

偏平回転だ円体状空かあるいは円形き裂面に温度分布が与えられた 円柱の定常熱応力*

内山 豊美^{*1}, 土田 栄一郎^{*2}

Thermal Stresses in an Elastic Circular Cylinder Containing an Oblate Spheroidal Cavity or a Penny-shaped Crack Subjected to a Prescribed Temperature Distribution

Toyomi UCHIYAMA^{*3} and Eiichiro TSUCHIDA

^{*3} Division of Mechanical Engineering and Science,
Graduate School of Science and Engineering, Saitama University,
255 Shimo-Ohkubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

This paper contains an exact solution for the state of stress in an elastic circular cylinder with an oblate spheroidal cavity or an internal penny-shaped crack, the surface of which is subjected to a prescribed temperature distribution. The solution is deduced with the aid of thermoelastic displacement potentials and Dougall's displacement potentials. Two sets of harmonic functions and two sets of biharmonic functions are given by simple expressions referring to cylindrical and oblate spheroidal coordinates. The boundary conditions on the surfaces of the cylinder and the cavity are satisfied by using the relations between the cylindrical and oblate spheroidal harmonics and biharmonics. The solution for an internal penny-shaped crack is also given by regarding as a limited case of an oblate spheroidal cavity. Numerical results for stress distributions, stress concentration factors and stress intensity factors are shown graphically.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Spheroidal Cavity, Penny-shaped Crack, Stress Intensity Factor, Cylinder

1. 緒 言

空かあるいはき裂などの内部欠陥を有する部材の熱応力問題を解析することの重要性から、著者ら(1),(2)は、さきに回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する円柱の内部に一定温度勾配の定常熱流が存在する場合について解析し、応力集中係数、応力拡大係数およびこれらに及ぼす欠陥の形状や大きさの影響を明らかにした。これに対し、欠陥表面に温度分布が与えられた場合の熱応力問題も強度設計上重要であり、渥美ら(3)およびDas(4),(5)が、それぞれ球かおよび円形き裂を対象として個々に取り扱っている。

本研究は、これらの欠陥を含む、より一般的な形状の欠陥として、円柱内の偏平回転だ円体状空か面に温度分布が与えられた場合の定常熱応力問題を、三次元熱弾性理論に基づいて厳密に解析したものである。解析においては、熱弾性変位ポテンシャルおよびDougallの変位関数を用い、両者に偏平回転だ円体座標および

円柱座標における関数系を与え、互いに座標変換することにより、空か面および円柱側面の境界条件を同時に満足させた。力学的境界条件は、空か面においては応力自由とし、円柱側面においては、Dasに従って、半径方向変位拘束(Smooth surface)と応力自由(Stress-free)の2種類の条件を仮定した。

2. 解 析 法

2.1 温度分布 図1に示されるように、円柱半径を単位長さとして全ての長さの基準にとり、偏平回転だ円体状空かの長軸、短軸の長さおよび焦点間距離をそれぞれ $2a$, $2b$, $2c$ とする。空か中心Oを座標原点として円柱座標 (r, θ, z) および偏平回転だ円体座標 (α, β, γ) を用いれば、両座標間には

$$r = c\xi\bar{\eta}, \quad \theta = \gamma, \quad z = c\xi\eta \quad (1)$$

の関係がある。ここで、 $\xi = \sinh \alpha$, $\bar{\xi} = \cosh \alpha$, $\eta = \cos \beta$, $\bar{\eta} = \sin \beta$ である。

いま、偏平回転だ円体状空か面に η に関する任意の偶関数で表される温度分布が与えられ、円柱側面においては温度零の状態にあるものとする。この場合、定

* 原稿受付 2007年1月15日。

^{*1} 正員, 埼玉大学大学院理工学研究科人間支援・生産科学部門
(〒338-8570 さいたま市桜区下大久保255)。

^{*2} 正員, フェロー, 埼玉大学名誉教授。

E-mail: barabbas@mech.saitama-u.ac.jp

常状態におけるフーリエの熱伝導方程式

$$\nabla^2 T = 0 \tag{2}$$

を満たす温度関数 T は、次の条件を満足しなければならない。

円柱側面 $r = 1$ において：

$$(T)_{r=1} = 0 \tag{3}$$

空か面 $\alpha = \alpha_0$ において：

$$(T)_{\alpha=\alpha_0} = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_{2n}(\eta) \tag{4}$$

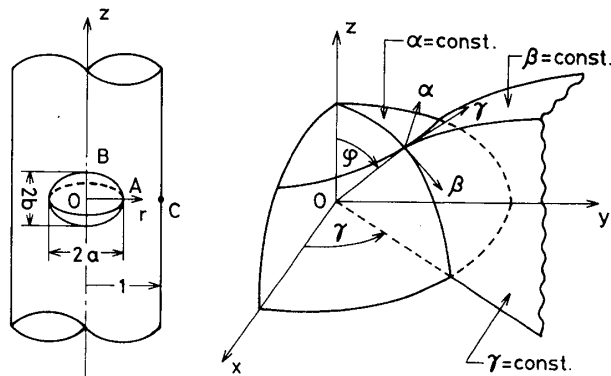


Fig. 1 Coordinate system.

