

円形介在物を有する半無限板の引張り*

堀 辺 忠 志^{*1}, 土 田 栄 一 郎^{*2}, 荒 居 善 雄^{*3}Stresses in a Semi-infinite Plate Having
a Circular Inclusion under TensionTadashi HORIBE^{*4}, Eiichiro TSUCHIDA and Yoshio ARAI^{*4} Department of Mechanical Engineering, Ibaraki University,
4-12-1 Nakanarusawa-cho, Hitachi-shi, Ibaraki, 316-8511 Japan

This paper contains an analysis of the stress and displacement distribution arising in a semi-infinite plate with a circular inclusion when the strip is subjected to tension at infinity. Two types of inclusion, i.e., perfect bonding and sliding inclusion are treated in this paper. The solution which is based on the Papcovich-Neuber displacement potentials is obtained by combining the harmonic potentials in integral forms and infinite series. The boundary conditions of the problem are fully satisfied using the relationships between the harmonic functions of Cartesian and polar coordinates. The effect of the inclusion on the stress and displacement are given in the form of graphs to show the availability of the present method.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Semi-infinite Plate, Circular Inclusion, Tension

1. 緒 論

近年、繊維強化プラスチック (FRP)、繊維強化金属 (MMC)、傾斜機能材料 (FGM)、セラミックスなど種々の先端複合材料が開発され、様々な用途に用いられるようになった。異種材料の接合を基本とするこのような複合材料の界面強度を評価することは、ますます重要になってきている。このことから、著者らは、密着介在物あるいはすべり介在物を有する帯板が引張りや曲げを受ける場合の応力集中現象を考察した⁽¹⁾⁽²⁾。

そこで、本研究では、文献⁽¹⁾⁽²⁾の手法に基づき、介在物が境界面において母材に完全密着する場合およびすべりを有する場合の双方を考え、この条件のもとで、円形介在物を有する半無限板が無限遠方で引張りを受ける際の応力集中現象を解析する。この種の研究として、密着介在物の場合には Shioya⁽³⁾が、固有ひずみを与えた場合に Lee ら⁽⁴⁾が、楕円介在物の場合には Tsuchida ら⁽⁵⁾が解析しているが、本研究では、材料の剛性比や介在物半径および界面の条件の違いなどが

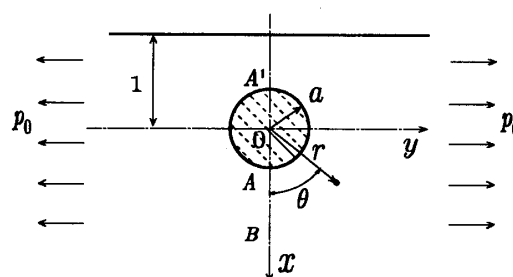


Fig. 1 Coordinate system

界面応力に及ぼす影響をより詳しく明らかにする。また解析結果を図にまとめて強度設計のための資料を提示する。

2. 解 析 法

図 1 に示すように座標系を定め、介在物中心 O 点より自由表面までの距離を -1 として、全ての長さをこれを基準としてとるものとする。また、O 点を座標原点として直角座標 (x, y) と極座標 (r, θ) を使用する。

本研究では、Papcovich-Neuber の変位関数 φ_0, φ_1 を用いる。この変位関数に基づいて直角座標における

* 原稿受付 2006 年 6 月 28 日。

^{*1} 正員, 茨城大学工学部 (☎ 316-8511 日立市中成沢町 4-12-1)。^{*2} 正員, 埼玉大学工学部名誉教授 (☎ 338-8570 さいたま市桜区下大久保 255)。^{*3} 正員, 埼玉大学工学部。

E-mail: horibe@mx.ibaraki.ac.jp

変位成分を表すと、以下のようになる⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0 + x\varphi_1) - (\kappa + 1)\varphi_1 \\ 2Gv_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0 + x\varphi_1) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 u_x, v_y は x, y 方向の変位成分、 G は横弾性係数、 ν をポアソン比として、 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (平面応力)、 $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ) である。また、変位関数 φ_0, φ_1 は調和関数であり $\nabla^2\varphi_0 = 0, \nabla^2\varphi_1 = 0$ である。なお、以下に用いる変位や応力の表示記号は慣例の記号に従うこととする。

そこで、次のような境界条件を満足する解を導けば、円形介在物を有する半無限板が無限遠方で引張り荷重 p_0 を受ける場合の解が得られる。

(i) 自由表面 $x = -1$ で

$$(\sigma_x)_{x=-1} = (\tau_{xy})_{x=-1} = 0 \quad (2)$$

(ii) 介在物面 $r = a$ で

(a) 完全密着介在物の場合

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, (v_\theta)_{r=a} = (\bar{v}_\theta)_{r=a} \\ (\sigma_r)_{r=a} &= (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, (\tau_{r\theta})_{r=a} = (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} \end{aligned} \quad (3)$$

