}) + (i_1 \cdot j_{a1} - i_2 \cdot j_{a2}) \\ = P(j_{b1} - j_{b2}) + (i_1 \cdot j_{b1} - i_2 \cdot j_{b2}) \pmod{P^2} \end{aligned} \quad (13)$$

(但し $j_{a1} \neq j_{b1}$ かつ $j_{a2} \neq j_{b2}$) を満たすとき、

$$\phi_{i_1, i_2}(\text{Lag}[j_{a1}, j_{a2}]) = \phi_{i_1, i_2}(\text{Lag}[j_{b1}, j_{b2}]) = 2 \quad (14)$$

となり、相互相関値が 2 となる。ここで、 $\{(j_{a1}, j_{a2}), (j_{b1}, j_{b2})\}$ と $\{(j_{b1}, j_{b2}), (j_{a1}, j_{a2})\}$ の重複を避けるため、

$$\begin{aligned} j_{a1} - j_{a2} < j_{b1} - j_{b2} \pmod{P} \\ \text{または} \\ j_{a1} - j_{a2} = P - 1 \text{ かつ } j_{b1} - j_{b2} = 0 \pmod{P} \end{aligned} \quad (15)$$

とすると、式 (13) かつ式 (15) を満たす $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\}$ は、次の 3 式

$$j_{a1} - j_{a2} = j_{b1} - j_{b2} - 1 \pmod{P} \quad (16)$$

かつ

$$(i_1 \cdot j_{a1} - i_2 \cdot j_{a2}) - (i_1 \cdot j_{b1} - i_2 \cdot j_{b2}) = 0 \pmod{P} \quad (17)$$

かつ

$$i_1 \cdot j_{a1} > i_1 \cdot j_{b1}, \quad i_2 \cdot j_{a2} < i_2 \cdot j_{b2} \quad (18)$$

を満たす (付録 1)。従って、式 (16) かつ式 (17) かつ式 (18) を満たす $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\}$ の数が n_2 と等しい。まず、ともに modulo P の式である式 (16) と式 (17) を満たすための $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\}$ の条件を求め、それを更に式 (18) に代入して検討を行う。

式 (16) と式 (17) から、次の条件が得られる (付録 2)。

$$j_{b1} - j_{a1} = \Delta j_1, \quad j_{b2} - j_{a2} = \Delta j_2 \quad (19)$$

但し、

$$\Delta j_1 = \begin{cases} (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} & (i_2 \neq 0) \\ 0 & (i_2 = 0) \end{cases} \pmod{P} \quad (20)$$

かつ

$$\Delta j_2 = \begin{cases} (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} - 1 & (i_2 \neq 0) \\ -1 & (i_2 = 0) \end{cases} \pmod{P} \quad (21)$$

である。すなわち、 $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\}$ が

$$(j_{b1} - j_{a1}, j_{b2} - j_{a2}) = (\Delta j_1, \Delta j_2) \pmod{P} \quad (22)$$

を満たすとき、式 (16), (17) を満たす。ここで、 (j_1, j_2) を要素とした

$$\begin{aligned} (0, F), (\Delta j_1, \Delta j_2 + F), (2\Delta j_1, 2\Delta j_2 + F), \\ \dots, ((P-1)\Delta j_1, (P-1)\Delta j_2 + F), (0, F), \end{aligned} \pmod{P} \quad (23)$$

(但し $0 \leq F < P$) という一連の系列を作り、これを

$$\begin{aligned} (j_1^F[0], j_2^F[0]), (j_1^F[1], j_2^F[1]), (j_1^F[2], j_2^F[2]), \\ \dots, (j_1^F[P-1], j_2^F[P-1]), (j_1^F[0], j_2^F[0]), \end{aligned} \quad (24)$$

と対応させる, すなわち,

$$j_1^F[l] = l\Delta j_1, \quad j_2^F[l] = l\Delta j_2 + F \pmod{P} \quad (25)$$

とすると,

$$\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\} = \{j_1^F[l-1], j_2^F[l-1], j_1^F[l], j_2^F[l]\} \quad (26)$$

を満たす $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\}$ は式 (16) と式 (17) を満たす。加えて, 式 (18) をも満たす条件を得るため, 式 (18) に式 (26) を代入すると,

$$i_1 \cdot j_1^F[l-1] > i_1 \cdot j_1^F[l], \quad i_2 \cdot j_2^F[l-1] < i_2 \cdot j_2^F[l] \quad (27)$$

が得られる。 $i_1 \cdot j_1^F[l]$ と $i_2 \cdot j_2^F[l]$ を求めると, 次のようになる (付録 3)。

$$\begin{aligned} i_1 \cdot j_1^F[l] &= \Delta F \cdot l \\ i_2 \cdot j_2^F[l] &= \Delta F \cdot l + i_2 \cdot F \pmod{P} \end{aligned} \quad (28)$$

但し, ΔF は,

$$\Delta F = \begin{cases} i_1 \cdot (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} & (i_2 \neq 0) \\ 0 & (i_2 = 0) \end{cases} \pmod{P} \quad (29)$$

である。

表 4 に $P = 5, \Delta F = 2$ の場合の $i_1 \cdot j_1^F[l]$ および $i_2 \cdot j_2^F[l]$ を示す。これは, 先の例の C_3^5 と C_4^5 の場合にあたる。括弧内の数字は $j_1^F[l]$ および $j_2^F[l]$ である。まず, 式 (27) の左式の条件を満たすのは, $i_1 \cdot j_1^F[l]$ が 0 を回り込んだ場合であり, 表 4 で数字に \bigcirc をつけて示している。 $i_1 \cdot j_1^F[l]$ は, l が 0 から $(P-1)$ を経て 0 に戻る間に増加量 ΔF で P 回増加するため, 0 を回り込む回数は $(P\Delta F/P) = \Delta F$ 回である。一方, 式 (27) の右式を満たすのは, $i_2 \cdot j_2^F[l]$ が 0 を回り込まなかった場合であり, 表 4 で数字に \triangle をつけて示している。0 を回り込まない回数は, F の異なる系列のそれぞれに $(P - \Delta F)$ 回である。