ここで、 T_0 は基準温度、 H_n は温度関数をルジャンドル級数展開したときの各項の係数である。温度条件式 (3), (4) を満足させるために、温度関数 T に次のような調和関数を与える。

$$T = T_0 \sum_{m=0}^{\infty} F_m q_{2m}(\xi) P_{2m}(\eta) + T_0 \int_0^{\infty} \phi(\lambda) I_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \tag{5}$$

ここで、 F_m および $\phi(\lambda)$ はそれぞれ温度条件より決定される未定係数ならびに未知関数である。また、 $I_n(\lambda r)$ は第 1 種変形ベッセル関数、 $P_n(\eta)$ は第 1 種ルジャンドル関数、 $q_n(\xi)$ は第 2 種変形ルジャンドル関数⁽⁶⁾ である。

まず、円柱側面における温度条件式 (3) を満足させるために、関係式⁽⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} i_{2m+n}(\lambda c) K_n(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda &= \frac{\pi}{2c} (-1)^{m+n} q_{2m+n}^n(\xi) P_{2m+n}^{-n}(\eta) \\ \int_0^{\infty} i_{2m+n+1}(\lambda c) K_n(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda &= \frac{\pi}{2c} (-1)^{m+n} q_{2m+n+1}^n(\xi) P_{2m+n+1}^{-n}(\eta) \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

を用いて、式 (5) を円柱座標で表すと、

$$T = T_0 \sum_{m=0}^{\infty} f_m \int_0^{\infty} i_{2m}(\lambda c) K_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda + T_0 \int_0^{\infty} \phi(\lambda) I_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \tag{7}$$

となる。ここで、 $f_m = (2c/\pi)(-1)^m F_m$ であり、 $K_n(\lambda r)$ は第 2 種変形ベッセル関数、 $i_n(\lambda c)$ は第 1 種変形球ベッセル関数⁽⁶⁾、 $q_n^m(\xi)$ は第 2 種変形ルジャンドル陪関数⁽¹⁾、 $P_n^{-n}(\eta)$ は第 1 種ルジャンドル陪関数である。式 (7) を式 (3) に代入し、円柱側面における温度条件を満足させると、未知関数 $\phi(\lambda)$ は次のように決定される。

$$\phi(\lambda) = - \sum_{m=0}^{\infty} f_m i_{2m}(\lambda c) \frac{K_0(\lambda)}{I_0(\lambda)} \tag{8}$$

次に、空か面における温度条件式 (4) を満足させるために、関係式⁽⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} I_n(\lambda r) \cos \lambda z &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} (4m+2n+1) i_{2m+n}(\lambda c) p_{2m+n}^n(\xi) P_{2m+n}^{-n}(\eta) \\ I_n(\lambda r) \sin \lambda z &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} (4m+2n+3) i_{2m+n+1}(\lambda c) p_{2m+n+1}^n(\xi) P_{2m+n+1}^{-n}(\eta) \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

を用いて、式 (5) を偏平回転だ円体座標で表すと、

$$T = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} F_n q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) + T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \tag{10}$$

となる。ここで、

$$\delta_n = -\frac{2c}{\pi}(4n+1) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} F_m \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda)}{I_0(\lambda)} i_{2m}(\lambda c) i_{2n}(\lambda c) d\lambda \quad (11)$$

であり, $p_n^m(\xi)$ は第1種変形ルジャンドル陪関数⁽¹⁾, $p_n(\xi)$ は第1種変形ルジャンドル関数⁽⁶⁾である. 式(10)を式(4)に代入すれば,

$$(T)_{\alpha=\alpha_0} = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{F_n q_{2n}(\xi_0) + \delta_n p_{2n}(\xi_0)\} P_{2n}(\eta) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_{2n}(\eta) \quad (12)$$

を得る. ここで, $\xi_0 = \sinh \alpha_0$ である. 式(12)において, $P_{2n}(\eta)$ の係数部分を等置すれば, 未定係数 F_n に関する無限連立一次方程式が得られ, これを解けば温度関数が完全に決まり, 温度分布が求まる.

2.2 熱弾性変位ポテンシャル 温度分布に起因する応力を求めるために, 熱弾性基礎方程式の特解として,

$$\nabla^2 \Omega = T \quad (13)$$

を満足する熱弾性変位ポテンシャル Ω を用い, 式(7)のそれぞれの項に対応して, Ω に円柱座標のもとでの重調和関数を次のように与える.

$$\Omega = -T_0 \sum_{m=0}^{\infty} f_m \int_0^{\infty} \frac{i_{2m}(\lambda c)}{2\lambda} r K_1(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda + T_0 \int_0^{\infty} \frac{\phi(\lambda)}{2\lambda} r I_1(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \quad (14)$$

偏平回転だ円体座標のもとでは, 式(14)を関係式(6)および(9)を用いて座標変換することにより,

$$\begin{aligned} \Omega = & -T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^2 F_n}{2(4n+1)} \bar{\xi} \bar{\eta} \{q_{2n-1}^1(\xi) P_{2n-1}^{-1}(\eta) + q_{2n+1}^1(\xi) P_{2n+1}^{-1}(\eta)\} \\ & -T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^2 \delta_n}{2(4n+1)} \bar{\xi} \bar{\eta} \{p_{2n-1}^1(\xi) P_{2n-1}^{-1}(\eta) + p_{2n+1}^1(\xi) P_{2n+1}^{-1}(\eta)\} \end{aligned} \quad (15)$$

となる. ただし, $q_{-1}^1(\xi) = \xi/\bar{\xi}$ と定義する.

なお, 熱弾性変位ポテンシャル Ω による変位および応力成分の表示式は文献^{(1),(8)}を参照されたい.

