

## スピンドルロータのボルト締結部における等価剛性\*

山本 浩<sup>\*1</sup>, 鄭 穎<sup>\*1</sup>, 沼崎 知宏<sup>\*2</sup>

## Equivalent Stiffness of Bolted Joint Layer of a Spindle Rotor

Hiroshi YAMAMOTO<sup>\*3</sup>, Ying ZHENG and Tomohiro NUMAZAKI<sup>\*3</sup> Department of Mechanical Engineering, Saitama University,  
255 Shimo Ohkubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

This paper describes an investigation of equivalent stiffness of a joint layer of a spindle rotor. The test rotor is composed of a journal part and two thrust plates bound with bolts. The each thrust plate and the journal part are clamped with eight M 4 bolts which are arranged on the circle at 45 degrees intervals with a uniform clamping torque. The each surface of bolted joints is processed by two methods in order to change the roughness of surface. We propose the identify procedure of the equivalent stiffnesses of the joint layer in normal and tangential direction based on the modal analysis theory and we can identify the equivalent stiffness in two surface conditions of joint layer. By using the identified equivalent stiffnesses, we can calculate natural frequencies of higher order which are not used in the identified procedure and the calculated ones are fairly good well with the measured natural frequencies of higher order. In two surface conditions of the joint layer, the normal stiffness and the tangential stiffness increase as the clamping torque of each bolt increases. On the other hands, in all condition of clamping torque, the normal stiffness and the tangential stiffness increase as the roughness of surface decreases. Moreover, the ratio of the tangential stiffness to the normal stiffness decreases as the surface of roughness decreases.

**Key Words**: Identification, Modal Analysis, Spindle, Fixing Element, Roughness, Clamping Torque, Natural Frequency, Contact Stiffness

## 1. 緒 言

工作機械の加工精度のより一層の向上のためには、工具および加工物の運動の基準となる案内要素の運動精度を高めることが必要となってくる。そのような観点から、筆者らの一人は超精密加工機の主軸に用いられる静圧エアスピンドルの動的精度向上に着目した研究を行い、気体膜剛性とロータ質量に起因する剛体振動モードの固有振動数および減衰比を高め得る軸受構造を明らかにしている<sup>(1)</sup>。それとともに、ロータ曲げ振動モードについて明らかにするための第一段階として、複数部材をボルト締結し組立てたロータ単体について有限要素法による振動解析を行ったが、締結部に関しては簡易モデルを用いたものであり、かつ、系統的方法によらず試行錯誤的に締結部の等価ばね定数の同定を試みたものであったため、条件によってはばね定数を同定できないなどの問題点があった<sup>(2)</sup>。また

筆者らは前報で、ロータ曲げ振動の振幅低減の指針を明らかにするべく、部材の締結トルク、締結面の表面あらさおよびうねりが系の固有振動数および減衰比に及ぼす影響を実験的に明らかにしている<sup>(3)</sup>。

本研究で対象とするスピンドルロータをはじめ、機械構造物の構成部材相互の締結方法としてボルトが多用されており、これまでもボルト締結部を有する系の振動特性に関する研究が多く行われてきた。例えば円形フランジがボルト締結された構造物の動特性について、木村ら<sup>(4)</sup>は、力とモーメントの釣合いから解析的に求めた、ボルトとフランジからなる結合部の曲げ剛性を用いることにより、固有振動数を従来より精度良く計算できることを示しており、また石田ら<sup>(5)</sup>は、ボルトおよびフランジを有限要素分割したモデルによる数値計算と実験から、フランジ厚さ、フランジ面形状およびボルト締結トルクが系の固有振動数に及ぼす影響を明らかにしている。しかしいづれも、被締結体はボルト径に比べ比較的薄い部材であり、かつ締結部の面積に対してボルト断面積の占める割合が同程度の場合についてのものである。そして伊藤ら<sup>(6),(7)</sup>は、工

\* 原稿受付 2008年1月8日。

<sup>\*1</sup> 正員, 埼玉大学大学院理工学研究科(☎ 338-8570 さいたま市桜区下大久保 255)。<sup>\*2</sup> 正員, 三菱電機株式会社(☎ 492-8682 稲沢市菱町 1)。

E-mail: yamamoto@mech.saitama-u.ac.jp

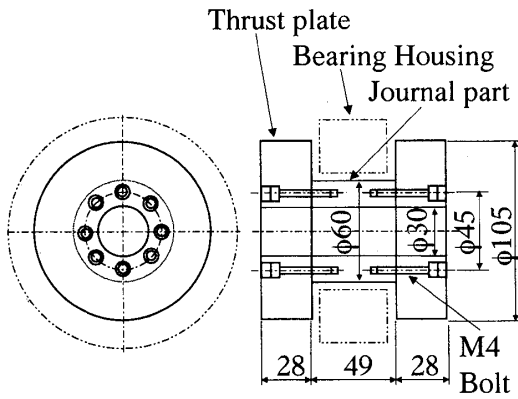


Fig. 1 Configuration of spindle rotor

作機械におけるボルト結合部の剛性および減衰能に着目し、ボルトで締結されたはりの振動特性について検討しているが、この場合は、被締結体はボルト径に比べ同程度の厚みをもつ部材であり、かつ締結部の面積に対してボルト断面積の占める割合が同程度である。本研究で対象とするスピンドルロータのように、被締結体が厚く、かつボルト径が小さく締結部の面積に対してボルト断面積の占める割合が小さい場合については、その締結部剛性に締結状態が及ぼす影響は十分に解明されているとはいいがたい。