式 (27) の両式を満たし, $\text{Lag}[j_{a1}, j_{a2}] = \text{Lag}[j_{b1}, j_{b2}]$ となるのは, $i_1 \cdot j_1^F[l]$ に \bigcirc がついていて, $i_2 \cdot j_2^F[l]$ に \triangle がついていて $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\} = \{j_1^F[l-1], j_2^F[l-1], j_1^F[l], j_2^F[l]\}$ であり, 表 4 の \square で囲んだ F と l のときである。例えば, $(F, l) = (2, 3)$ の \square は, $\text{Lag}[3, 3] = \text{Lag}[2, 1]$ が成り立つことを示している。

表 4 $i_1 \cdot j_1^F[l]$ および $i_2 \cdot j_2^F[l]$ ($P = 5, \Delta F = 2, \Delta j_1 = 4, \Delta j_2 = 3$)

Table 4 $i_1 \cdot j_1^F[l]$ and $i_2 \cdot j_2^F[l]$. ($P = 5, \Delta F = 2, \Delta j_1 = 4, \Delta j_2 = 3$)

F	l	0	1	2	3	4
	$i_1 \cdot j_1^F[l]$	$\bigcirc(0)$	2 (4)	4 (3)	$\bigcirc(2)$	3 (1)
0	$i_2 \cdot j_2^0[l]$	0 (0)	$\triangle(3)$	$\triangle(1)$	1 (4)	$\triangle(2)$
1	$i_2 \cdot j_2^1[l]$	$\square(1)$	1 (4)	$\triangle(2)$	0 (0)	$\triangle(3)$
2	$i_2 \cdot j_2^2[l]$	$\square(2)$	0 (0)	$\triangle(3)$	$\square(1)$	1 (4)
3	$i_2 \cdot j_2^3[l]$	$\square(3)$	$\triangle(1)$	1 (4)	$\square(2)$	0 (0)
4	$i_2 \cdot j_2^4[l]$	1 (4)	$\triangle(2)$	0 (0)	$\square(3)$	$\triangle(1)$

$i_2 \cdot j_2^F[l]$ は F の値に応じて P 系列あり, それらは式 (28) から $i_2 \cdot j_2^0[l]$ の系列が巡回したものすべてである。例えば, 表 4 の $i_2 \cdot j_2^1[l]$ は $i_2 \cdot j_2^0[l]$ を右に三つ巡回したものである。故に, $\{i_2 \cdot j_2^F[l] | 0 \leq F < P\}$ は 0 から $(P-1)$ のすべての値を含む。また, $\{i_2 \cdot j_2^F[l] | 0 \leq l < P\}$ もまた 0 から $(P-1)$ のすべての値を含む。よって, $i_1 \cdot j_1^F[l]$ に存在する \bigcirc はそれぞれ $i_2 \cdot j_2^0[l]$ に存在する \triangle の数と同じ回数だけ重なる。従って, 式 (27) を満たす $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\} = \{j_1^F[l-1], j_2^F[l-1], j_1^F[l], j_2^F[l]\}$ の数, すなわち相互相関値が 2 になる τ の数 n_2 は, 表 4 における \square の数であり,

$$n_2 = \Delta F(P - \Delta F) \quad (30)$$

となる。 n_1 と n_0 は, n_2 を用いて式 (9) と式 (10) から求められる。従って, 相互相関値 w の確率密度関数 $P_w(w)$ は,

$$\begin{aligned} P_w(w) &= \frac{\Delta F(P - \Delta F)}{P^2} \delta(w) \\ &+ \left(1 - \frac{2\Delta F(P - \Delta F)}{P^2}\right) \delta(w - 1) \\ &+ \frac{\Delta F(P - \Delta F)}{P^2} \delta(w - 2) \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

3.2 プライム符号の相互相関値の確率密度関数の平均

二つの符号の相互相関特性から, プライム符号の平均の相互相関特性を求める。相互相関特性は i_1 と i_2

表 5 i_1 と i_2 による ΔF ($P=5$)
Table 5 ΔF of i_1 and i_2 . ($P=5$)

$i_1 \setminus i_2$	0	1	2	3	4
0	—	0	0	0	0
1	0	—	2	4	3
2	0	3	—	1	4
3	0	1	4	—	2
4	0	2	1	3	—

から求められる ΔF に依存するため、符号の組合せによる ΔF の分布を検討する。 $P=5$ の場合の i_1 と i_2 による ΔF を表 5 に示す。 $i_1 = 0$ のときは常に $\Delta F = 0$ である。また、 $i_1 \neq 0$ の場合は、表の各行において、 i_1 以外のすべての ΔF が現れる。そのため、表全体では $1 \leq \Delta F < P$ を満たす ΔF が $(P-2)$ 回ずつと $\Delta F = 0$ が $2(P-1)$ 回現れる。これは ΔF の定義である式 (29) から一般に導くことができる (付録 4)。