2.3 変位関数解 円柱側面および空か面における変位および応力の境界条件は, 前述の熱弾性変位ポテンシャルおよび温度関数だけでは満足させることができない. そこで, 軸対称三次元熱弾性基礎方程式の同次解として Dougall の変位関数のうち φ_0, φ_4 を用いる. 本論文では, 円柱側面における力学的境界条件を, 半径方向変位拘束 (Smooth surface) と応力自由 (Stress-free) の2種類の条件を扱うので, 以下それぞれについての変位関数による解析法を示す. なお, 空か面においては, いずれの場合も応力自由の状態を仮定した.

2.3.1 半径方向変位拘束 (Smooth surface) の場合 この場合の境界条件は, Das⁽⁴⁾ および Sneddon と Tait⁽⁹⁾ に従えば,

$$\text{円柱側面 } r=1 \text{ において: } \quad (u_r)_{r=1} = (\tau_{rz})_{r=1} = 0 \quad (16)$$

$$\text{空か面 } \alpha = \alpha_0 \text{ において: } \quad (\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0} = (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0} = 0 \quad (17)$$

となる. これらの境界条件式を満足させるために, Dougall の変位関数 φ_0, φ_4 に次のような調和関数を与える.

$$\text{[I]} \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m q_{2m}(\xi) P_{2m}(\eta), \quad \varphi_4 = E\varepsilon T_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) \quad (18)$$

$$\text{[II]} \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \int_0^{\infty} \psi_1(\lambda) I_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda, \quad \varphi_4 = E\varepsilon T_0 \int_0^{\infty} \lambda \psi_2(\lambda) I_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda \quad (19)$$

$$\text{[III]} \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \frac{c}{2(1-\nu)} F_0 z = E\varepsilon T_0 \frac{c^2}{2(1-\nu)} F_0 \xi \eta \quad (20)$$

ここで, A_m, B_m および $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり, ε は線

膨張係数, E は縦弾性係数, ν はポアソン比である. また, 変位関数 [III] は, 熱弾性変位ポテンシャルから生じる剛体変位を除去するために必要とされる. なお, これらの変位関数から導かれる応力成分は, 無限遠方ですべて零となる.

まず, 円柱側面における境界条件を満足させるために, 関係式 (6) を用いて変位関数 [I] を円柱座標に書き改めると, 次のようになる.

$$[\text{IV}] \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_0^{\infty} i_{2m}(\lambda c) K_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda, \quad \varphi_4 = E\varepsilon T_0 \sum_{m=0}^{\infty} b_m \int_0^{\infty} i_{2m+1}(\lambda c) K_0(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda \quad (21)$$

ここで, $a_m = (2c/\pi)(-1)^m A_m$, $b_m = (2c/\pi)(-1)^m B_m$ である. 変位関数 [II], [IV] および熱弾性変位ポテンシャル, 温度関数より各々変位, 応力成分を求め, 円柱側面における境界条件を満足させると,

$$\left(\frac{2Gu_r}{E\varepsilon T_0} \right)_{r=1} = \int_0^{\infty} \lambda \left[I_1(\lambda) \psi_1(\lambda) + \lambda I_0(\lambda) \psi_2(\lambda) - K_1(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} a_m i_{2m}(\lambda c) + K_0(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} b_m i_{2m+1}(\lambda c) \right] \cos \lambda z = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{zr}}{E\varepsilon T_0} \right)_{r=1} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[-I_1(\lambda) \psi_1(\lambda) - \{ \lambda I_0(\lambda) + 2(1-\nu) I_1(\lambda) \} \psi_2(\lambda) \right. \\ \left. + K_1(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} a_m i_{2m}(\lambda c) - \left\{ K_0(\lambda) - 2(1-\nu) \frac{K_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \sum_{m=0}^{\infty} b_m i_{2m+1}(\lambda c) \right] \sin \lambda z d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となる. 式 (22), (23) にそれぞれフーリエ逆変換を施し, 未知関数 $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$ を求めると次のようになる.

$$\psi_1(\lambda) = \frac{K_1(\lambda)}{I_1(\lambda)} \sum_{m=0}^{\infty} a_m i_{2m}(\lambda c) - \frac{1}{\lambda \{ I_1(\lambda) \}^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m i_{2m+1}(\lambda c), \quad \psi_2(\lambda) = \frac{K_1(\lambda)}{\lambda I_1(\lambda)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m i_{2m+1}(\lambda c) \quad (24)$$

次に, 空か面における境界条件を満足させるために, 関係式 (9) を用いて変位関数 [II] を偏平回転だ円体座標に書き改めると, 次のようになる.

$$[\text{V}] \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad \varphi_4 = E\varepsilon T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \quad (25)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2c}{\pi} (4n+1) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \left\{ A_m \int_0^{\infty} \frac{K_1(\lambda)}{I_1(\lambda)} i_{2n}(\lambda c) i_{2m}(\lambda c) d\lambda - B_m \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda \{ I_1(\lambda) \}^2} i_{2n}(\lambda c) i_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ \beta_n &= \frac{2c}{\pi} (4n+3) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} B_m \int_0^{\infty} \frac{K_1(\lambda)}{I_1(\lambda)} i_{2n+1}(\lambda c) i_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