(b) すべり介在物の場合

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, (\sigma_r)_{r=a} = (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

(iii) 無限遠方 $r = \infty$ で

$$\sigma_x = p_0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \quad (5)$$

ここで、介在物の変位および応力などを $\bar{u}_r, \bar{v}_\theta, \bar{\sigma}_r, \dots$ などと表わして介在物に関する物理量には、上付きの記号 $\bar{\quad}$ を付すこととする。

はじめに、無限遠方において単位面積あたり p_0 の引張り荷重を半無限板に対して y 軸方向に作用させたときの解となる、次の変位調和関数 φ_0, φ_1 を与える。

$$[I] \begin{cases} \varphi_0 = \frac{(\kappa + 1)p_0}{8}(y^2 - x^2) = -\frac{(\kappa + 1)p_0}{8}r^2 \cos 2\theta \\ \varphi_1 = -\frac{p_0}{2}x = -\frac{p_0}{2}r \cos \theta \end{cases} \quad (6)$$

変位関数 [I] より導かれる変位および応力成分は、

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= -\frac{3-\kappa}{4}p_0x \\ 2Gv_y &= \frac{\kappa+1}{4}p_0y \\ \sigma_y &= p_0, \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。

これより、弾性体内に原点 O を中心とする半径 a の円を仮想すれば、この仮想円周上に生じている変位および応力は次のように表される。

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Gu_r}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{a}{2}\left(\frac{\kappa-1}{2} - \cos 2\theta\right) \\ \left(\frac{2Gv_\theta}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{a}{2}\sin 2\theta \\ \left(\frac{\sigma_r}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \left(\frac{\sigma_\theta}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \left(\frac{\tau_{r\theta}}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 G は母材の横弾性係数である。なお、介在物の横弾性係数を \bar{G} 、ポアソン比を $\bar{\nu}$ 、ポアソン比 $\bar{\nu}$ に関する量を $\bar{\kappa}$ と表す。

次に、母材側領域が円形介在物を除く無限板領域と半無限領域の共通部分から構成されていること、および介在物領域が円形領域であることに注目する。

境界条件 (i), (ii), (iii) を満たすために、母材側 ($r > a$) に対しては、極座標で表された調和関数と直角座標で表された調和関数とを用いて次のような変位関数を用いる。

$$[II] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \left(-A_0 \log r + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos m\theta}{r^m} \right) \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\cos m\theta}{r^m} \end{cases} \quad (9)$$

$$[III] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \int_0^{\infty} \psi_1(\lambda) e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = p_0 \int_0^{\infty} \lambda \psi_2(\lambda) e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \end{cases} \quad (10)$$

介在物側 ($r < a$) に関しては、円形領域で正則な次の調和関数を与える。

$$[IV] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n r^n \cos n\theta \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n r^n \cos n\theta \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 $A_m, B_m, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ 及び $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ は、それぞれ境界条件より決定される未定係数および未知関数である。

計算を簡略化するため、変位関数 [II] を次のように分ける。

$$[II]1 \left\{ \varphi_0 = -p_0 A_0 \log r \right. \quad (12)$$

$$[II]2 \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p_0 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos m\theta}{r^m} \\ \varphi_1 &= p_0 \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\cos m\theta}{r^m} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

さて、自由表面における境界条件 (i) を満足させるために、極座標と直角座標のもとでの調和関数の変換式

$$\frac{\cos m\theta}{r^m} = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \quad (14)$$

(for $x < 0$)

を用いて変位関数 [II]2 を座標変換すると、

$$[\text{II}^*] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \end{cases}$$

(for $x < 0$)

(15)

となる。変位関数 [II]1 の座標変換については、文献 (1) を参照されたい。

さらに、変位関数 [III], [II*], [II]1 による応力成分を求め、自由表面 $x = -1$ での境界条件を満足させると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_x}{p_0} \right)_{x=-1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left\{ \psi_1(\lambda) e^\lambda + \left(\frac{\kappa+1}{2} - \lambda \right) \right. \\ &\times \psi_2(\lambda) e^\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \lambda^{m-1} e^{-\lambda} A_m \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\kappa+1}{2} + \lambda \right) \lambda^{m-2} e^{-\lambda} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} B_m \\ &\left. + A_0 \lambda^{-1} e^{-\lambda} \right\} \cos \lambda y \, d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{xy}}{p_0} \right)_{x=-1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left\{ \psi_1(\lambda) e^\lambda + \left(\frac{\kappa-1}{2} - \lambda \right) \right. \\ &\times \psi_2(\lambda) e^\lambda - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \lambda^{m-1} e^{-\lambda} A_m \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\kappa-1}{2} + \lambda \right) \lambda^{m-2} e^{-\lambda} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} B_m \\ &\left. - A_0 \lambda^{-1} e^{-\lambda} \right\} \sin \lambda y \, d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