ここで、 $\Delta F_1 = P - \Delta F_2$ を満たすとき、 ΔF_1 と ΔF_2 の両者の n_2 は等しいため、 $i_1 \neq 0$ かつ $i_2 \neq 0$ の場合については、 2 が $\Delta F(P - \Delta F)$ 回出る符号の組合せが $1 \leq \Delta F \leq (P-1)/2$ を満たす ΔF のそれぞれに $2(P-2)$ 通りあると言い換えることができる。 2 の出る回数 $\Delta F(P - \Delta F)$ をすべての i_1, i_2 の組合せで平均すると、 2 の出る回数の平均 \bar{n}_2 は、

$$\begin{aligned} \bar{n}_2 &= \frac{1}{P(P-1)} 2(P-2) \sum_{\Delta F=1}^{(P-1)/2} \Delta F(P - \Delta F) \\ &= \frac{(P-2)(P+1)}{6} \end{aligned} \quad (32)$$

となるため、プライム符号の相互相関値 w の確率密度関数の平均 $\overline{P_w}(w)$ は、

$$\begin{aligned} \overline{P_w}(w) &= \frac{(P-2)(P+1)}{6P^2} \delta(w) + \frac{2P^2 + P + 2}{3P^2} \delta(w-1) \\ &\quad + \frac{(P-2)(P+1)}{6P^2} \delta(w-2) \end{aligned} \quad (33)$$

となる。

3.3 相互相関値の分散が最大となる場合の確率密度関数

プライム符号の相互相関値の平均は符号の組合せによらず 1 であるから、分散が最も大きい符号の組合せが誤りを発生させやすい。そこで、分散が最大となる符号の組合せの相互相関値の確率密度関数を求める。まず、相互相関値の分散を最大とする ΔF を導出する。3.2 と同様に、 $0 \leq \Delta F \leq (P-1)/2$ とする。確

率密度関数が $P_w(w)$ で表される相互相関値 w の分散 σ_w^2 は、式 (31) から、

$$\sigma_w^2 = -\frac{2}{P^2} \left(\Delta F - \frac{P}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \quad (34)$$

であり、 σ_w^2 は ΔF が $[0, (P-1)/2]$ の範囲で単調増加する。よって、分散 σ_w^2 を最大とする ΔF を $\Delta F_{\sigma^2_{max}}$ とすると、

$$\Delta F_{\sigma^2_{max}} = (P-1)/2 \quad (35)$$

であり、そのときの確率密度関数 $P_w_{\sigma^2_{max}}(w)$ は、式 (31) から、

$$\begin{aligned} P_w_{\sigma^2_{max}}(w) &= \frac{P^2 - 1}{4P^2} \delta(w) + \frac{P^2 + 1}{2P^2} \delta(w-1) \\ &\quad + \frac{P^2 - 1}{4P^2} \delta(w-2) \end{aligned} \quad (36)$$

となる。

4. ビット誤り率の解析

4.1 システム

ここでは、プライム符号を用いた光 CDMA システムのビット誤り率を検討する。本研究では、誤りは他ユーザからの干渉によるもののみを仮定し、また、送受信側でフレーム同期が完全にとれているとする。また、解析を容易にするため、フレーム非同期、チップ同期のシステムを想定する。

図 3 にシステム図を示す。各ユーザの信号はまずレーザで光変調 (On-Off Keying, OOK) され、続いて符号器でプライム符号化される。その結果、“1”を送信する場合はユーザの符号に応じたレーザパルスが送出され、“0”の場合は何も送出されない。システムを使用するすべてのユーザの信号がカプラで多重化されてファイバで伝送される。

受信側では、それぞれの受信者が多重化された信号と受信者に固有の符号との相関をとる。もし、他ユーザの干渉がなければ、“0”が送信されたとき相関値 0、“1”のとき相関値 P となるので、相関値が P 以上のときに“1”が送信されたと判定する。“1”が送信された場合は常に相関値が P 以上になるため誤りは発生せず、“0”が送信され干渉により相関値が P 以上になった場合にのみ誤りとなる。

4.2 ビット誤り率の解析

誤りは他ユーザの干渉によって発生するので、その干渉の大きさの確率分布を検討する。二つのプライム

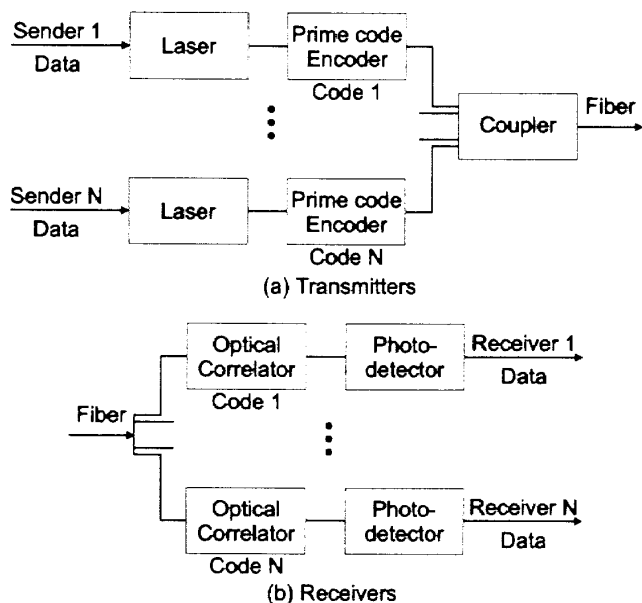


図3 プライム符号を用いた光 CDMA システムのシステム図

Fig.3 Block diagram of optical CDMA system with prime code.