である. 変位関数 [I], [V] および熱弾性変位ポテンシャル, 温度関数より各々応力成分を求め, 空か面における応力自由の条件を満足させると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{E\varepsilon T_0 c^2 h^4} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(s_{A1} A_{n-1} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+1} + s_{B1} B_{n-2} + s_{B2} B_{n-1} + s_{B3} B_n + s_{B4} B_{n+1} \right. \\ \left. + s_{\alpha 1} \alpha_{n-1} + s_{\alpha 2} \alpha_n + s_{\alpha 3} \alpha_{n+1} + s_{\beta 1} \beta_{n-2} + s_{\beta 2} \beta_{n-1} + s_{\beta 3} \beta_n + s_{\beta 4} \beta_{n+1} + \frac{S_n}{1-\nu} \right) P_{2n}(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{E\varepsilon T_0 c^2 h^4 \xi \eta} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(t_{A1} A_{n-1} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+1} + t_{B1} B_{n-2} + t_{B2} B_{n-1} + t_{B3} B_n + t_{B4} B_{n+1} \right. \\ \left. + t_{\alpha 1} \alpha_{n-1} + t_{\alpha 2} \alpha_n + t_{\alpha 3} \alpha_{n+1} + t_{\beta 1} \beta_{n-2} + t_{\beta 2} \beta_{n-1} + t_{\beta 3} \beta_n + t_{\beta 4} \beta_{n+1} + \frac{T_n}{1-\nu} \right) P'_{2n}(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

ここで, $h^2 = \{c^2(\xi^2 + \eta^2)\}^{-1}$ であり, $s_{A\ell}(\ell = 1 \sim 3)$, $s_{B\ell}(\ell = 1 \sim 4)$, $t_{A\ell}(\ell = 1 \sim 3)$, $t_{B\ell}(\ell = 1 \sim 4)$ はたとえば次式のように表される.

$$\left. \begin{aligned} s_{A1} &= -\frac{(2n)(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)} \left\{ (2n-2)q_{2n-2}(\xi_0) - \xi_0 q'_{2n-2}(\xi_0) - \bar{\xi}_0^2 q''_{2n-2}(\xi_0) \right\} \\ t_{A1} &= -\frac{(2n-1)(2n-3)}{(4n-1)(4n-3)} q'_{2n-2}(\xi_0) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

また、 S_n, T_n に関する項は熱弾性変位ポテンシャルより導かれる応力成分であり、式 (12) より決定される係数 F_n を用いて次のように表される。

$$S_n = s_{F1}F_{n-2} + s_{F2}F_{n-1} + s_{F3}F_n + s_{F4}F_{n+1} + s_{F5}F_{n+2} + s_{\delta 1}\delta_{n-2} + s_{\delta 2}\delta_{n-1} + s_{\delta 3}\delta_n + s_{\delta 4}\delta_{n+1} + s_{\delta 5}\delta_{n+2} \quad (30)$$

$$T_n = t_{F1}F_{n-2} + t_{F2}F_{n-1} + t_{F3}F_n + t_{F4}F_{n+1} + t_{F5}F_{n+2} + t_{\delta 1}\delta_{n-2} + t_{\delta 2}\delta_{n-1} + t_{\delta 3}\delta_n + t_{\delta 4}\delta_{n+1} + t_{\delta 5}\delta_{n+2} \quad (31)$$

ここで、 $s_{F\ell}(\ell=1\sim 5), t_{F\ell}(\ell=1\sim 5)$ はたとえば次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} s_{F1} &= \frac{c^2(2n)(2n-1)(2n-2)}{2(4n-1)(4n-3)(4n-5)(4n-7)} \left[\bar{\xi}_0 q_{2n-3}^1(\xi_0) + (2n-3) \left\{ \xi_0 q_{2n-3}(\xi_0) + \bar{\xi}_0^2 q'_{2n-3}(\xi_0) - 2q_{2n-4}(\xi_0) \right\} \right] \\ t_{F1} &= -\frac{c^2(2n-1)(2n-2)(2n-3)^2}{2(4n-1)(4n-3)(4n-5)(4n-7)} q_{2n-3}(\xi_0) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

さらに、 $s_{\alpha\ell}, s_{\beta\ell}, t_{\alpha\ell}, t_{\beta\ell}, s_{\delta\ell}, t_{\delta\ell}$ はそれぞれ $s_{A\ell}, s_{B\ell}, t_{A\ell}, t_{B\ell}, s_{F\ell}, t_{F\ell}$ に含まれる第 2 種変形ルジャンドル関数 $q_n(\xi_0)$ および陪関数 $q_n^m(\xi_0)$ を第 1 種変形ルジャンドル関数 $p_n(\xi_0)$ および陪関数 $p_n^m(\xi_0)$ に置き換え、かつ $s_{\delta\ell}, t_{\delta\ell}$ については奇数次の変形ルジャンドル関数の符号を逆にしたものとなる。式 (27), (28) においてそれぞれ $P_{2n}(\eta), P'_{2n}(\eta)$ の各係数を等値すれば、 A_n, B_n に関する無限連立一次方程式が得られる。これを解けば本問題に対する解は完全に決まる。そして、全体の変位ならびに応力各成分は、変位関数 [I], [II], [III] および熱弾性変位ポテンシャル、温度関数を重ね合わせるにより得られる。

2.3.2 応力自由 (Stress-free) の場合

円柱側面で応力自由の場合の境界条件は、

$$\text{円柱側面 } r=1 \text{ において: } \quad (\sigma_r)_{r=1} = (\tau_{rz})_{r=1} = 0 \quad (33)$$