そこで本研究では、既報<sup>(2)</sup>の問題点を解決すべく締結部の等価剛性のより厳密な定義を行い、実験により得られた固有振動数からモード解析の考え方をを用いて締結部剛性を系統的に求める手法を導き、その手法を用いてボルトの締結トルクおよび締結面の表面あらさと締結部剛性の関係を明らかにするとともに、締結部剛性の主たる原因について近似モデルによる考察を行ったので、以下に報告する。

## 2. 実験装置および実験方法

**2.1 スピンドルロータ構造概略** 図1に本研究で用いるスピンドルロータの構造概略を示す。ロータは静圧エアスピンドルにおけるスラスト軸受面に対応するスラスト板2枚と、ジャーナル軸受面に対応するジャーナル部により構成され、ジャーナル部のそれぞれの端面にM4ボルト8本によりスラスト板が取り付けられている。また、本研究においてはロータをエアスピンドルに組み込まず単体で振動特性を測定するため、ロータ材料は加工性の良い普通鋼(S45C)とした。

**2.2 締結面の表面形状** 本研究では締結面のミクロな形状誤差である表面あらさが締結部剛性に及ぼす影響を明らかにするため、まずはじめにボルトにより部材を締結したときのスラスト板およびジャーナル部の接触面に旋削加工を施したロータ(以下ロータT

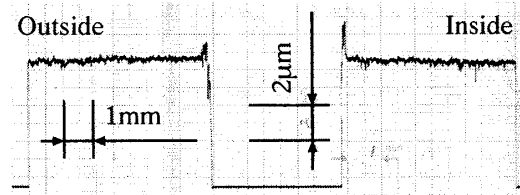


Fig. 2 Surface of edge of the journal part (Rotor G)

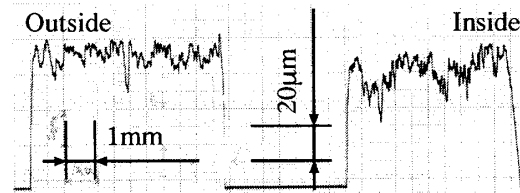


Fig. 3 Surface of edge of the journal part (Rotor T)

Table 1 Surface profiles of joint layer

	Thrust plate Ry (μm)	Journal part Ry (μm)
Rotor G	0.3	0.6
Rotor T	28	30

と呼ぶ。)を製作し実験を行なった。その後同一のロータの接触面に研削加工を施すことにより得られたロータ(以下ロータGと呼ぶ。)について実験を行うことにより、表面あらさ以外の条件が同一となるようにした。そして、それぞれの場合の締結面の表面あらさを明らかにするため、表面形状の測定を行った。

図2および3に、締結面であるジャーナル部端面の内周から外周までの表面形状を示す。また表1に、測定結果より求めたロータの各締結面の最大あらさRyを示す。図および表に示すとおり、ロータGの表面あらさはロータTの表面あらさに比べ著しく小さくなっていることがわかる。

**2.3 実験装置** 図4に実験装置の概略を示す。スピンドルロータを柔らかい台(スポンジ)の上に置いた自由支持状態で、インパルスハンマでロータを打撃したときの打撃力信号と、スピンドルロータに取り付けた加速度センサにより得られる加速度信号をFFTに入力し伝達関数を得る。得られた伝達関数をカーブフィットすることにより、固有振動数および減衰比と振動モードを求める。

**2.4 実験方法** 実験は、ロータ単体の振動において支配的と考えられる、1次から3次までの曲げ振動モードを対象に行った。固有振動数および減衰比は、スラスト板上面の最も外側に取り付けた加速度センサの対称な位置の1点を加振し、得られた伝達関数を