符号の相互相関値の確率密度関数 $P_w(w)$ は式 (31), 式 (33), 式 (36) のように一般に次のように表すことができる。

$$P_w(w) = P_0\delta(w) + P_1\delta(w - 1) + P_2\delta(w - 2) \quad (37)$$

ここで, P_0, P_1, P_2 は係数である。以下では, 求めるビット誤り率の理論式の性質に応じて, 3通りの確率密度関数を用いる。

- まず, 従来知られているプライム符号の相互相関特性である式 (5) を用いて誤り率の上界を求める場合, 確率密度関数として,

$$P_w(w) = \delta(w - 2) \quad (38)$$

を用いる。これを用いた理論式は, 先に求めた相互相関特性を用いた理論式との比較対象とする。

- 次に, 用いる符号をランダムに選択したときの誤り率の平均を求める。そのためには, すべての他ユーザによる干渉量の確率密度関数を用いる必要があるが, その導出が困難であるため, すべての他ユーザの符号との相互相関特性を平均化したものを用いて誤り率を導出する。この場合, 相互相関関数の確率密度関数を式 (33) とする。

- 更に, ユーザ間の符号の組合せで相互相関値の分散が最大となるような, 最も悪い場合を想定した誤り率

を導出する。OOC はすべての符号間で相互相関特性が均一であるが, プライム符号の場合, 符号の組合せによって特性が異なる。例えば, $P = 5$ の場合, 表 2 から, 符号 0 は他のすべての符号に対して相互相関値の分散が小さいのに比べ, 符号 1 や符号 4 は分散が大きくなる場合が多い。従って, 符号の組合せによって誤り率が異なり, ワorstケースの誤り率を知るのは極めて有用である。そのため, すべての他ユーザの符号との相互相関特性が最も分散の大きいものと仮定し, 相互相関値の確率密度関数を式 (36) として誤り率を計算する。

ところで, 提案するシステムはフレーム非同期であるため, 他のユーザの信号は 2 フレームにまたがって干渉する。従って, 他のユーザの送信信号に応じて, 次の 3 種類の干渉パターンが発生する。

- ◎ Case 1: 他のユーザが 2 フレームとも 1 を送信した場合 (確率 1/4)

この場合, 1 フレーム長にわたり他ユーザの信号が干渉する。相互相関関数の確率密度関数が式 (37) のとき, 相互相関値が 2, 1, 0 になる確率 P_{12}, P_{11}, P_{10} はこの場合, それぞれ,

$$P_{12} = P_2, P_{11} = P_1, P_{10} = P_0 \quad (39)$$

である。

- ◎ Case 2: 他のユーザが 1 フレームだけ 1 を送信した場合 (確率 1/2)

この場合, Case 1 と比べ干渉は小さくなる。他ユーザの信号の干渉期間は 0 から 1 フレームの間で様に分布する。ここでは, この場合の干渉期間を平均の 1/2 フレームとする。二つの符号の 1 が重なる確率は平均して 1 フレーム干渉するときの 1/2 であるから, 相互相関値が 2, 1, 0 になる確率 P_{22}, P_{21}, P_{20} は, それぞれ,

$$\begin{aligned} P_{22} &= \frac{1}{4}P_2, P_{21} = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_1, \\ P_{20} &= \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{2}P_1 + P_0 \end{aligned} \quad (40)$$

である。

- ◎ Case 3: 他のユーザが 2 フレームとも 1 を送信しなかった場合 (確率 1/4)

この場合, 干渉は発生しない。

Case 1, Case 2 のユーザ数が (i_1, i_2) のときに, 干

渉が P 以上になる確率 $\Pr(i_1, i_2)$ は,

$$\Pr(i_1, i_2) = \sum_{\substack{0 \leq r_1, s_1 \leq i_1, 0 \leq r_2, s_2 \leq i_2 \\ r_1 + s_1 \leq i_1, r_2 + s_2 \leq i_2 \\ (r_1 + r_2) + 2(s_1 + s_2) \geq P}} \prod_{j=1}^2 \left[\frac{i_j!}{(i_j - r_j - s_j)! r_j! s_j!} P_{j0}^{i_j - r_j - s_j} P_{j1}^{r_j} P_{j2}^{s_j} \right] \quad (41)$$

であるから, 誤り率 P_E は,

$$P_E = \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \leq i_1, i_2 \leq N-1 \\ i_1 + i_2 \leq N-1}} \left[\frac{(N-1)!}{i_1! i_2! (N-1-i_1-i_2)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{i_1} \left(\frac{1}{2} \right)^{i_2} \left(\frac{1}{4} \right)^{N-1-i_1-i_2} \Pr(i_1, i_2) \right] \quad (42)$$

となる (但し, 式 (41) と式 (42) の “ \cdot ” は modulo をとらない乗算である).

5. 理論的解析とシミュレーション結果の比較

計算機によるシミュレーションを行い, 得られたビット誤り率と理論値を比較する. シミュレーションは, 1 ビット送信ごとにフレーム内での時間のずれと使用する符号をランダムで変化させる.

図 4 と図 5 は, それぞれ $P = 13$ と $P = 17$ の場合のビット誤り率を示したものである. シミュレーション

値 (Simulation) に加え, 相互相関値を 2 として得た上界 (Rough PDF), ガウス分布による干渉値の近似によるもの (Gaussian Approx.) の従来知られていた特性を用いたものと, 本研究で導出したプライム符号の特性を利用して求めた, 平均の誤り率 (Mean) と, 符号の組合せが最悪の場合の上界 (Worst Crosscor.) を示す.

まず, Rough PDF と比べると, Mean と Worst Crosscor. はどちらもシミュレーション値に近い結果が得られる. また, Gaussian Approx. と比較すると, Mean, Worst Crosscor. とともに変化の傾向がシミュレーション値に近い. 本研究で導出した正確なプライム符号の相互相関特性によって, より正確な誤り率の近似式が得られたことがわかる.