となり、空か面における境界条件は式 (17) と同じになる。これらの境界条件式 (33), (17) は、前節と同形の変位関数を用いれば、満足させることができる。

まず円柱側面における境界条件を満足させるために、変位関数 [II], [IV] および熱弾性変位ポテンシャル、温度関数より各々応力成分を求め、式 (33) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_r}{E\epsilon T_0} \right)_{r=1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[\left\{ I_0(\lambda) - \frac{I_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \psi_1(\lambda) + \{ \lambda I_1(\lambda) + (1-2\nu)I_0(\lambda) \} \psi_2(\lambda) + \left\{ K_0(\lambda) + \frac{K_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \sum_{m=0}^\infty a_m i_{2m}(\lambda c) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ K_1(\lambda) - (1-2\nu)\frac{K_0(\lambda)}{\lambda} \right\} \sum_{m=0}^\infty b_m i_{2m+1}(\lambda c) - \frac{1}{2(1-\nu)\lambda^2 I_0(\lambda)} \sum_{m=0}^\infty f_m i_{2m}(\lambda c) \right] \cos \lambda z d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{rz}}{E\epsilon T_0} \right)_{r=1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[-I_1(\lambda)\psi_1(\lambda) - \{ \lambda I_0(\lambda) + 2(1-\nu)I_1(\lambda) \} \psi_2(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + K_1(\lambda) \sum_{m=0}^\infty a_m i_{2m}(\lambda c) - \left\{ K_0(\lambda) - 2(1-\nu)\frac{K_1(\lambda)}{\lambda} \right\} \sum_{m=0}^\infty b_m i_{2m+1}(\lambda c) \right] \sin \lambda z d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

を得る。式 (34), (35) より、未知関数 $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ は以下のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty \left\{ a_m i_{2m}(\lambda c) g_1(\lambda) + b_m i_{2m+1}(\lambda c) g_2(\lambda) + f_m i_{2m}(\lambda c) g_3(\lambda) \right\} \\ \psi_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty \left\{ a_m i_{2m}(\lambda c) g_4(\lambda) + b_m i_{2m+1}(\lambda c) g_5(\lambda) + f_m i_{2m}(\lambda c) g_6(\lambda) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} G_0(\lambda)g_1(\lambda) &= -[\{\lambda^2 + 2(1-\nu)\}I_1(\lambda)K_1(\lambda) + \lambda^2 I_0(\lambda)K_0(\lambda) + 2(1-\nu)] \\ G_0(\lambda)g_2(\lambda) &= \{\lambda^2 - 2(1-\nu)(1-2\nu)\}/\lambda \\ G_0(\lambda)g_3(\lambda) &= \{\lambda I_0(\lambda) + (2(1-\nu)I_1(\lambda))\}/\{2(1-\nu)\lambda I_0(\lambda)\} \\ G_0(\lambda)g_4(\lambda) &= 1 \\ G_0(\lambda)g_5(\lambda) &= -[\{\lambda^2 + 2(1-\nu)\}I_1(\lambda)K_1(\lambda) + \lambda I_0(\lambda)K_0(\lambda) - 2(1-\nu)]/\lambda \\ G_0(\lambda)g_6(\lambda) &= -I_1(\lambda)/\{2(1-\nu)\lambda I_0(\lambda)\} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$G_0(\lambda) = \lambda^2 \{I_0(\lambda)\}^2 - \{\lambda^2 + 2(1-\nu)\} \{I_1(\lambda)\}^2 \quad (38)$$

次に, 空か面における応力自由の条件を, 変位関数 [I], [V] および熱弾性変位ポテンシャル, 温度関数を用いて満足させると, 前節の式 (27), (28) と同じ方程式が得られる. ただし, 変位関数 [V] に含まれる α_n, β_n は式 (26) の代わりに,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2c}{\pi} (4n+1) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \left\{ A_m \int_0^{\infty} g_1(\lambda) i_{2n}(\lambda c) i_{2m}(\lambda c) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + B_m \int_0^{\infty} g_2(\lambda) i_{2n}(\lambda c) i_{2m+1}(\lambda c) d\lambda + F_m \int_0^{\infty} g_3(\lambda) i_{2n}(\lambda c) i_{2m}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ \beta_n &= \frac{2c}{\pi} (4n+3) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \left\{ A_m \int_0^{\infty} \lambda g_4(\lambda) i_{2n+1}(\lambda c) i_{2m}(\lambda c) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + B_m \int_0^{\infty} \lambda g_5(\lambda) i_{2n+1}(\lambda c) i_{2m+1}(\lambda c) d\lambda + F_m \int_0^{\infty} \lambda g_6(\lambda) i_{2n+1}(\lambda c) i_{2m}(\lambda c) d\lambda \right\} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

となる. 最終的に, 円柱側面で応力自由の場合の解は, 半径方向変位拘束の場合と同じく, A_n, B_n に関する無限連立一次方程式 (27), (28) を解くことによって得られる.

2.4 円形き裂に対する解 $\alpha_0 = 0$ とおけば, $a = c, b = 0$ となって, 偏平回転だ円体状空かは半径 c の円形き裂となる. すなわち, 式 (12) および式 (27), (28) において $\xi_0 = 0$ とおけば, 円形き裂に対する解を得ることができる.