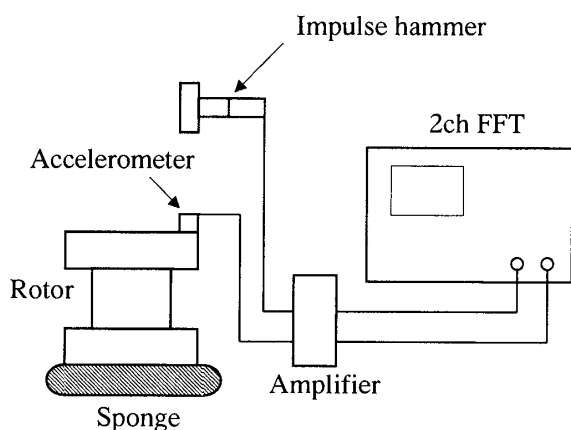


Fig. 4 Experimental equipment system

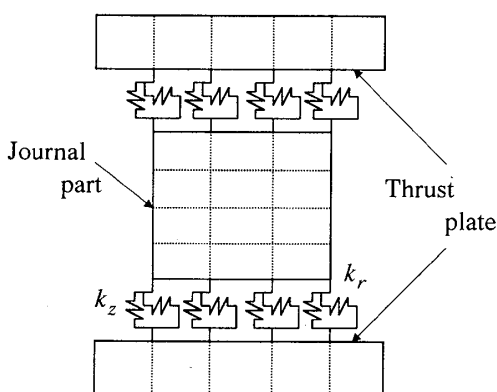


Fig. 5 Dynamical model of rotor

カーブフィットすることにより求めた。また、曲げ振動モード形状は、図4に示すロータの上側スラスト板上面の、内外周それぞれ8箇所(周方向45度等間隔)を軸方向に打撃したときの加振力と、上側スラスト板上面および下側スラスト板下面の外周における軸方向加速度応答と内周における半径方向加速度応答およびジャーナル部側面の6点における半径方向加速度応答より得られた、伝達関数の虚部の各次数に対応するピーク値より求めた。

### 3. 締結部等価剛性モデル

締結部の動的変形特性は接触面の局所的な弾塑性変形特性およびボルトの弾塑性変形特性に起因していると考えられる。しかし本研究で対象とするスピンドルロータでは締結部面積に占めるボルト断面面積の割合は4.7%と小さく、また、締結トルクや締結面の表面あらさの変化によるボルトの剛性の変化はほとんど無いと考えられる。よって、対象とするスピンドルロータにおいては、締結条件の変化による締結部剛性の変化は、接触面における局所的な変形に起因するものが支配的

であると考えられる。そこでここでは、図5に示すような、スラスト板およびジャーナル部については通常の有限要素解析により得られる要素質量行列および要素剛性行列により定式化され、締結部については、単位面積あたり  $k_z$  および  $k_r$  の一様なばね定数を持つ、接触面に対して法線方向および接線方向の等価ばねでスラスト板とジャーナル部が結合されている力学モデルを考える。既報<sup>(2)</sup>においては、簡単のため、締結部に対応する2つの接触面における対向する要素表面の節点相互が、法線および接線方向それぞれについて、すべて同じ大きさのばね定数  $k_z'$  および  $k_r'$  の離散的ばねで結合されているとしたモデルを用いていた。しかし、内周と外周の節点数は等しくなるように有限要素分割しているため、単位面積あたりのばね定数について考えると、1節点に対応する面積が小さい内周の方が高くなってしまいうという実際と異なるものとなっていた。そこで本報では、以下の式により導出される締結部に関する剛性行列により、締結面における節点相互に関する等価剛性行列を導出し解析を行う。

$$K_J = \int N^T k N ds \quad (1)$$

ここで  $N$  は要素内の任意の位置における変位と節点変位を関係付ける形状関数行列である。また  $k$  は単位面積当りの半径方向および軸方向のばね定数  $k_r$  および  $k_z$  からなる行列であり、以下のように表される。

$$k = \begin{pmatrix} k_r & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

また要素質量行列および要素剛性行列は、それぞれ以下のように表される。

$$M_e = \rho \int N^T N dv, \quad K_e = \int B^T D B dv \quad (3)$$

ここで  $D$  は応力とひずみの関係を表す行列であり、 $B$  はひずみと節点変位との関係を表す行列で、 $\rho$  は密度である。以上に述べた力学モデルに基づき系全体の運動方程式を導出し、それを解くことにより固有振動数および振動モードを求めることができる。また次章に述べる手法により、実験により得られた固有振動数から締結面の単位面積当りの等価ばね定数  $k_z$  および  $k_r$  を同定することができる。

図6~8に、1次から3次までの振動モードの計算結果を示す。図より1次および2次の振動モードはジャーナル部の曲げ変形が支配的なものであり、3次の振動モードはジャーナル部の伸縮変形とスラスト板の節円数1の曲げ変形が支配的なものであることがわかる。これらの計算結果は、実験により得られたロータの1~3次の曲げ振動モード形状<sup>(3)</sup>と同様である。図に示す1次および2次モードの場合と3次モードの

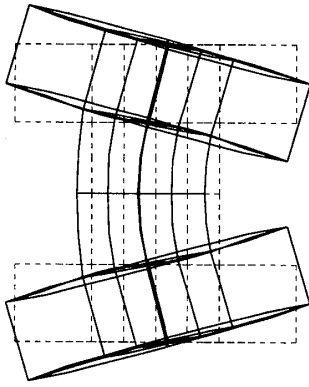


Fig. 6 Vibration mode (1st)

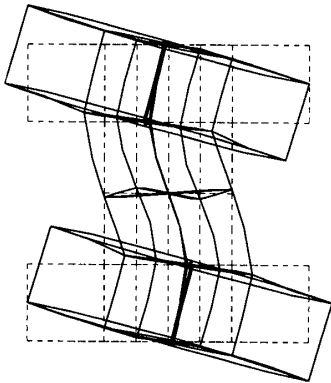


Fig. 7 Vibration mode (2nd)

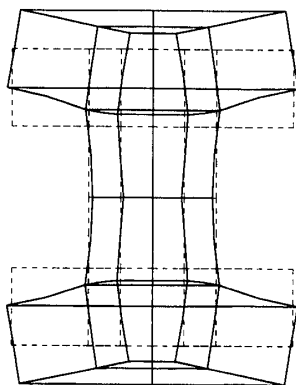


Fig. 8 Vibration mode (3rd)