図 4 と図 5 においては, Worst Crosscor. はシミュレーション値と比べて 10 倍程度大きな誤り率をとった. プライム符号に特有の符号の組合せによる誤り率の劣化は, この場合には大きくても 1 けたであることを示している. また, Mean はシミュレーション値よりやや小さな値を示している. これは, すべての他ユーザによる干渉量の確率密度関数を用いるのではなく, 2 符号間の平均化した相互相関特性を用いたことと, Case 2 において干渉期間を平均したために相互相関値の分散が小さくなることに起因すると考えられる. しかしながら, これらの差は極めて小さく, 無視できる程度であると言える.

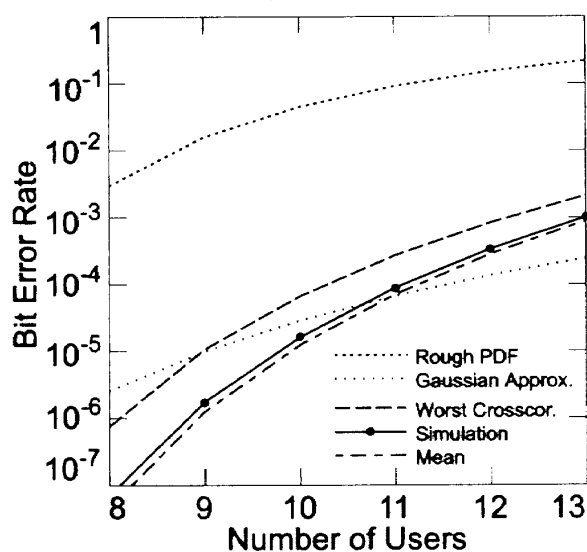


図 4 プライム符号を用いた光 CDMA システムのビット誤り率 ($P = 13$)

Fig.4 Bit error rate of optical CDMA system with prime code. ($P = 13$)

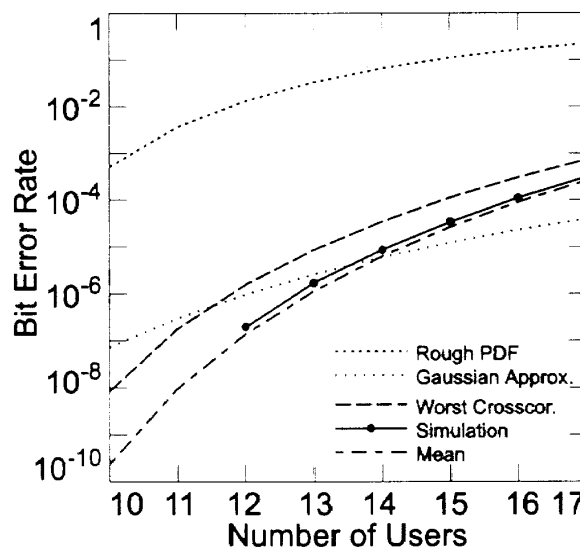


図 5 プライム符号を用いた光 CDMA システムのビット誤り率 ($P = 17$)

Fig.5 Bit error rate of optical CDMA system with prime code. ($P = 17$)

6. OOC との比較

次に、光 CDMA において、よく用いられる符号の一つである OOC との比較を行う。比較にあたっては、フレーム長と最大ユーザ数を一致させる必要がある。OOC は柔軟な設計が可能な符号であるが、それらをプライム符号と完全に一致させることはできない。そこで、フレーム長を一致させ、できるだけ最大ユーザ数が近くなるように、重み、すなわち、符号中の 1 の

数を設定する。OOC のパラメータである、符号長 F 、重み K と符号数 N には次の関係がある [1]、

$$N \leq \left\lfloor \frac{F-1}{K(K-1)} \right\rfloor \quad (43)$$

OOC を用いたチップ同期、フレーム非同期光 CDMA システムのビット誤り率は [2]、

$$P_E = \frac{1}{2} \sum_{i=K}^{N-1} \binom{N-1}{i} \left(\frac{K^2}{2F} \right)^i \left(1 - \frac{K^2}{2F} \right)^{N-1-i} \quad (44)$$

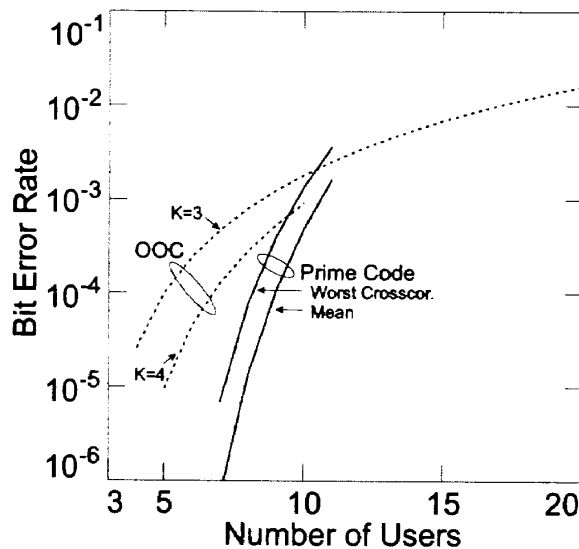


図6 光 CDMA システムにおけるプライム符号と OOC のビット誤り率の比較 ($F = 121$)

Fig.6 Bit error rate of optical CDMA system with prime code and OOC ($F = 121$).