さて, 本問題では, き裂表面での温度が負となる場合に, き裂は開口し変形モードが I となるから, 応力拡大係数は次式で求められる.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2\pi(r-c)} (\sigma_z)_{z=0} = \sqrt{\pi c} \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi (\sigma_\beta)_{\eta=0} = E \varepsilon T_0 \sqrt{\pi c} \Sigma_1 \quad (40)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{F_0}{2(1-\nu)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2(1-\nu)(4n+1)} \left[\left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n-4k-3)(2n-2k-3)(2n-2k)}{(2k+1)(2n-k-1)} \frac{(2n-2k-3)!!}{(2n-2k-2)!!} \right\} P'_{2n-1}(0) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n-4k+1)(2n-2k-1)(2n-2k+2)}{(2k+1)(2n-k+1)} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} \right\} P'_{2n+1}(0) \right] \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c^2} \left[\left\{ \frac{(2n+1)!!}{2(2n-2)!!} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n-4k-1)}{(2k+1)(2n-k)} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k-2)!!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{(4n-4k-1)}{(2k+1)(2n-k)} \frac{(2n-2k+1)!!}{(2n-2k-4)!!} \right\} P_{2n}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n-4k-1)}{(2k+1)(2n-k)} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k-2)!!} P''_{2n}(0) \right] \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{c} \left[\left\{ \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} + (3-2\nu) \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n-4k+1)}{(2k+1)(2n-k+1)} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n-4k+1)}{(2k+1)(2n-k+1)} \frac{(2n-2k+1)!!}{(2n-2k-2)!!} \right\} P'_{2n+1}(0) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

3. 数 値 計 算

空か面における温度分布が $(T)_{\alpha=\alpha_0} = T_0$ で与えられた場合の応力分布を、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、まず形状比 $\bar{s} = b/a = 0.5$ として $a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の各場合について、次に形状比をいくつか変化させた場合について数値計算を行った。すべての無限級数の収束は良好であるが、空かが大きくなると次第に悪くなる。そこで、最終的に得られる結果の有効数字が3けた以上になるように、 F_n, A_n, B_n を10~15項とって計算を行った。

図2は円柱側面が応力自由の場合 (SF) の、 $\bar{s} = 0.5$ の空か面における σ_β の分布を示したものである。ここで、 φ は z 軸から測った角度で、空か面においては

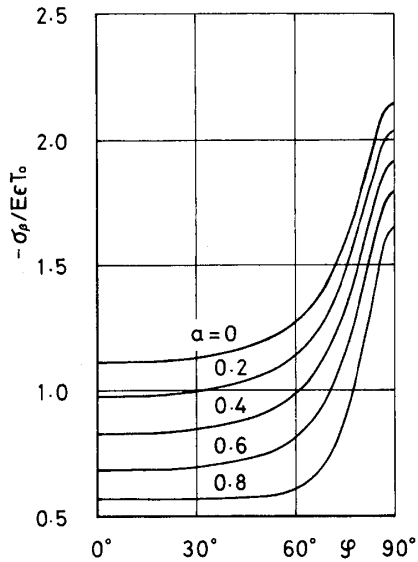


Fig. 2 Variation of σ_β on the spheroidal surface with φ for $\bar{s} = 0.5$ and the stress-free case.

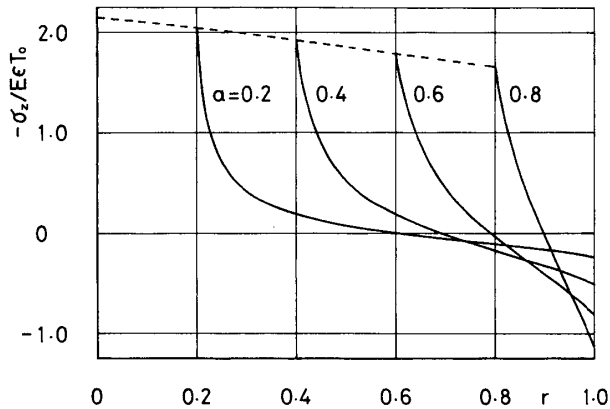


Fig. 3 Variation of σ_z with r on the plane $z = 0$ for $\bar{s} = 0.5$ and the stress-free case.

β と $\tan \varphi = (a/b)\tan \beta$ の関係がある。また、 $a = 0$ に対する結果は、空かが無限体中に存在する場合に相当する。応力 σ_β は φ が 0° から 90° のすべての範囲で圧縮応力を示し、空かの大きさにかかわらず $\varphi = 90^\circ$ (図1の点A) で最大となる。

図3にSFの場合の r 軸上の応力 σ_z の分布を示す。 σ_z は空か面上で最大圧縮応力を示し、 r の増加とともに引張応力に転じ、円柱側面 (点C) で引張応力の最大値をとる。また、点線は $(\sigma_z)_{\max}$ の a による変化を

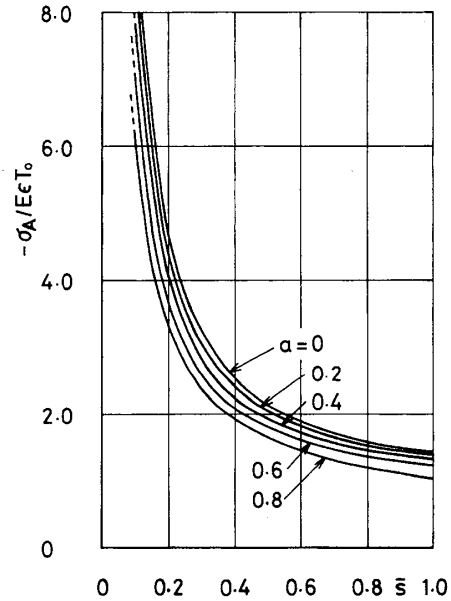


Fig. 4 Variation of σ_z at the point A with the shape ratio \bar{s} for the stress-free case.