式 (16), (17) にフーリエ逆変換をほどこし、未知関数を求めると、

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda) &= \lambda^{-1} e^{-2\lambda} (\kappa - 2\lambda) A_0 \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \lambda^{m-1} e^{-2\lambda} (\kappa - 2\lambda) A_m \right. \\ &\left. - \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \lambda^{m-2} e^{-2\lambda} \frac{(\kappa^2 - 1 - 4\lambda^2)}{2} B_m \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\lambda) &= -2\lambda^{-1} e^{-2\lambda} A_0 \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 2 \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \lambda^{m-1} e^{-2\lambda} A_m \right. \\ &\left. - \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\kappa + 2\lambda) \lambda^{m-2} e^{-2\lambda} B_m \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

式 (18), (19) が成立すれば、自由表面での境界条件式 (2) は、未知係数 A_m, B_m の値に無関係に満足される。

次に、介在物境界面における境界条件式 (ii) を満足させるために、直角座標と極座標のもとでの調和関数の変換式

$$e^{-\lambda x} \cos \lambda y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda r)^n}{n!} \cos n\theta \quad (20)$$

を用いて、変位関数 [III] を座標変換すると

$$[\text{III}^*] \begin{cases} \varphi_0 = k \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^n \cos n\theta \\ \varphi_1 = k \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n r^n \cos n\theta \end{cases} \quad (21)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^\infty \psi_1(\lambda) \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} \, d\lambda \\ \beta_n &= \int_0^\infty \lambda \psi_2(\lambda) \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} \, d\lambda \end{aligned} \quad (22)$$

であり、式 (18), (19) を代入すれば

$$\begin{aligned} \alpha_n &= A_0 \alpha_{n1} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{n2}^m A_m + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{n3}^m B_m \\ \beta_n &= A_0 \beta_{n1} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{n2}^m A_m + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{n3}^m B_m \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ここで、第二種の Euler 積分 γ_n^m ⁽⁹⁾ を用いると、

$$\begin{aligned} \alpha_{n1} &= -\kappa \varepsilon_n - 2\gamma_n^0, \quad \alpha_{n2}^m = -\kappa \gamma_n^{m-1} - 2m \gamma_n^m \\ \alpha_{n3}^m &= \frac{\kappa^2 - 1}{2} \frac{(-1)^3}{n} \gamma_{n-1}^{m-1} + 2m \gamma_n^m \\ \beta_{n1} &= -2\gamma_n^0, \quad \beta_{n2}^m = -2m \gamma_n^m \\ \beta_{n3}^m &= -\kappa \gamma_n^{m-1} + 2m \gamma_n^m \end{aligned} \quad (24)$$

となる。なお、 γ_n^m は

$$\begin{aligned} \gamma_n^m &= \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} \int_0^\infty e^{-2\lambda} \lambda^{m+n} \, d\lambda \\ &= \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} \frac{(m+n)!}{2^{m+n+1}} \end{aligned} \quad (25)$$

であり、式 (24) 中の ε_n は

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \log 2 & n = 0 \\ \frac{\gamma_{n-1}^0}{n} & n \geq 1 \end{cases} \quad (26)$$

である。

次に、変位関数 [I], [II], [III*], [IV] より変位と応力を求め、介在物境界面の境界条件式 (ii) を満足させると、例えば式 (3) に示した完全密着介在物の場合には