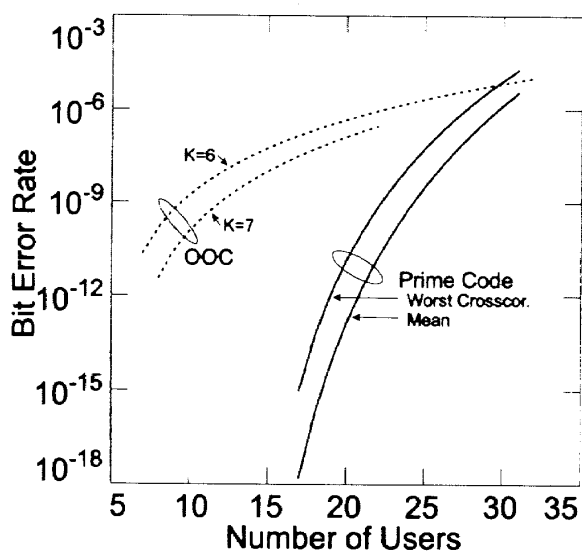


図7 光 CDMA システムにおけるプライム符号と OOC のビット誤り率の比較 ($F = 961$)

Fig.7 Bit error rate of optical CDMA system with prime code and OOC. ($F = 961$)

で得られる。

図6に $P = 11$ のプライム符号とフレーム長 $F = 121$ の OOC の、また、図7に $P = 31$ のプライム符号とフレーム長 $F = 961$ の OOC のビット誤り率を示す。OOC は、プライム符号とユーザ数が近くなる重み K のものである。まず、プライム符号の誤り率は、ユーザ数が減少するにつれて OOC と比べ急激に小さくなるのがわかる。Worst Crosscor. の誤り率は、ユーザ数が最大ユーザ数に近いところで OOC より大きいのが、ユーザ数が少なくなると、誤り率は OOC よりかなり小さくなる。また、プライム符号の誤り率を Mean として比較すると、プライム符号の誤り率は OOC より常に小さく、プライム符号はビット誤り率特性の優れた符号であると言える。

7. むすび

本研究はプライム符号を用いた光 CDMA システムに着目し、そのビット誤り率の精度の高い理論式を求めることを目的とした。まず、プライム符号の相互相関特性の解析を行い、従来より詳細な特性を得た。それをもとに、ビット誤り率の理論式を導出し、シミュレーション結果と比較、検討した。その結果、求めた理論式は良好な近似式であることがわかった。また、Gaussian 近似による理論式に比べて、シミュレーション結果に近い傾向で変化することがわかった。求めた理論値を用いて、プライム符号を用いた光 CDMA システムの誤り率を OOC のものと比較した。ほぼ同じ条件の OOC と比較すると、プライム符号の誤り率はユーザ数が少なくなるとかなり小さくなる。プライム符号は優れたビット誤り率特性を有し、光 CDMA システムにおいて極めて有効な符号であることを示した。

文 献

- [1] J.A. Salehi, "Code division multiple-access techniques in optical fiber network—Part I: fundamental principles," IEEE Trans. Commun., vol.37, pp.824–833, Aug. 1989.
- [2] J.A. Salehi, "Code division multiple-access techniques in optical fiber network—Part II: systems performance analysis," IEEE Trans. Commun., vol.37, pp.834–843, Aug. 1989.
- [3] A.A. Shaar and P.A. Davies, "Prime sequences: Quasi-optimal sequences for or channel code division multiplexing," Electron. Lett., vol.19, pp.888–889, 1983.
- [4] P.R. Prucnal, M.A. Santoro, and T.R. Fan, "Spread spectrum fiber-optic local area network using optical processing," J. Lightwave Technol., vol.LT-4, pp.547–555, May 1986.
- [5] W.C. Kwong, P.A. Perrier, and P.R. Prucnal, "Performance comparison of asynchronous and synchronous code-division multiple-access techniques for fiber-optic local area network," IEEE Trans. Commun., vol.39, pp.1625–1634, Nov. 1991.

付 録

1. 式 (16) と式 (17), 式 (18) の導出

式 (13) を変形すると,

$$(i_1 \cdot j_{a1} - i_2 \cdot j_{a2}) - (i_1 \cdot j_{b1} - i_2 \cdot j_{b2}) = P[(j_{b1} - j_{b2}) - (j_{a1} - j_{a2})] \pmod{P^2} \quad (\text{A.1})$$

まず, 式 (A.1) の左辺を検討する. $0 \leq i \cdot j < P$ であるから,

$$-P < i_1 \cdot j_1 - i_2 \cdot j_2 < P \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ. よって式 (A.1) の左辺について,

$$-2P < (i_1 \cdot j_{a1} - i_2 \cdot j_{a2}) - (i_1 \cdot j_{b1} - i_2 \cdot j_{b2}) < 2P \quad (\text{A.3})$$

が成り立つ. また, 式 (A.1) の右辺は明らかに P の倍数である. よって, 式 (A.1) を満たすのは,

$$(i_1 \cdot j_{a1} - i_2 \cdot j_{a2}) - (i_1 \cdot j_{b1} - i_2 \cdot j_{b2}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

(式 (A.3) から $\text{mod } P^2$ は除去できる) かつ

$$P[(j_{b1} - j_{b2}) - (j_{a1} - j_{a2})] = 0 \pmod{P^2} \quad (\text{A.5})$$

または,

$$(i_1 \cdot j_{a1} - i_2 \cdot j_{a2}) - (i_1 \cdot j_{b1} - i_2 \cdot j_{b2}) = \pm P \quad (\text{A.6})$$

(式 (A.3) から $\text{mod } P^2$ は除去できる) かつ

$$P[(j_{b1} - j_{b2}) - (j_{a1} - j_{a2})] = \pm P \pmod{P^2} \quad (\text{A.7})$$

(式 (A.6) と式 (A.7) は複号同順) を満たすときである.