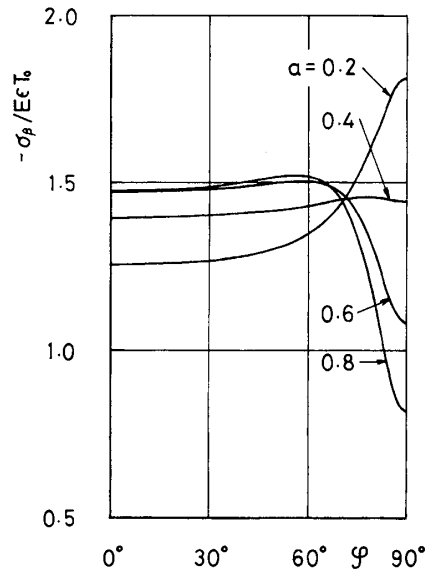


Fig. 5 Variation of σ_β on the spheroidal surface with φ for $\bar{s} = 0.5$ and the smooth surface case.

示しており、 $(\sigma_z)_{\max}$ は a の増加とともに減少する。

以上の特徴は形状比が異なる場合にも変わらない。そこで、点 A における最大圧縮応力 σ_A と形状比 \bar{s} との関係を示したのが図 4 である。 σ_A は \bar{s} の減少とともに増加し、円形き裂に近づくに従って無限に大きくなる。

図 5、図 6 に、円柱側面で半径方向変位を拘束した場合 (SS) の、空か面における σ_β の分布および $z=0$ 面における σ_z の分布をそれぞれ示す。空か面における σ_β は SF の場合と異なり、空かの大きさによって最大圧縮応力の生じる位置が変化する。また、 $z=0$ 面における σ_z は SF の場合と同様の傾向を示すが、圧縮応力、引張応力とも SF の場合に比べ小さい値とな

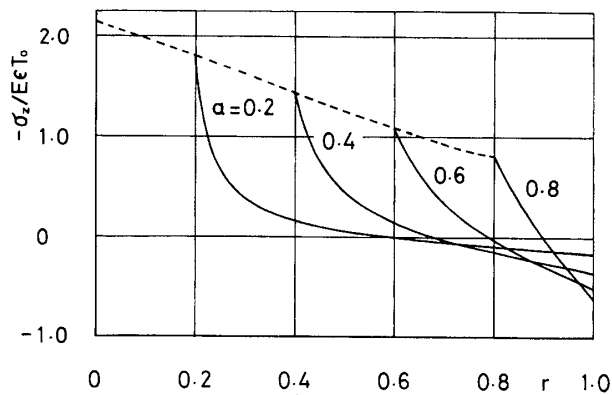


Fig. 6 Variation of σ_z with r on the plane $z=0$ for $\bar{s}=0.5$ and the smooth surface case.

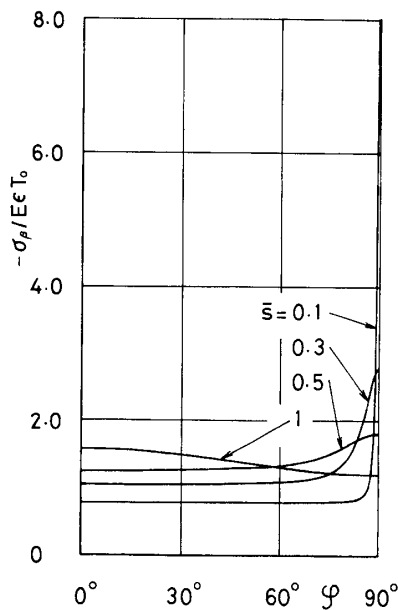


Fig. 7 Variation of σ_β on the spheroidal surface with φ for $a=0.2$ and the smooth surface case.

り、SF の場合のほうが、応力集中現象が強く現れる。

図 7 は SS の場合の空か面における σ_β の分布を、 $a=0.2$ とし形状比を $\bar{s}=0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1$ と変化させた場合について示したものである。最大圧縮応力は形状比が小さくなるに従って大きくなり、その生じる位置は点 A に移行する。

そこで、SS の場合も点 A に生じる圧縮応力 σ_A に注目し、これと形状比との関係を示したのが図 8 である。SF の場合と同様、 σ_A は \bar{s} の減少とともに急激に

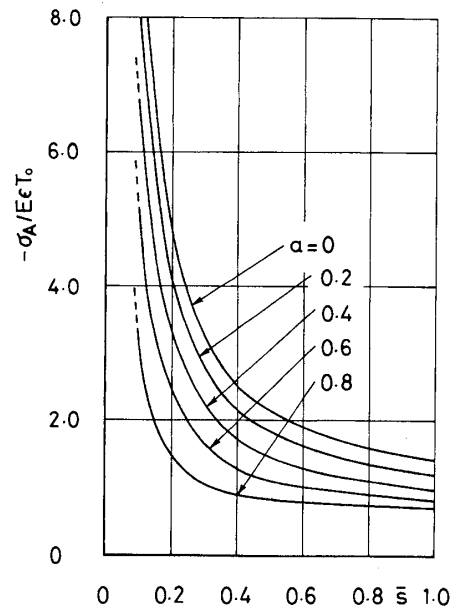


Fig. 8 Variation of σ_z at the point A with the shape ratio \bar{s} for the smooth surface case.