場合では、締結部近傍における振動モード形状が異なることから、既報<sup>(2)</sup>で用いた簡易モデルにおける、単位面積あたりの等価ばね定数の内外周における差が固有振動数におよぼす影響は、1次および2次モードの場合と3次モードの場合で異なると思われる。

図9および図10に $k_z$ および $k_r$ と固有振動数の関係を示す。図より $k_z$ および $k_r$ を大きくすると固有振動数は高くなるが、1次から3次の曲げ振動モードにおいては、固有振動数に締結部剛性が及ぼす影響は $k_z$

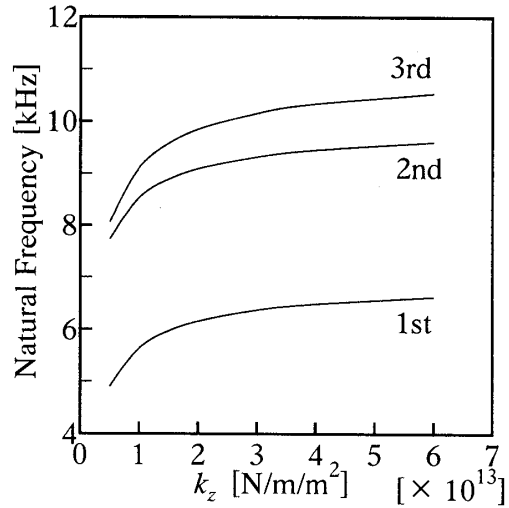


Fig. 9 Relation between natural frequencies and  $k_z$  ( $k_r = 1.0 \times 10^{13}$  [N/m/m<sup>2</sup>])

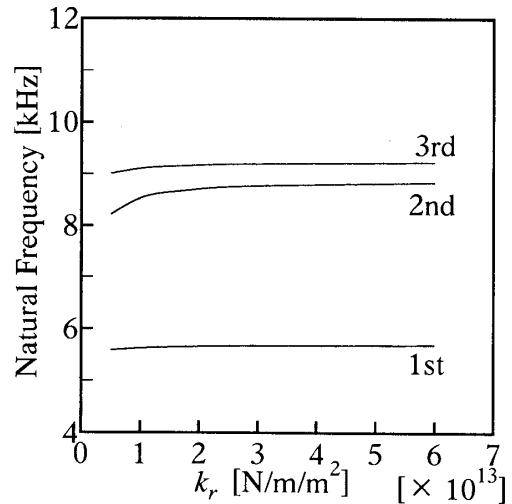


Fig. 10 Relation between natural frequencies and  $k_r$  ( $k_z = 1.0 \times 10^{13}$  [N/m/m<sup>2</sup>])

の方が大きいことがわかる。

#### 4. 締結部剛性の同定方法

締結部剛性を同定すべきスピンドルの自由振動の運動方程式は、減衰を無視すれば以下ようになる。

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{4}$$

同定すべき締結部剛性 $k_z$ および $k_r$ は、それぞれの初期値 $k_{z0}$ および $k_{r0}$ と、それぞれの修正量 $\Delta k_z$ および $\Delta k_{r0}$ を用いて以下のように表すことができる。

$$k_z = k_{z0} + \Delta k_z, \quad k_r = k_{r0} + \Delta k_r \tag{5}$$

よって、同定すべき系の剛性行列  $\mathbf{K}$  は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{K}_s + k_z \mathbf{A}_z + k_r \mathbf{A}_r \\ &= \mathbf{K}_s + (k_{z0} + \Delta k_z) \mathbf{A}_z + (k_{r0} + \Delta k_r) \mathbf{A}_r \\ &= \mathbf{K}_0 + \Delta k_z \mathbf{A}_z + \Delta k_r \mathbf{A}_r\end{aligned}\quad (6)$$

$$(\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_s + k_{z0} \mathbf{A}_z + k_{r0} \mathbf{A}_r)$$

ここで  $\mathbf{K}_s$  は、式 (3) に示す有限要素法による定式化により得られるスピンドルロータのスラスト板およびジャーナル部に関する要素剛性行列  $\mathbf{K}_e$  から求めることができる。また、 $\mathbf{A}_z$  および  $\mathbf{A}_r$  は締結部等価ばねの位置などにより決まる係数行列である。

まず、締結部剛性の初期値を決定し、運動方程式を導くと以下ようになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{x} = \mathbf{O} \quad (7)$$

式 (7) を解くことにより  $i$  次の固有振動数  $\omega_{0i}$  および固有モード  $\mathbf{p}_i$  を求める。求めた固有モードを用いることにより、 $i$  次のモード質量およびモード剛性は以下のように求まる。

$$m_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{M} \mathbf{p}_i, \quad k_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{p}_i \quad (8)$$