まず, 式 (A.4) と式 (A.5) を検討する. 式 (A.5) から, $(j_{b1} - j_{b2}) - (j_{a1} - j_{a2}) = 0 \pmod{P}$ であるから,

$$(j_{b1} - j_{b2}) = (j_{a1} - j_{a2}) = c \pmod{P} \quad (\text{A.8})$$

を式 (A.4) に代入すると,

$$(i_1 - i_2)(j_{a1} - j_{b1}) = 0 \pmod{P} \quad (\text{A.9})$$

となる. 相互相関特性を検討しているのだから, 二つのプライム符号は異なるものであり, $i_1 \neq i_2$ である. また, $j_{a1} - j_{b1} = 0$ も式 (13) 下の $j_{a1} \neq j_{b1}$ から成り立たない. 従って, 検討している条件において, 式 (A.4) と式 (A.5) が同時に満たされることはない.

従って, 式 (A.1) を満たすのは, 式 (A.6) と式 (A.7) を同時に満たす $\{(j_{a1}, j_{a2}), (j_{b1}, j_{b2})\}$ である. ここで, $\{(j_{a1}, j_{a2}), (j_{b1}, j_{b2})\} = \{(J_{a1}, J_{a2}), (J_{b1}, J_{b2})\}$ が式 (A.1) を満たすとき, $\{(j_{a1}, j_{a2}), (j_{b1}, j_{b2})\} = \{(J_{b1}, J_{b2}), (J_{a1}, J_{a2})\}$ もまた式 (A.1) を満たす. 両者で (j_{a1}, j_{a2}) と (j_{b1}, j_{b2}) の組合せは同じなので, 重複を避けるため $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\}$ の条件として,

$$j_{a1} - j_{a2} < j_{b1} - j_{b2} \pmod{P}$$

または

$$j_{a1} - j_{a2} = P - 1 \quad \text{かつ} \quad j_{b1} - j_{b2} = 0 \pmod{P} \quad (\text{A.10})$$

を加えると, 式 (A.7) が常に正となることは明らかである. よって, 式 (A.6) と式 (A.7) から, 複号を外した次の 2 式

$$(i_1 \cdot j_{a1} - i_2 \cdot j_{a2}) - (i_1 \cdot j_{b1} - i_2 \cdot j_{b2}) = P \quad (\text{A.11})$$

かつ

$$P[(j_{b1} - j_{b2}) - (j_{a1} - j_{a2})] = P \pmod{P^2} \quad (\text{A.12})$$

を同時に満たす $\{j_{a1}, j_{a2}, j_{b1}, j_{b2}\}$ の数が n_2 となることがわかる. ここで, 式 (A.12) は,

$$(j_{b1} - j_{b2}) - (j_{a1} - j_{a2}) = 1 \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 13)$$

と書き直すことができる。以上より、式 (A-11) かつ式 (A-13) は式 (A-1) と式 (A-10) の必要十分条件となる。

更に、式 (A-11) は次のように変形することができる。

$$(i_1 \cdot j_{a1} - i_1 \cdot j_{b1}) - (i_2 \cdot j_{a2} - i_2 \cdot j_{b2}) = P \quad (\text{A}\cdot 14)$$

式 (A-14) は、次の 2 式を同時に満たす場合と等価である。

$$(i_1 \cdot j_{a1} - i_1 \cdot j_{b1}) - (i_2 \cdot j_{a2} - i_2 \cdot j_{b2}) = 0 \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 15)$$

かつ

$$P \leq (i_1 \cdot j_{a1} - i_1 \cdot j_{b1}) - (i_2 \cdot j_{a2} - i_2 \cdot j_{b2}) < 2P \quad (\text{A}\cdot 16)$$

ここで、式 (A-2) と同様に、 $-P < i_k \cdot j_{ak} - i_k \cdot j_{bk} < P$ ($k = 1, 2$) であるから、式 (A-16) を満たすためには、

$$i_1 \cdot j_{a1} - i_1 \cdot j_{b1} > 0 \quad \text{かつ} \quad i_2 \cdot j_{a2} - i_2 \cdot j_{b2} < 0 \quad (\text{A}\cdot 17)$$

すなわち、

$$i_1 \cdot j_{a1} > i_1 \cdot j_{b1} \quad \text{かつ} \quad i_2 \cdot j_{a2} < i_2 \cdot j_{b2} \quad (\text{A}\cdot 18)$$

が必要である。従って、式 (A-15) かつ式 (A-18) は式 (A-14) の必要条件である。

ここで、式 (A-18) は式 (A-16) に対して十分条件にならない。しかし、次式

$$0 < (i_1 \cdot j_{a1} - i_1 \cdot j_{b1}) - (i_2 \cdot j_{a2} - i_2 \cdot j_{b2}) < 2P \quad (\text{A}\cdot 19)$$

に対して式 (A-18) は十分条件である。ここで、式 (A-15) かつ式 (A-19) と式 (A-14) もまた等価である。故に、式 (A-15) かつ式 (A-18) は式 (A-14) の十分条件である。

よって、式 (A-15) かつ式 (A-18) は式 (A-14) の必要十分条件である。更に、式 (A-14) は式 (A-11) と等しいため、式 (A-13) かつ式 (A-15) かつ式 (A-18) は式 (A-1) と式 (A-10) の必要十分条件となる。本文中の式で表すと、式 (16) かつ式 (17) かつ式 (18) は式 (13) かつ式 (15) の必要十分条件である。

2. 式 (16) と式 (17) から、式 (20) と式 (21) の導出
この項の演算はすべて modulo P である。まず、 $i_2 \neq 0$ の場合、式 (17) から、

$$j_{b2} = i_1 \cdot i_2^{-1} \cdot (j_{b1} - j_{a1}) + j_{a2} \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 20)$$

が得られる。

これに式 (16) を代入する。式 (16) から、

$$j_{a1} - j_{a2} = j_{b1} - j_{b2} - 1 = c \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 21)$$