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Gu_r}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{A_0}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \{u_{A1}A_n + u_{B1}B_{n-1} \\ &+ u_{B2}B_{n+1} + u_{\alpha 1}\alpha_n + u_{\beta 1}\beta_{n-1} + u_{\beta 2}\beta_{n+1}\} \\ &- \frac{1}{\Gamma} \{\bar{u}_{A1}\bar{A}_n + \bar{u}_{B1}\bar{B}_{n-1} + \bar{u}_{B2}\bar{B}_{n+1}\} \cos n\theta \\ &= -\frac{a}{4} \{(\kappa - 1) - 2 \cos 2\theta\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Gv_{\theta}}{k}\right)_{r=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{v_{A1}A_n + v_{B1}B_{n-1} \\ &+ v_{B2}B_{n+1} + v_{\alpha 1}\alpha_n + v_{\beta 1}\beta_{n-1} + v_{\beta 2}\beta_{n+1}\} \\ &- \frac{1}{\Gamma} \{\bar{v}_{A1}\bar{A}_n + \bar{v}_{B1}\bar{B}_{n-1} + \bar{v}_{B2}\bar{B}_{n+1}\} \sin n\theta \\ &= -\frac{a}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_r}{p_0}\right)_{r=a} &= -\frac{A_0}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} [s_{A1}A_n + s_{B1}B_{n-1} \\ &+ s_{B2}B_{n+1} + s_{\alpha 1}\alpha_n + s_{\beta 1}\beta_{n-1} + s_{\beta 2}\beta_{n+1} \\ &- \bar{s}_{A1}\bar{A}_n - \bar{s}_{B1}\bar{B}_{n-1} - \bar{s}_{B2}\bar{B}_{n+1}] \cos n\theta \\ &= -\frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{r\theta}}{p_0}\right)_{r=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} [t_{A1}A_n + t_{B1}B_{n-1} \\ &+ t_{B2}B_{n+1} + t_{\alpha 1}\alpha_n + t_{\beta 1}\beta_{n-1} + t_{\beta 2}\beta_{n+1} \\ &- \bar{t}_{A1}\bar{A}_n - \bar{t}_{B1}\bar{B}_{n-1} - \bar{t}_{B2}\bar{B}_{n+1}] \sin n\theta \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} u_{A1} &= -\frac{n}{a^{n+1}}, \quad u_{B1} = -\frac{(n-1+\kappa)}{2a^{n-1}}, \\ u_{B2} &= -\frac{(n+1+\kappa)}{2a^{n+1}}, \quad u_{\alpha 1} = na^{n-1}, \\ u_{\beta 1} &= \frac{(n-1-\kappa)a^{n-1}}{2}, \quad u_{\beta 2} = \frac{(n+1-\kappa)a^{n+1}}{2}, \\ \bar{u}_{A1} &= u_{\alpha 1}, \quad \bar{u}_{B1} = u_{\beta 1}, \quad \bar{u}_{B2} = u_{\beta 2} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} v_{A1} &= -\frac{n}{a^{n+1}}, \quad v_{B1} = -\frac{(n-1-\kappa)}{2a^{n-1}}, \\ v_{B2} &= -\frac{(n+1+\kappa)}{2a^{n+1}}, \quad v_{\alpha 1} = -na^{n-1}, \\ v_{\beta 1} &= -\frac{(n-1-\kappa)a^{n-1}}{2}, \quad v_{\beta 2} = -\frac{(n+1+\kappa)a^{n+1}}{2}, \\ \bar{v}_{A1} &= v_{\alpha 1}, \quad \bar{v}_{B1} = v_{\beta 1}, \quad \bar{v}_{B2} = v_{\beta 2} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} s_{A1} &= \frac{n(n+1)}{a^{n+2}}, \quad s_{B1} = \frac{(n-1)(n+2)}{2a^n}, \\ s_{B2} &= \frac{(n+1)(n+1+\kappa)}{2a^{n+2}}, \quad s_{\alpha 1} = n(n-1)a^{n-2}, \\ s_{\beta 1} &= \frac{1}{2}(n-1)(n-1-\kappa)a^{n-2}, \\ s_{\beta 2} &= \frac{1}{2}(n+1)(n-2)a^n, \\ \bar{s}_{A1} &= s_{\alpha 1}, \quad \bar{s}_{B1} = s_{\beta 1}, \quad \bar{s}_{B2} = s_{\beta 2} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} t_{A1} &= \frac{n(n+1)}{a^{n+2}}, \quad t_{B1} = \frac{n(n-1)}{2a^n}, \\ t_{B2} &= \frac{(n+1)(n+1+\kappa)}{2a^{n+2}}, \quad t_{\alpha 1} = -n(n-1)a^{n-2}, \\ t_{\beta 1} &= -\frac{(n-1)(n-1-\kappa)a^{n-2}}{2}, \\ t_{\beta 2} &= -\frac{n(n+1)a^n}{2}, \\ \bar{t}_{A1} &= t_{\alpha 1}, \quad \bar{t}_{B1} = t_{\beta 1}, \quad \bar{t}_{B2} = t_{\beta 2} \end{aligned} \quad (34)$$

である。また、 $\Gamma = \bar{G}/G$ であり、 $\Gamma = 0$ は円孔、 $\Gamma = \infty$ は剛体介在物、 $\Gamma = 1$ は介在物のない半無限板を表す。すべり介在物の場合も、境界条件式 (4) に基づいて同様な式が得られる。

α_n, β_n は、式 (23) によって A_m, B_m で表わされているので、これらを式 (27) ~ (30) に代入すれば A_n, B_n に関する無限連立一次方程式が得られる。そして、この連立一次方程式を解いて係数 A_n, B_n を決定すれば、解を得ることができる。すべての変位および応力は、変位関数 [I]~[IV] より導かれる各成分の一次結合によって得られる。

3. 数値計算

ポアソン比を $\nu = \bar{\nu} = 0.3$ とし、横弾性係数比 $\Gamma = 0, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, \infty$ および介在物半径 $a = 0.1 \sim 0.8$ の場合について数値計算を行なった。また、本研究では平面応力問題として考え、 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu) = 2.08$, $\bar{\kappa} = (3-\bar{\nu})/(1+\bar{\nu}) = 2.08$ とした。

すべての無限級数の収束は良好であるが、介在物半径 a が大きくなるにつれて次第に収束が悪くなる。そこで、応力値の精度が有効数字3けた以上になるように、 $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ を42項用いて連立一次方程式を解いた。以下、完全密着介在物の場合とすべり介在物の場合とに分けて数値解析結果を述べる。