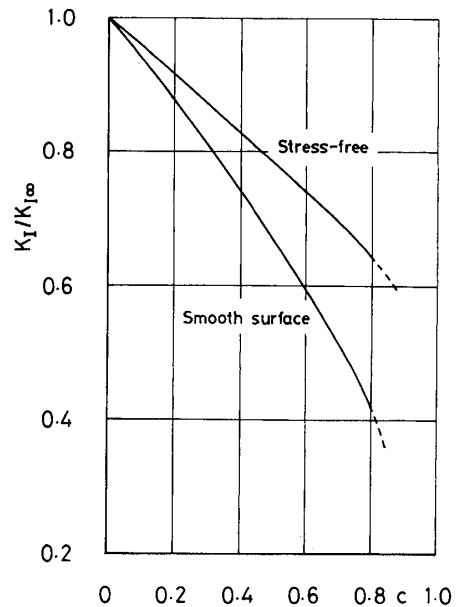


Fig. 9 Variation of stress intensity factor K_I with c .

Table 1 Values of stress intensity factor K_I

		c				
		0.2	0.4	0.6	0.8	
$K_I/K_{I\infty}$	Stress-free	0.9166	0.8300	0.7435	0.6408	
	Smooth surface	Present result	0.8791	0.7442	0.5968	0.4217
		Das ⁽⁴⁾	0.8791	0.7437	0.5934	0.4113

増加する。

最後に、応力拡大係数 K_I と円形き裂の半径 c との関係を図9および表1に示す。ただし、き裂が開口するのはき裂表面の温度が負の場合に限られるので、ここでは $(T)_{\alpha=\alpha_0} = -T_0 (< 0)$ を仮定した。また、図表中の $K_{I\infty}$ はき裂が無限体中にある場合の応力拡大係数であり、

$$K_{I\infty} = \frac{E\epsilon T_0}{1-\nu} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \quad (42)$$

である。 K_I は c の増加とともに減少し、その傾向はSSの場合がより顕著である。

4. 結 言

円柱の内部に1個の偏平回転だ円体状空かあるいは円形き裂が存在し、これらの欠陥表面に任意の軸対称温度分布が与えられた場合の熱応力問題を、三次元熱弾性理論に基づいて厳密に解析する方法を示した。さらに、空かあるいはき裂面に一定の温度分布が与えられた場合の応力分布および応力拡大係数を明らかにした。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 最大圧縮応力の生じる位置は、円柱側面が応力自由の場合は常に空かの赤道線上の点(点A)となる。半径方向変位拘束の場合は一定しないが、空かの形状が偏平化すると次第に点Aに生じるようになる。

(2) 点Aにおける圧縮応力は空かが大きくなるに従って小さくなる。また、形状比の減少とともに急激に増大し、円形き裂に近づくに従って無限大に向かう。

(3) 最大引張応力は常に円柱側面の最も空かに近い点(点C)に生じ、空かが大きくなるに従って大きくなる。

(4) 圧縮応力、引張応力ともに円柱側面が応力自由の場合のほうが、半径方向変位拘束の場合に比べ

て大きな値を示す。

(5) 応力拡大係数 K_I は円形き裂の半径 c の増加とともに単調に減少する。

文 献

- (1) Uchiyama, T. and Tsuchida, E., Thermal Stresses in an Elastic Circular Cylinder Containing an Oblate Spheroidal Cavity or a Penny-shaped Crack under Uniform Heat Flow, *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.29, No.253(1986), pp.2007-2014.
- (2) Uchiyama, T. and Tsuchida, E., Thermal Stresses in an Elastic Circular Cylinder Containing a Prolate Spheroidal Cavity under Uniform Heat Flow, *Proceedings of the 36th Japan National Congress for Applied Mechanics*, Vol.36(1988), pp.167-177.
- (3) Atsumi, A. and Itou, S., Axisymmetric Thermal Stresses in a Transversely Isotropic Circular Cylinder Having a Spherical Cavity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.43(1976), pp.431-433.
- (4) Das, B. R., Thermal Stresses in a Long Cylinder Containing a Penny-shaped Crack, *International Journal of Engineering Science*, Vol.6(1968), pp.497-516.
- (5) Das, B. R., A Note on Thermal Stresses in a Long Circular Cylinder Containing a Penny-shaped Crack, *International Journal of Engineering Science*, Vol.7(1969), pp.667-676.
- (6) Uchiyama, T. and Tsuchida, E., Stresses in an Elastic Circular Cylinder with an Oblate Spheroidal Cavity or an Internal Penny-shaped Crack under Tension, *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.23, No.175(1980), pp.1-8.
- (7) Cooke, J. C., On Potential Problems Involving Spheroids inside a Cylinder, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol.42(1962), No.7/8, pp.305-316.
- (8) Nakahara, I., *Applied Elasticity* (in Japanese), (1977), p.172, Jikkyo Shuppan.
- (9) Sneddon, I. N. and Tait, R. J., The Effect of a Penny-shaped Crack on the Distribution of Stress in a Long Circular Cylinder, *International Journal of Engineering Science*, Vol.1(1963), pp.391-409.