それぞれの次数の固有モードは式 (4) と式 (7) の系において変化がないと仮定すれば、同定すべき系の運動方程式 (4) において、実験により得られた  $i$  次の固有振動数を  $\omega_i$  としたとき、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}m_i \omega_i^2 &= \mathbf{p}_i^T \mathbf{K} \mathbf{p}_i \\ &= \mathbf{p}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{p}_i + \Delta k_z \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}_z \mathbf{p}_i + \Delta k_r \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}_r \mathbf{p}_i \\ &= m_i \omega_{0i}^2 + a_{zi} \Delta k_z + a_{ri} \Delta k_r\end{aligned}\quad (9)$$

$$(a_{zi} = \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}_z \mathbf{p}_i, \quad a_{ri} = \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}_r \mathbf{p}_i)$$

以上より、未知数  $\Delta k_z$  および  $\Delta k_r$  に関する以下の式が得られる。

$$a_{zi} \Delta k_z + a_{ri} \Delta k_r = m_i (\omega_i^2 - \omega_{0i}^2) \quad (10)$$

締結部剛性の同定に用いる 2 つの次数 (例えば  $i=1, 2$ ) に対応する式 (10) に、実験により得られた 2 つの次数の  $\omega_i$  の値を代入して得られる 2 つの式からなる連立方程式を解き  $\Delta k_z$  および  $\Delta k_r$  を求める。そして得られた  $\Delta k_z$  および  $\Delta k_r$  と計算に用いた初期値  $k_{z0}$  および  $k_{r0}$  から式 (5) より  $k_z$  および  $k_r$  を求めることができる。通常 1 回の計算で  $k_z$  および  $k_r$  を求めることはできないので、得られた  $k_z$  および  $k_r$  を次の計算ステップにおける初期値  $k_{z0}$  および  $k_{r0}$  とし、繰り返し計算を行う。そして

$$\varepsilon = \frac{|\Delta k_z| + |\Delta k_r|}{|k_{z0}| + |k_{r0}|} \quad (11)$$

で求められる  $\varepsilon$  が  $10^{-5}$  以下となったとき、修正量  $\Delta k_z$  および  $\Delta k_r$  が十分小さくなったとし、そのときの値を最終的な  $k_z$  および  $k_r$  とすることにより両者が同定できたとする。同定した等価ばね定数の妥当性、ひいて

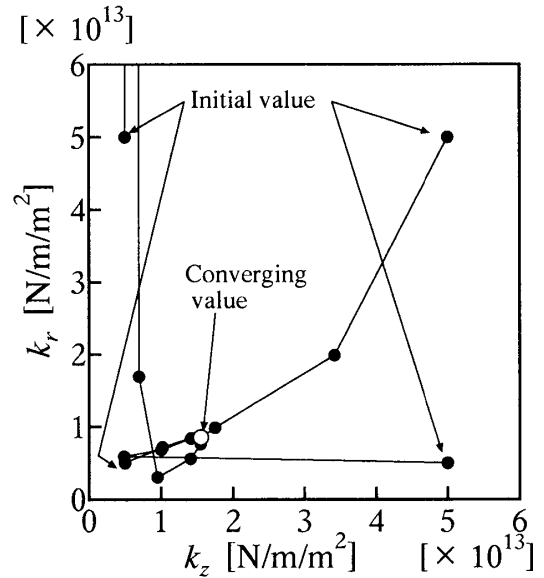


Fig. 11 Convergence status of equivalent stiffness (Rotor G,  $T = 1.0$  [Nm])

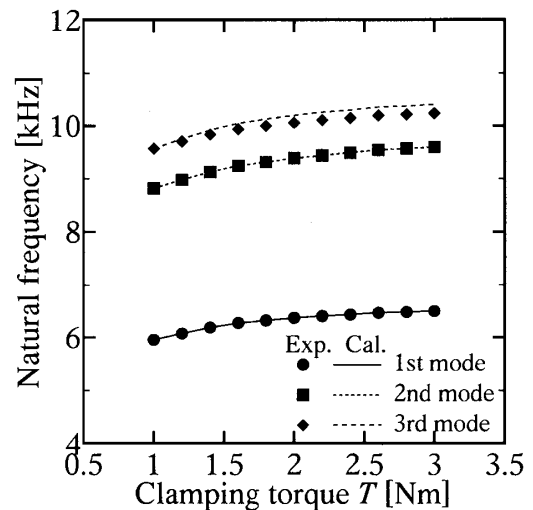


Fig. 12 Relation between clamping torque and natural frequencies (Rotor G)

は提案するモデルの妥当性は、その値を用いて固有振動数を計算し、同定に用いていない次数 (例えば  $i=3$ ) の固有振動数の計算値と実験値を比較し、その相対誤差により評価する。

## 5. 締結部剛性の同定結果

図 11 に、 $k_z$  および  $k_r$  に 4 通りの初期値を与えてから収束するまでの繰り返し計算過程における  $k_z$  および  $k_r$  の遷移例を示す。図に示した例はロータ G における締

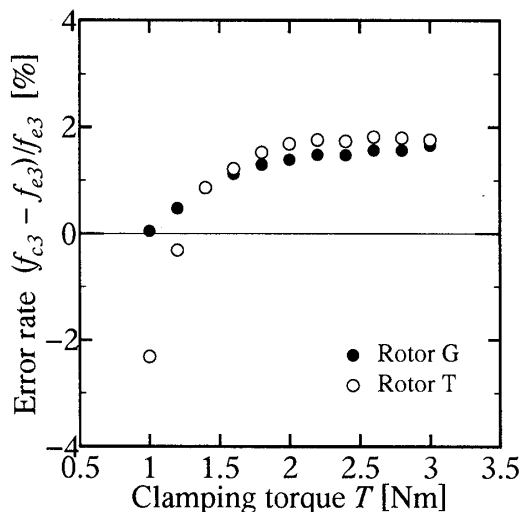


Fig. 13 Relation between clamping torque and error rate of natural frequency (3rd mode)

