

複数振動子と支持系の連成振動*

長嶺拓夫*¹, 佐藤勇一*², 森博輝*¹

Coupled Vibration of Oscillators and Their Support

Takuo NAGAMINE*³, Yuichi SATO and Hiroki MORI^{*3} Graduate School of Science and Engineering, Saitama University,
255 Shimo-okubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

In this paper, we describe the coupled vibration of oscillators mounted on a plate hanging on four strings and investigate the features of such vibration. From the experimental and numerical simulation results, the following findings were obtained. First, when the natural frequencies of oscillators and their support are almost the same, the amplitude of the support is very small. This is because the driving forces of oscillators are insufficient. In the case of two oscillators, the phase difference becomes almost 180 deg; in the case of three oscillators, it becomes almost 120 deg; in the case of four or more oscillators, it becomes variable. Second, when the support vibrates strongly, oscillators synchronize and vibrate with a corresponding phase. Sufficient driving forces of oscillators are required for the large amplitude of the support.

Key Words: Coupled Vibration, Oscillator, Natural Frequency, Phase Locking, Entrainment, Synchronization

1. はじめに

複数の自励振動子が互いに影響を与え合う場合、それぞれの振動子のもつ周期が若干異なっている場合、周期が一致する同期現象が知られている。17世紀の半ばに細いはりに掛けられた二つの振り時計の周期が一致する現象として始めて観察された。以後、多くの分野において同期現象は観察されている⁽¹⁾。

複数の自励振動子の連成振動については数多くの研究がなされている。Blekhmanはvan der Pol型の振動子が一方向に振動する系に取付けられている場合について解析を行い、振動子間の位相差が0または π で同期することを示している⁽²⁾。著者らはメトロノームを台に載せた系で実験と解析を行い、振動子間の位相差は台の固有振動数と同期振動数によって影響を受けることを示している⁽³⁾。近藤らは、同じ系について解析を行い、概周期振動からカオスが起るルート等を明らかにしている⁽⁴⁾。Bannettらは摩擦の小さい車輪上に載せたはりに、二つの振動子を載せた系(復元力=0の系)で実験と解析を行い、振子と系の重さの比により現れる振動を示している⁽⁵⁾。

これら一連の研究で対象とする振動は、複数の振子

といった単純な系にも関わらず、多様である。現状では、このような比較的単純な系であっても、どのような振動が現れるのか十分に明らかになっていない。さらに実際の系では、加振方法や相互作用等が様々である。このようなことから、パラメータによって現れる振動を検討し現象を理解することは、工学的な問題を考える上で意味があると考えている。

実際の問題としては、多数の歩行者の歩行と歩道橋の横揺れが同期し大きな振動を引き起したことがある。Fujinoらは実験的な検討を行い、歩行により橋に横揺れが生じ、その揺れにより多くの歩行が引き込まれて同期し、さらに大きな橋の振動を起すことを報告している⁽⁶⁾。松久らは身体のリズム生成機構である神経振動子と歩道橋の横振動の関係を引き込み現象として検討している⁽⁷⁾。

著者らは複数の振動子と支持系が連成振動することにより大きな振動が起ることを防止する目的で研究を行っている。本論文では、糸によって吊られた支持系に複数の振動子を載せた場合の連成振動について検討を行った。全ての振動子がそろって振動し支持系が大きく振動する場合と振動子が互いの振動を打ち消し合い支持系の振動が非常に小さい場合がある。その現れた振動の特徴について報告を行う。

* 原稿受付 2007年9月19日。

*¹ 正員、埼玉大学大学院理工学研究科(☎ 338-8570 さいたま市桜区下大久保 255)。*² 正員、フェロー、埼玉大学大学院理工学研究科。
E-mail: nagamine@mech.saitama-u.ac.jp