3.1 完全密着介在物の場合 図2は、介在物の半径を $a = 0.266$ 、剛性比を $\Gamma = 0.5$ とし、境界面の母材側応力 σ_{θ} に関し、本解法による結果と Shioya⁽³⁾ の結果とを比較した図である。両者は大略一致しているので、本解法の妥当性が確認される。

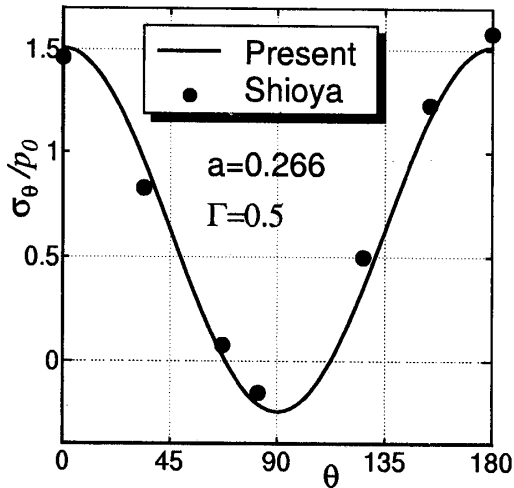


Fig. 2 Comparison of present results with Shioya's results on σ_θ (Perfect bonding, $a = 0.266$, $\Gamma = 0.5$)

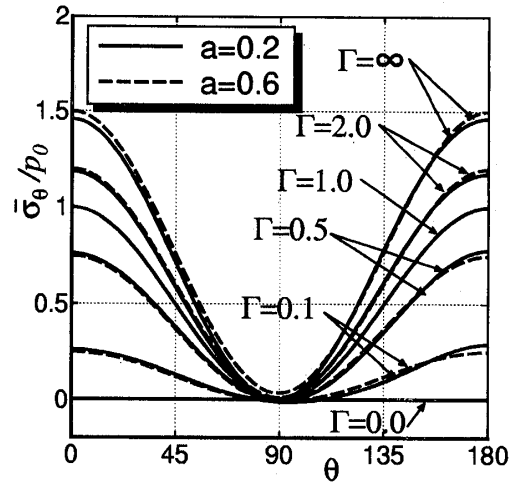


Fig. 4 Variations of stress $\bar{\sigma}_\theta$ on the interface with θ (Perfect bonding)

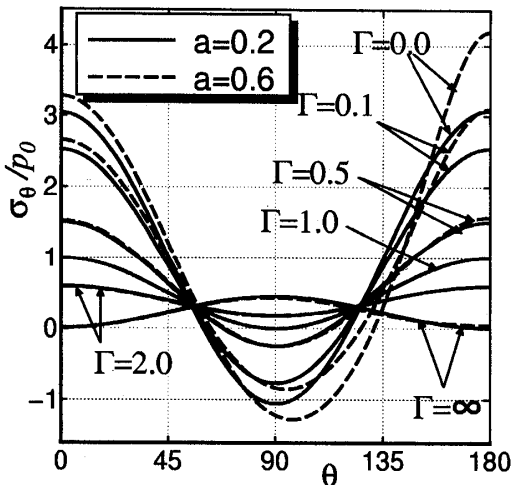


Fig. 3 Variations of stress σ_θ on the interface with θ (Perfect bonding)

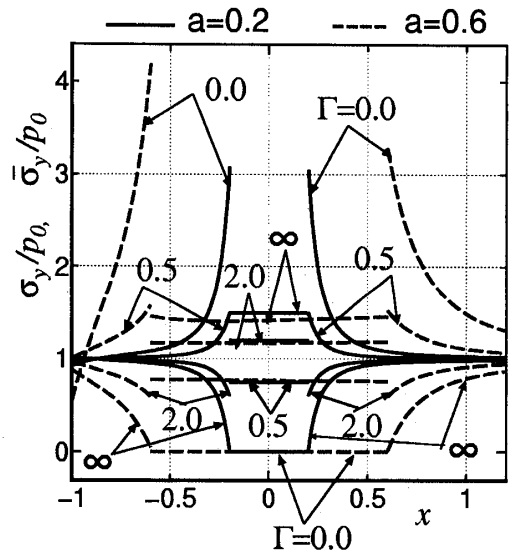


Fig. 5 Variations of stresses σ_y and $\bar{\sigma}_y$ on x-axis with x (Perfect bonding)