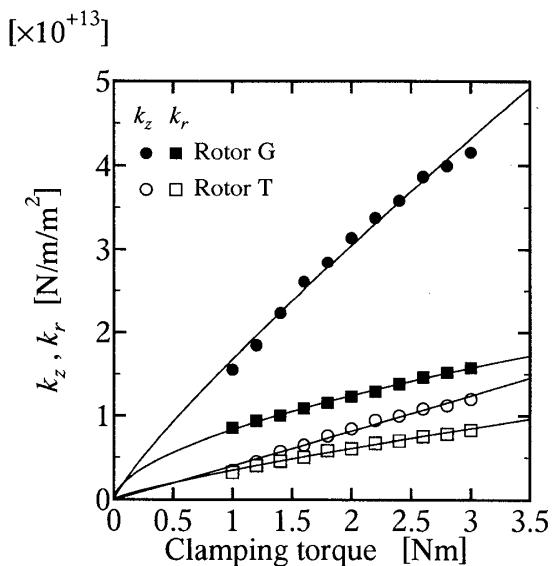


Fig. 14 Relation between clamping torque and equivalent stiffnesses

結トルク 1.0 (N m) の場合であるが、いずれの場合も数ステップで式 (11) の  $\varepsilon$  が  $10^{-5}$  以下となり計算が終了している。また、図 11 に示すように  $k_z$  および  $k_r$  の値が振動することなく収束している  $k_z$  と  $k_r$  の初期値が等しい場合について、初期値を  $1 \times 10^{10} \leq k_{z0}, k_{r0} \leq 1 \times 10^{15}$  と収束値からさらに大きく変化させた場合においても、図 11 に示す収束値を得ることができた。その他の締結トルクの場合においても、またロータ T の場合においても、すべて  $k_z$  および  $k_r$  を求めることができたことから、提案する手法は有用であると言える。

図 12 にロータ G の場合について、実験により得られた 1 次および 2 次の固有振動数から締結部剛性  $k_z$  および  $k_r$  を同定し、その値を用いて固有振動数を計算した結果を、実験により得られた固有振動数とあわせて示す。また、図 13 にロータ G およびロータ T の場合について、同定した剛性を用いて計算した 3 次の固有振動数  $f_{c3}$  と実験により得られた固有振動数  $f_{e3}$  との相対誤差  $(f_{c3} - f_{e3})/f_{e3}$  と締結トルクとの関係を示す。図 13 に示す相対誤差の大小によって、同定に用いたモデルと同定した剛性の妥当性を判断できる。締結トルクが大きい領域においてはいずれのロータにおける相対誤差もほとんど同程度でありかつその値は小さく、また締結トルクが小さくなるにつれ  $(f_{c3} - f_{e3})/f_{e3}$  が小さく、つまり計算により得られた 3 次の固有振動数が小さくなる傾向がある。ロータ G およびロータ T の場合とも、相対誤差は最大で 2% 程度であることから、締結面に対して法線方向および接線方向に等価剛性を仮定した力学モデルは実際のロータにおけるボルト締結部の特性をかなりよく表しているといえる。

また既報<sup>(2)</sup>においては、本論文と異なり系統的な同定手法を用いず試行錯誤的に締結部剛性の同定を試みたため、2 次および 3 次の固有振動数を用いた場合のみ締結部剛性を同定することができ、1 次および 2 次の固有振動数を用いた場合は同定することができなかったが、本報においてはいずれの固有振動数の組み合わせを用いた場合においても締結部剛性を同定することができた。さらに、本論文で用いたロータの実験結果を用いて、既報<sup>(2)</sup>に示す力学モデルを適用して本報で示す同定手法により締結部剛性を同定した場合にも、いずれの固有振動数の組み合わせを用いた場合においても締結部剛性を同定することができた。このことから、提案する同定手法は有用であると言える。

図 14 に、ロータ G およびロータ T について、締結トルクと締結部剛性の関係をそれぞれ示す。図より、表面あらさによらず、締結トルクを大きくするにつれ  $k_z$  および  $k_r$  はともに高くなることがわかる。また表面あらさが小さいロータ G の場合の方が  $k_z$  および  $k_r$  はともに高くなることがわかる。

## 6. ヘルツ接触モデルによる考察

3 章にて述べたように、締結部の動的変形特性の変化は接触面における局所的な変形特性の変化に起因すると考えられ、また図 2 および 3 に示すように締結面は理想的な平面ではないので、締結時には相対する接触面の突起同士がヘルツ接触しているものと考えられる。そこでそのような状態における接触力の性質を明