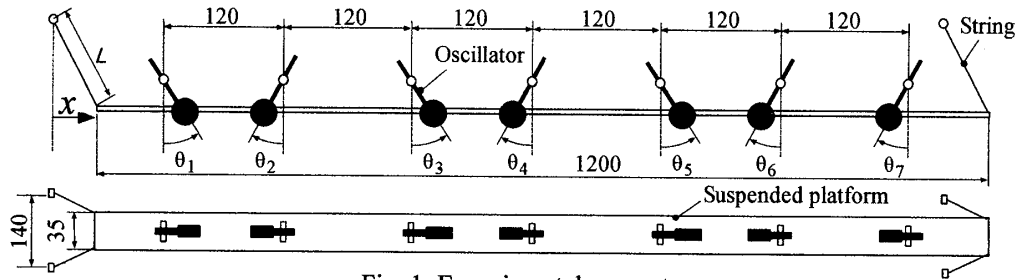


Fig. 1 Experimental apparatus

2. 主な記号

- f_n : 振動子の振動数 [Hz]
- f_o : 振動子が微小変位の固有振動数 [Hz]
- f_p : 支持系の固有振動数 [Hz]
- m : 振動子の質量 [g]
- x : 台の水平方向変位
- M : 台の質量 [g]
- N : 振動子の台数
- γ : 質量比 (振動子の質量/総質量 $m/(M + \sum m)$)
- η : 振動子と台の重心から各支点までの長さの比
- θ_i : 振動子 i の角変位
- ω_i : 振動子の固有角振動数 [rad/s]
- ω_p : 台の固有角振動数 [rad/s]
- ζ_i : i 番目の振動子の減衰比
- ζ_p : 台の減衰比
- Ω_i : 振動子と台の固有角振動数比 (ω_i / ω_p)

3. 実験

3-1 実験装置 図1は実験装置の概略図である。4本の糸で吊られた台の上に振動子が載せられている。糸は、横方向 (x 方向) にのみ台が振動するよう、上方に広がるように張ってある。台の質量は約 110 g である。台の固有振動数 f_p は糸の長さ L によって変えることができる。台の固有振動数が振動子の固有振動数 f_o を含む 18 ~ 40 Hz の範囲で実験を行った。振動子は太陽電池によって駆動される小型なものを用いている。質量が約 19 g で支点から重心までの長さが 16.9 mm で、角速度が負 ($d\theta/dt < 0$) で、角変位が $-14.8 < \theta < 4.4 \text{ deg}$ の範囲で駆動トルクが加わる。振動子の固有振動数 f_o は図2に示してある。固有振動数 f_o は 2.66 ~ 2.68 Hz の範囲であり、振子は、ほぼ同じ固有振動数であると考えられる。

3-2 実験方法 台の糸の長さ L により台の固有振動数を設定する。その後、初期条件として台を静止させた状態から、全ての振動子の初期角度を 42 deg にし振動を開始させた。初期条件としては様々なも

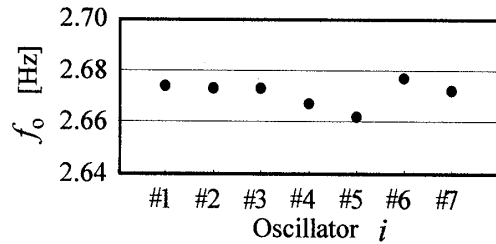


Fig. 2 Natural frequency of oscillators

のがあがるが、ここでは、大きな振動が起っているときの振動子間の位相差が同位相であることから、同位相が起り易い初期条件として、同位相で実験を開始し検討を行った。計測は振動を開始してから 10 分後から 10 分間行った。計測は非接触変位計と CCD カメラの画像を用いて行い、振動子と台の変位を計測した。振動子は最大で 7 台用いた。

4. 解析

4-1 運動方程式 台の振動は小さく、鉛直方向の変位成分は十分小さいとして無視している。振動子は剛体として扱い、駆動力は一定角変位内で与えられるものとする運動方程式は以下のように表わすことができる。