図3は、介在物の半径 a を 0.2, 0.6 とし、剛性比 Γ を 0, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, ∞ と変化させたときの、境界面の母材側応力 σ_θ の分布を示した図である。 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ の位置の応力の大きさが Γ の増大とともに低下し、介在物が母材の応力集中を緩和している様子がわかる。 $\Gamma \rightarrow \infty$ の場合には、界面において、ポアソン効果に基づく変形が阻止されるために、引張り応力が生じている。他方、 a が大きくなると、自由表面側の影響が大きくなるために $\theta = 90^\circ$ に関して非対称分布となっている。なお、半無限体の一軸引張り問題を解析した土田らの研究⁽⁶⁾と同様、本研究でもほぼ $a = 0.5$ から自由表面の影響が現れ始めるのを確認している。

図4は、境界面の介在物側応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の分布である。

この場合には自由表面の影響は小さく、 $\theta = 90^\circ$ (y 軸) に関してほぼ対称な分布となっている。また、 Γ が一定のもとでは、介在物半径 a が変化しても $\bar{\sigma}_\theta$ はほとんど変化しない。さらに、 $\Gamma > 1.0$ の場合に応力集中を生じ、 $\Gamma = \infty$ のとき最大値をとる。

図5は、 x 軸上の応力 $\bar{\sigma}_y$ および σ_y の分布を図示したものである。介在物半径を $a = 0.2, 0.6$ とし、 Γ をパラメータとして示した。介在物内では、ほぼ一定値となっていることがわかる。一方、母材側では、 $\Gamma < 1.0$ において境界面で応力集中現象を生じ、自由表面側の境界面でより大きな応力を生じている。また、自由表面上では、 $\Gamma = 0, a \rightarrow 1$ のときに σ_y はゼロとなる⁽⁷⁾

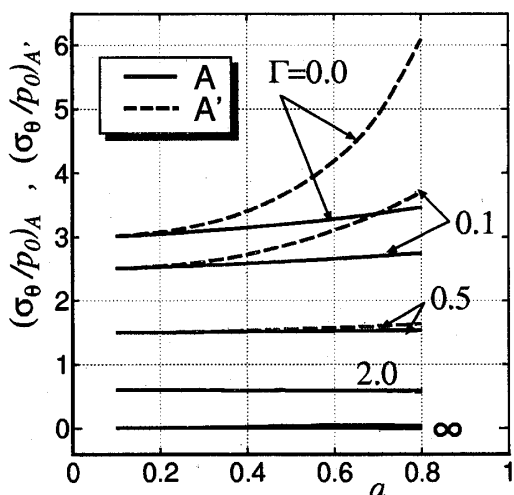


Fig. 6 Variations of stress $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0, 180}$ on x -axis with inclusion radius a (Perfect bonding)

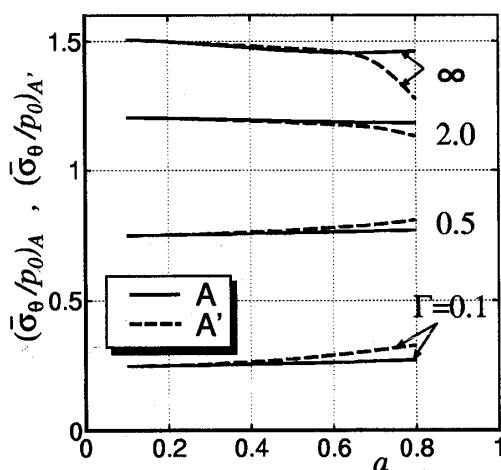


Fig. 7 Variations of stress $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0, 180}$ on x -axis with inclusion radius a (Perfect bonding)

が、本解析結果でも a が 1 に近づくにつれてそのような傾向を示している。さらに、 $\Gamma > 1.0$ としたときの母材側では応力集中現象は見られず、介在物挿入により応力集中が著しく緩和されていることがわかる。

図 6 は、境界面 $r = a$ の $\theta = 0^\circ$ (図 1 の点 A) および $\theta = 180^\circ$ (点 A') における母材側応力 $(\sigma_\theta)_A, (\sigma_\theta)_{A'}$ と介在物半径 a との関係を示した図である。 $\Gamma > 0.5$ ではほとんど変化しないのに対し、 $\Gamma < 0.5$ では半径の増加とともに増加していく。特に、自由表面側の応力 $(\sigma_\theta)_{A'}$ の増加が顕著である。

図 7 は、図 6 と同様に介在物側の応力 $(\bar{\sigma}_\theta)_A, (\bar{\sigma}_\theta)_{A'}$ と a の関係を Γ をパラメータとして示した図である。図 6 と比較して、 a による変化は小さいことがわかる。

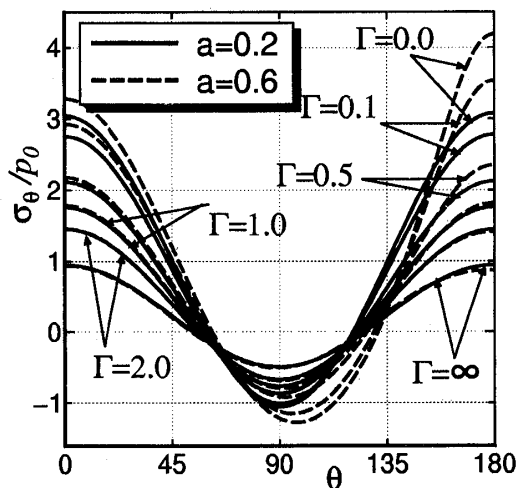


Fig. 8 Variation of σ_θ on the interface with θ (Sliding interface)