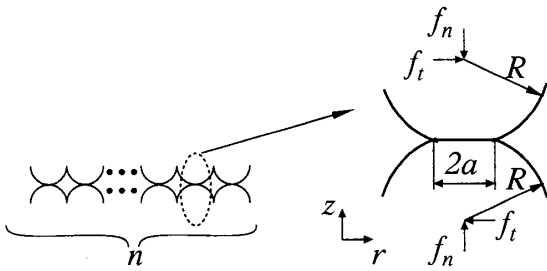


Fig. 15 Hertzian contact model

らかにするため、簡単なモデルとして、図 15 に示すような、スラスト板およびジャーナル部の締結面に半径  $R$  の球  $n$  個が同じ高さに平面状に分布し、すべての球が相互にヘルツ接触する場合を考える。

1 対の球について球の接触面に対して法線方向の力  $f_n$  が作用している場合、Hertz の接触理論より、2 つの球の接触円半径  $a$  と接触力  $f_n$  の関係は以下のようにになる。

$$a^3 = \frac{3R}{4} \frac{1-\nu^2}{E} f_n \quad (12)$$

ここで  $E$  は縦弾性係数で  $\nu$  はポアソン比であり、 $R$  は球の半径である。締結面に対して垂直方向のスラスト板とジャーナル部の相対変位  $z$  に対応する、接触面に対して垂直方向の球の中心の相対変位  $z$  と接触力に対応する法線方向の力  $f_n$  との関係は以下のようにになる。

$$z^3 = \frac{9}{2RE^2} (1-\nu^2)^2 f_n^2 \quad (13)$$

よって  $n$  対の球が接触している場合の全接触力を  $F_n = n f_n$  とすると、法線方向の微小振動に関する法線方向の剛性  $k_n$  は以下のようにになる。

$$k_n = \frac{\partial F_n}{\partial z} = \left[ \frac{3RE^2}{4} \frac{n^2}{(1-\nu^2)^2} \right]^{\frac{1}{3}} F_n^{\frac{1}{3}} \quad (14)$$

また締結面に対して平行な方向のスラスト板とジャーナル部の相対変位  $r$  に対応する、球の中心の接線方向の相対変位  $r$  と接線方向の力  $f_t$  との関係は、Mindlin の理論<sup>(8)</sup> よりすべりが無い場合は以下のようにになる。

$$f_t = \frac{4Ga}{2-\nu} r \quad (15)$$

ここで  $G$  は横弾性係数である。よって  $n$  対の球が接触している場合の全接触力の接線方向成分を  $F_t = n f_t$  とすると、接線方向の剛性  $k_t$  は以下のようにになる。

$$k_t = \frac{\partial F_t}{\partial r} = \frac{4Gan}{2-\nu} = \left[ \frac{6RE^2(1-\nu^2)n^2}{(2-\nu)^3(1+\nu)^3} \right]^{\frac{1}{3}} F_n^{\frac{1}{3}} \quad (16)$$

接触面においてすべりがあがる場合、接線方向の剛性は式 (16) で示す値より小さくなり、例えば静摩擦係数が 0 であれば接線方向の剛性は 0 となる。式 (14) および (16) より、すべりの無い場合の  $k_n$  と  $k_t$  の比、すなわち接触面における単位面積あたりの剛性  $k_z$  と  $k_r$  の比

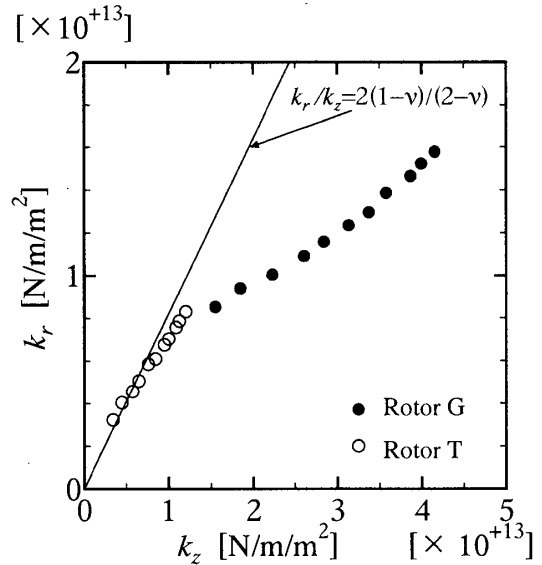


Fig. 16 Relation between  $k_z$  and  $k_r$

は以下のようにになる。

$$\frac{k_t}{k_n} = \frac{k_r}{k_z} = \frac{2(1-\nu)}{2-\nu} \quad (17)$$

図 16 に、締結トルクを変化させた場合の  $k_z$  と  $k_r$  の関係をロータ G およびロータ T について示す。また、ヘルツ接触を仮定しすべりが無いとした場合の  $k_z$  と  $k_r$  の関係に対応する、式 (17) で表される関係を合わせて示す。図に示す通り、いずれの場合も  $k_z$  と  $k_r$  の比は締結トルクによらずほぼ一定であり、かつ式 (17) で表されるヘルツ接触状態を仮定しすべりが無いとした場合に比べると小さくなっていることがわかる。そしてロータ T に比べるとロータ G の方が、 $k_r/k_z$  の値は小さくなるのがわかる。これは、表面あらしの大きいロータ T に比べ、表面あらしの小さいロータ G の方が静摩擦係数が小さいので表面のすべりが大きくなり、その結果  $k_r$  が小さくなったものと考えられる。