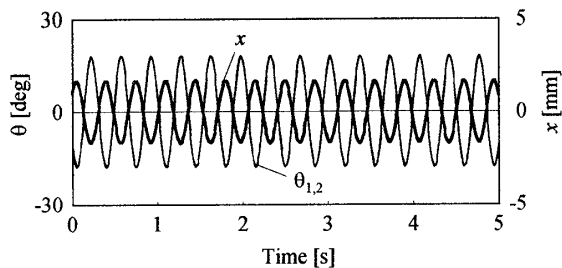
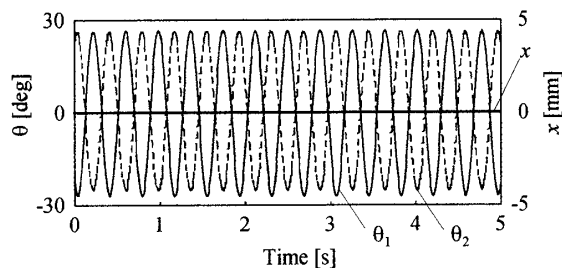
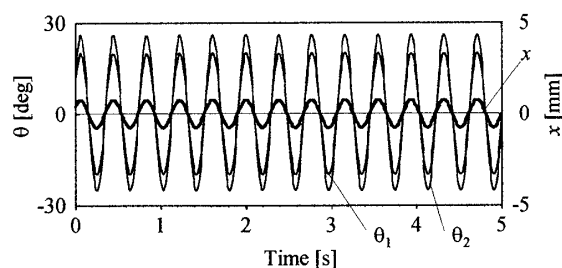
台:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta_p \frac{dx}{dt} + x = \gamma \eta \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 (\sin \theta_i - x \cos \theta_i) - \frac{d^2\theta_i}{dt^2} (\cos \theta_i + x \sin \theta_i) \right\} \dots \dots \dots (1)$$

振動子:

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} + 2\zeta_i \Omega_i \frac{d\theta_i}{dt} + \Omega_i^2 \sin \theta_i = -\Omega_i^2 \frac{d^2x}{dt^2} \cos \theta_i - T_i \cos \theta_i, \quad (i=1 \sim N) \dots \dots \dots (2)$$

ここで、式 (2) の T_i は駆動力であり、角速度が負 ($d\theta/dt < 0$) でかつ角変位 $-14.8 < \theta < 4.4 \text{ deg}$ の範囲

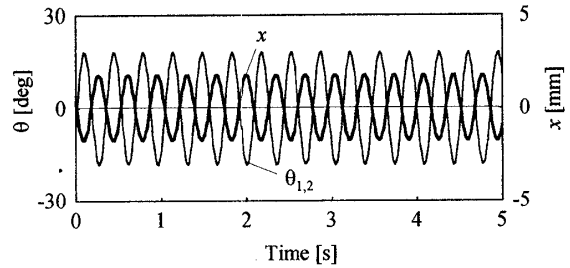
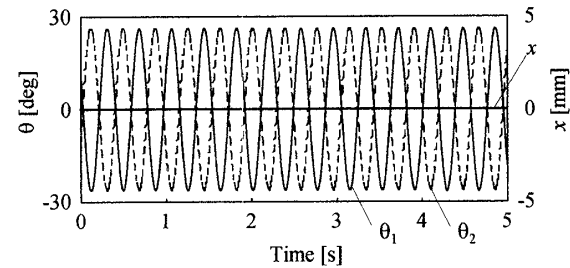
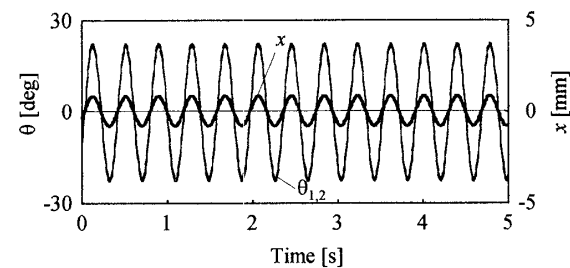
(a) $f_p = 2$ Hz, Type 1(b) $f_p = 3$ Hz, Type 2(c) $f_p = 4$ Hz, Type 1Fig. 3 Experimental results ($N = 2$)