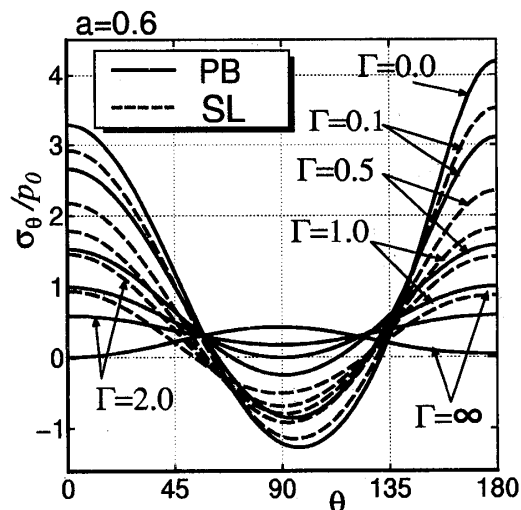


Fig. 9 Comparison of σ_θ on sliding interface with σ_θ on perfect bonding interface ($a=0.6$)

3.2 すべり介在物の場合 図 8 は、境界面の母材側応力 σ_θ の分布を示した図である。 a や Γ は図 3 と同様である。また、 $a = 0.6$ と一定にし、図 3 と図 8 を重ね、密着境界とすべり境界の双方の場合の σ_θ を対比した図を図 9 に示す。これらの図より、すべり境界の場合には、完全密着境界よりも応力緩和の程度が低いことが示される。図 10 は、境界面の介在物側応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の分布を示した図である。図 4 とは全く逆の分布を示し、 $\theta = 90^\circ$ 近傍で最大値をとる。また、図 4 と同様に a が変化しても $\bar{\sigma}_\theta$ の変化はわずかである。

図 11 は、 x 軸上の応力 $\bar{\sigma}_y, \sigma_y$ の分布を示した図である。介在物半径を $a = 0.2, 0.6$ とし、 Γ をパラメータとして示した。完全密着条件下での結果とは違い、

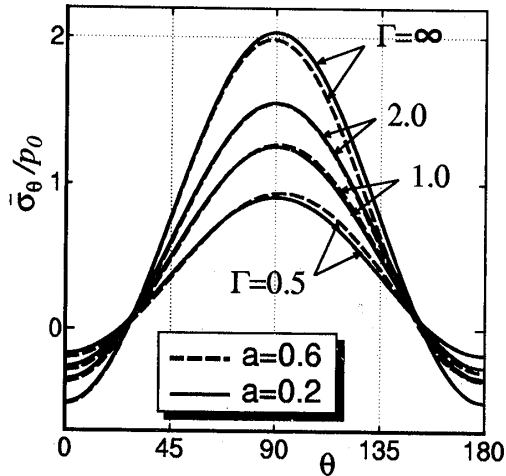


Fig. 10 Variation of $\bar{\sigma}_\theta$ on the interface with θ (Sliding interface)

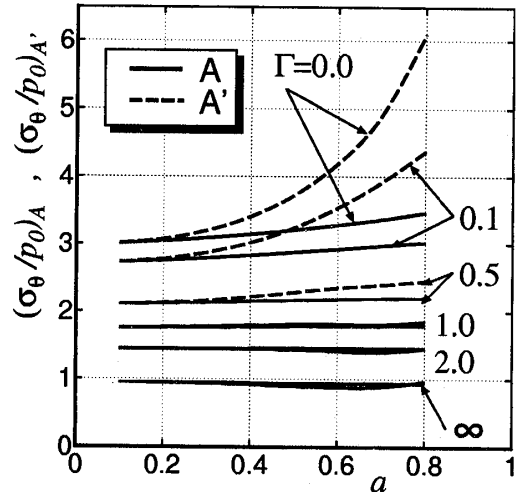


Fig. 12 Variation of $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0, 180}$ on the interface with a (Sliding interface)

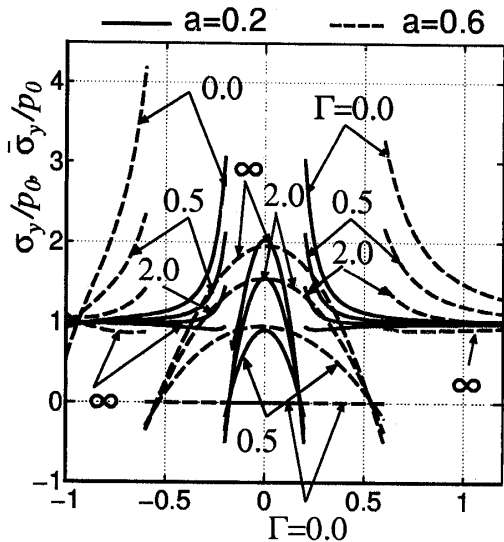


Fig. 11 Variation of stress σ_y and $\bar{\sigma}_y$ on x -axis with x (Sliding interface)