法線方向の接触力は締結トルクに比例することを考慮すれば、式 (14) および (16) より  $k_z$  も  $k_r$  もともに締結トルクの 1/3 乗に比例することになる。しかし、実際は締結トルクの増加にともない接触点が増加することも考えられるので、 $k_z$  および  $k_r$  を以下のように表すことを考える。

$$k_z = A \cdot T^q, \quad k_r = B \cdot T^s \quad \left( q, s \geq \frac{1}{3} \right) \quad (18)$$

そして式 (18) により得られる  $k_z$  および  $k_r$  と、実験結果から同定して得られた  $k_z$  および  $k_r$  を用いて、最小二乗法により係数  $A, q, B, s$  を決定する。表 2 に  $k_z$  および  $k_r$  を式 (18) で近似した場合の係数  $A, q, B, s$  を示す。また得られた係数を式 (18) に与えた計算結果を図 14 に実線で示す。

Table 2 Coefficients of approximate expression for equivalent stiffness

	$k_z$		$k_r$	
	$A [\times 10^{13}]$	$q$	$B [\times 10^{13}]$	$s$
Rotor G	1.678	0.860	0.833	0.579
Rotor T	0.400	1.031	0.348	0.812

いずれの場合も式 (18) により求めた  $k_z$  および  $k_r$  はかなりよく実験値を表しており、このことから等価ばね定数は締結トルクのべき乗で表しうるといえる。また表よりいずれの場合も  $q$  および  $s$  は 1/3 より大きくなっていることから、締結トルクを大きくしたときには、各接触点における接触面積の増大により剛性が高くなるだけでなく、接触点の増加により剛性が高くなっていると考えられる。

図 16 に示すように、実験を用いて同定した  $k_r/k_z$  は式 (17) で示す値に近く、かつ若干小さくなるという妥当な傾向を示していること、また図 14 に示すように、式 (18) による近似は同定結果をかなりよく表しており、かつ表 2 に示すとおり、締結トルク  $T$  の次数  $q$  および  $s$  はヘルツ接触における球の接触面積の増大に起因する 1/3 より大きく、締結トルク増大時の接触点の増加に対応していることから、締結部剛性は締結部の接触面の突起部分のヘルツ接触に起因するものが主であると考えられる。

## 7. 結 言

本研究では、スピンドルロータのボルト締結部を接触面全面に一様な単位面積当りのばね定数を有する法線方向および接線方向のばねでモデル化し、実験により得られた固有振動数から締結部の等価剛性を系統的に同定する手法を提案し、同定した剛性と締結状態の関係性を明らかにした。本研究で得られた結論は以下の通りである。

(1) 1 次および 2 次の固有振動数の実験結果から同定した締結部剛性を用いて計算した 3 次の固有振動数と、実験により得られた 3 次の固有振動数との相対誤差は 2% 以下であることから、提案した締結部モデルおよび同定手法は妥当であるといえる。

(2) 締結トルクが高い場合ほど、また表面あらさが小さい場合ほど、締結部剛性は締結面の法線方向、接線方向ともに高くなる。

(3) 締結トルクによらず、法線方向の等価剛性に対する接線方向の等価剛性の比はほぼ一定であり、表面あらさが大きい場合の方がその値は大きくなるが、ヘルツ接触状態を仮定しすべりが無いとした場合の値より小さくなる。

## 文 献

- (1) Ono, K., Yamamoto, H. and Uemoto, H., Design and Manufacture of High-Performance Hydrostatic Air Bearing Spindle with Grid-Shaped Grooves, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.61, No.581 (1995), pp.220-227.
- (2) Ono, K., Nukata, T. and Yamamoto, H., Effect of Bolted Joints on the Vibration Characteristics of a Hydrostatic Air Bearing Spindle Rotor, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.57, No.543 (1991), pp.3429-3435.
- (3) Yamamoto, H., Zheng, Y. and Numazaki, T., Effect of Bolted Joint Layer on the Vibration Characteristics of Spindle Rotor, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.74, No.742 (2008), pp.1432-1437.
- (4) Kimura, H., Yamamoto, K., Shimizu, Y., Ishizuka, H., Furuta, M. and Ozawa, Y., Effect of Flexural Rigidity of Bolted Connections on Vibration Characteristics of Structures, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.64, No.619 (1998), pp.755-759.
- (5) Ishida, E., Koizumi, T. and Tsujiuchi, N., Research for Dynamic Characteristics of Cylinder with Thin Flange Bolted Joints, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.68, No.667 (2002), pp.220-227.
- (6) Ito, Y. and Masuko, M., Study on the Damping Capacity of Bolted Joints : 1st Report, Influences of the Connecting Conditions, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.37, No.295 (1971), pp.622-631.
- (7) Ito, Y. and Masuko, M., Study on the Damping Capacity of Bolted Joints : 2nd Report, Effects of the Joint Surfaces Conditions, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.40, No.335 (1974), pp.2058-2065.
- (8) R.D.Mindlin, Compliance of Elastic Bodies in Contact, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.71, No.3 (1949), pp.259-268