で駆動トルクが加わるものとした。運動方程式 (1) と (2) を数値積分して系の時刻歴応答を調べた。計算に使用した各パラメータの値は以下に示すとおりである。 ($f_p = 2.8$ Hz, 7台のとき)

$$\Omega_i = 0.95, \quad \gamma = 0.040, \quad \eta = 0.533, \quad \zeta_p = 0.0126, \\ \zeta_i = 0.0021 \sim 0.0022, \quad T_i = 0.008 \sim 0.009$$

5. 結果および考察

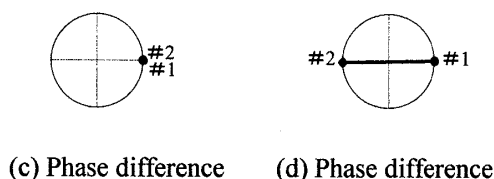
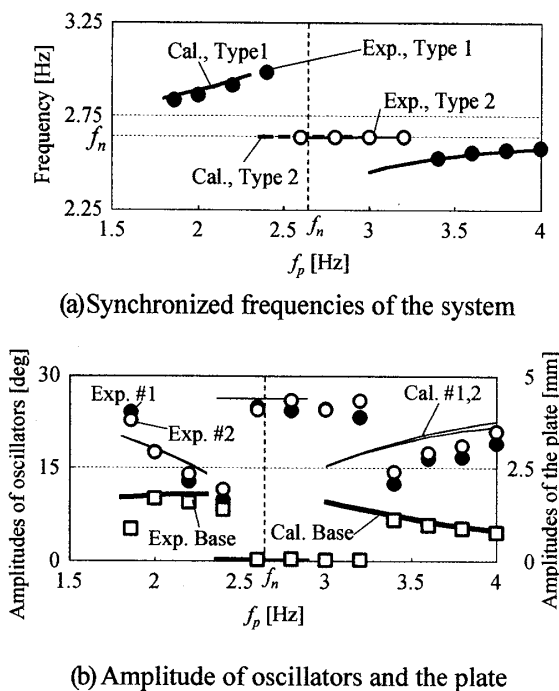
5・1 2台の場合 2台の振動子を台に載せて実験を行った。初期条件として、台を静止させ振動子は初期角度 $\theta = 42$ deg (同位相) で振動させた。図3は振動子の角変位 θ と台の水平方向変位 x を時間に対して示したものである。図3(a)は台の固有振動数 $f_p = 2$ Hzの結果を示したものであり、振動子の振動数は台の固有振動数よりも高い。このとき、初期位相を保

(a) $f_p = 2$ Hz, Type 1(b) $f_p = 2.8$ Hz, Type 2(c) $f_p = 4$ Hz, Type 1Fig. 4 Calculated results ($N = 2$)

持したまま振動が継続し、2台の振動子は10分間位相がずれることなく同位相で振動した。ここでは、このように振動子同士が同位相で振動する場合を以後タイプ1と呼ぶことにする。台と振動子の位相はほぼ逆位相で振動した。

図3(b)は台の固有振動数が3 Hzの場合である。振動子は同じ初期条件の同位相で振動を開始させた。しかし、間もなく振動は乱れ、その後2台の振動子は互いに逆位相となって振動した。このように振動子同士の位相差が約180 degで振動するものを以後タイプ2と呼ぶことにする。また、このとき台の振幅は小さいものとなった。

図3(c)は台の固有振動数が4 Hzの場合であり、初期条件は振子同士は同位相である。振動子の振動数は台の固有振動数よりも低い。このとき、台と2台の振動子も同位相で振動した。振動子が同位相で台が大きく振動しているためこの場合もタイプ1と以後呼ぶ。



Type 1 ($f_p = 2$ Hz) Type 2 ($f_p = 2.8$ Hz)

Fig. 5 Characteristics of coupled vibrations

($N = 2$, $f_n = 2.64$ Hz)