とおくと、

$$j_{a2} = j_{a1} - c, \quad j_{b2} = j_{b1} - 1 - c \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 22)$$

が得られる。これを式 (A-20) に代入すると、

$$j_{b1} - j_{a1} = (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 23)$$

となる。また、 $i_2 = 0$ の場合、式 (17) から、

$$-i_1 \cdot (j_{b1} - j_{a1}) = 0 \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 24)$$

となる。ここで、 $i_1 \neq 0$ であるから、

$$j_{b1} - j_{a1} = 0 \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 25)$$

である。また、 $(j_{b2} - j_{a2})$ は、式 (16) から、

$$j_{b2} - j_{a2} = j_{b1} - j_{a1} - 1 \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 26)$$

となる。

3. 式 (28) の導出

この項の演算はすべて modulo P である。 $i_1 \cdot j_1^F[l]$ と $i_2 \cdot j_2^F[l]$ に、式 (25)、式 (20)、式 (21) を代入すると、

$$i_1 \cdot j_1^F[l] = i_1 \cdot l \cdot \Delta j_1 = \begin{cases} l \cdot i_1 \cdot (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} & (i_2 \neq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 27)$$

$$i_2 \cdot j_2^F[l] = i_2 \cdot (l \cdot \Delta j_2 + F) = \begin{cases} l \cdot i_2 \cdot [(1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} - 1] + i_2 \cdot F & (i_2 \neq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 28)$$

l の係数部分をそれぞれ ΔF_1 、 ΔF_2 とすると、

$$\Delta F_1 = \begin{cases} i_1 \cdot (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} & (i_2 \neq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Delta F_2 = \begin{cases} i_2 \cdot [(1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} - 1] & (i_2 \neq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 29)$$

となる。 ΔF_1 と ΔF_2 を比較するため差をとると、

$$\Delta F_1 - \Delta F_2 = 0 \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 30)$$

となり、それぞれの増加量は等しい。これを $\Delta F (= \Delta F_1 = \Delta F_2)$ とする。すなわち、

$$\Delta F = \begin{cases} i_1 \cdot (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} & (i_2 \neq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 31)$$

式 (A.31) を用いて式 (A.27) と式 (A.28) を書き直すと、

$$i_1 \cdot j_1^F[l] = l \cdot \Delta F \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 32)$$

$$i_2 \cdot j_2^F[l] = l \cdot \Delta F + i_2 \cdot F \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 33)$$

$i_1 \cdot j_1^F[l]$ は F に依存しない。

4. i_1 と i_2 による ΔF の分布

この項の演算はすべて modulo P である。式 (29) から、 $i_1 = 0$ または $i_2 = 0$ のとき $\Delta F = 0$ は明らかである。よって、 $i_1, i_2 \neq 0$ について検討する。

まず、 $\Delta F \neq i_1$ を背理法で証明する。 $\Delta F = i_1$ と仮定すると、式 (29) は、

$$i_1 = i_1 \cdot (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1} \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 34)$$

従って、

$$i_1 \cdot i_2^{-1} = 0 \pmod{P} \quad (\text{A}\cdot 35)$$

となるが、 $i_1, i_2 \neq 0$ なので、これは成り立たない。故に、

$$\Delta F \neq i_1 \quad (\text{A}\cdot 36)$$

である。また、式 (29) において、 $i_1 \neq i_2$ であるから、 $i_1 \cdot i_2^{-1}$ は i_2 の値に応じて 0, 1 以外の異なる値をとる。従って、 $(1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1}$ 、また、 $\Delta F = i_1 \cdot (1 - i_1 \cdot i_2^{-1})^{-1}$ も i_2 の値に応じて 0 以外の異なる値をとる。

従って、 i_1 に対して、 $(P-2)$ 個の (i_1, i_2) はそれぞれ異なる ΔF を $0 < \Delta F < P$, $\Delta F \neq i_1$ にとる。 (i_1, i_2) 全体を考えると、 $0 < \Delta F < P$ の ΔF はそれぞれ $(P-2)$ 回現れることがわかる。加えて、 $i_1 = 0$ または $i_2 = 0$ の場合に、 $\Delta F = 0$ が $2(P-1)$ 回現れる。

(平成 9 年 11 月 4 日受付, 10 年 3 月 25 日再受付)



志村 弦 (学生会員)

平 8 埼玉大・工・情報卒。平 10 同大学院理工学研究科情報工学専攻博士前期課程了。同年 NTT 入社。在学中、光 CDMA システムの研究を行う。



八嶋 弘幸 (正員)

昭 56 慶大・工・電気卒。平 2 同大学院博士課程了。工博。同年埼玉大学助手。平 3 同助教授。この間、変復調、符号理論、光通信方式、衛星通信方式に関する研究に従事。平 6 カナダ、ビクトリア大学客員研究員。平 1 Society of Satellite Professionals International, Scholarship Award 受賞。情報理論とその応用学会、IEEE 各会員。



鈴木 誠史 (正員)

昭 30 東工大・工・電気卒。同年郵政省電波研究所(現、通信総合研究所)入所。昭 42 同通信機器部音声研究室長。昭 57 同情報処理部長。昭 60 同総合通信部長。昭 63 通信総合研究所長。平 1 埼玉大・工・教授。平 10 日本工大教授。東洋通信機中央研究所技術顧問。昭 41~42, MIT 客員研究員。この間、音声合成、音声認識、通信品質の改善、音声伝送方式などの音声情報処理、通信システムの研究に従事。工博。アメリカ音響学会、日本音響学会、映像情報メディア学会、情報処理学会、IEEE 各会員。