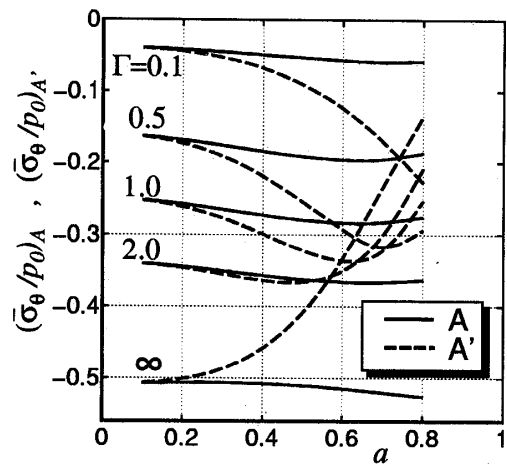


Fig. 13 Variation of $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0, 180}$ on the interface with a (Sliding interface)

境界面では圧縮応力となる一方、介在物中心では引張り応力となって凸状に大きく変化している。一方、母材側では、 Γ を大きくすることで応力集中現象が緩和されているが、完全密着条件より大きな効果は得られない。

図 12 は、境界面 $r = a, \theta = 0^\circ$ および $\theta = 180^\circ$ における母材側応力 $(\sigma_\theta)_A, (\sigma_\theta)_{A'}$ と介在物半径 a との関係を示した図である。この図からも、すべり介在物においては、完全密着介在物よりも挿入効果が低いことがわかる。

図 13 は、図 12 と同様に介在物側の応力 $(\bar{\sigma}_\theta)_A,$

$(\bar{\sigma}_\theta)_{A'}$ を Γ をパラメータとして示したものである。完全密着条件とは異なり、その絶対値は小さいが $\bar{\sigma}_\theta$ に変化が生じている。

4. 結 論

一個の円形介在物を有する半無限板が引張りを受ける問題を二次元弾性理論に基づいて厳密に解析する手法を示すとともに、数値計算によって介在物が弾性母材に及ぼす影響や介在物の接着条件による応力分布の相違などを明らかにした。得られた結果を要約すると以下ようになる。

- (1) 介在物の母材に対する剛性比 Γ は、応力の

分布および大きさに大きく影響を及ぼす。

(2) 介在物を挿入することで、 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ 近傍の界面の応力集中は著しく緩和される。Γ かつ介在物半径 a が大きいほどその効果は著しい。また、その緩和の効果は、完全密着介在物の場合がすべり介在物の場合に比べて大きい。

文 献

- (1) Horibe T., Tsuchida E., Arai Y. and Kusano N., Stresses in an Elastic Strip Having a Circular Inclusion under Tension, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. **72**, No. 719(2006), pp.990-997.
- (2) Horibe T., Tsuchida E., Arai Y. and Fukumura M., Stresses in an Elastic Strip Having a Circular Inclusion under Bending, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. **72**, No. 721(2006), pp.1405-1412.
- (3) Shioya S., On a Semi-Infinite Thin Plate with a Circular Inclusion under Uniform Tension, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. **32**, No. 236(1966), pp.593-600.
- (4) Lee M., Jasiuk I. and Tsuchida E., The Sliding Circular Inclusion in an Elastic Half-Plane, *Trans. A.S.M.E., J. of Appl. Mech.*, Vol. **59**(1992), pp.57-64.
- (5) Tsuchida E., Arai Y. and Yoshino M., Stresses in a Semi-Infinite Plate Containing an Elliptic Inclusion Parallel to the Straight Edge under Uniaxial Tension, *Theoretical and Appl. Mech.*, Vol. **46**(1997), pp.109-121.
- (6) Tsuchida E. and Nakahara I., Stress Concentration around a Spherical Cavity in a Semi-Infinite Elastic Body under Uniaxial Tension, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. **40**, No. 330(1974), pp.285-297.
- (7) Udoguchi T., Some Examples of Solutions in Two-dimensional Problems of Elasticity by Bipolar Coordinates. Part I. : A Semi-infinite Plate Containing a Circular Hole, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. **13**, No. 44(1947), pp.17-40.
- (8) Nakahara I., Shibuya H., Tsuchida E., Tsuji T. and Inoue Y., *Hand Book of Elasticity*, (2001), p.284, Asakura Publishing Co.
- (9) Moriguchi S., Udagawa K. and Hitotsumatsu S., *Mathematical Formulae I*, (1977), p.230, Iwanami Shoten Publishers Co.