振動子の振幅は、図 3(b)の場合、台はほとんど振動しないため、静止した台の上での振幅とほぼ同じである。しかし、図 3(a), (c)の場合は台が大きく振動する。その結果、加振源である振動子の振幅が小さくなっていると考えられる。

図 4 は実験結果と同じ初期条件での数値計算結果を図 3 と同じように示したものである。台の固有振動数は 2, 2.8, 4 Hz とした。計算結果と実験結果は定性的に一致している。台が大きく振動するタイプ 1 は台の固有振動数と振動子の振動数が少し離れている $f_p = 2, 4$ Hz の場合に起り、振動子は初期条件の同位相を保持したままで振動し続ける。台の振動が小さくなるタイプ 2 は台の固有振動数と振動子の振動数がほぼ等しい場合 ($f_p = 2.8$ Hz) に起った。振動子は初期条件の同位相を保持せず、約 180 deg の逆位相で振動する。

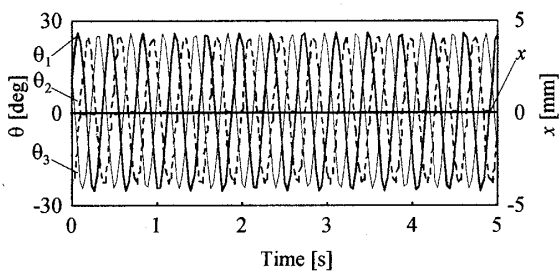
実験結果と数値計算結果の振動数、振幅を台の固有振動数に対してまとめたものが図 5 である。図中の点線 f_n は個々の振動子が駆動されているときの振動数

の平均値を参考までに示してある。初期条件は振動子の角変位を 42 deg の同位相で振動させている。振動は台の固有振動数に対して二つに分かれた。台の振幅が大きいタイプ 1 は、台と振動子の固有振動数が少し離れている場合に起る。しかし、振動子と台の固有振動数がほぼ等しい範囲では、台の振幅は小さいタイプ 2 が起った。

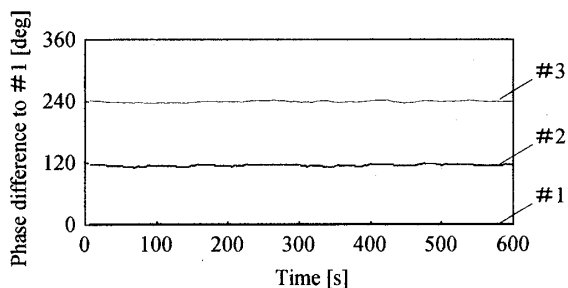
初期条件を逆位相として振動させた場合は、実験を行った 1.8 ~ 4.0 Hz の全ての範囲でタイプ 2 の振動が起り、台が大きく振動するタイプ 1 は起らなかった。このように初期条件の依存性が現れる。初期条件を逆位相とした場合、本実験系では全ての範囲でタイプ 2 が起ったが、数値計算を行い質量比 γ が小さい場合などでは、タイプ 2 が起らなくなる振動数範囲が現れることを確認している。しかし、ここでは上記の初期条件（同位相）で現れた振動について特性を検討する。

大きな振動の起るタイプ 1 の発生範囲について、図 5(b)の振動子の振幅に着目して考える。実験と計算結果ともに、振動子と台の固有振動数が近くなるにつれ、振動子の振幅は小さくなっている。このとき振動子の振幅が 14 ~ 15 deg 辺りでタイプ 1 が起らなくなりタイプ 2 の振動が起るようになっている。これは、 $-14.8 < \theta < 4.4$ deg が振動子の加振範囲であることによると考えられる。振動子の振幅が小さくなり、加振範囲以下になると駆動トルクが減少する。振動子の駆動トルクの減少が振動の乱れとなり、同位相のタイプ 1 から、振幅の減少がほとんどないタイプ 2 が起ったと考えられる。この結果から、タイプ 1 の発生範囲は振動子の加振方法に影響を受けることが考えられる。（例えば本実験の振動子の加振範囲を $-10 < \theta < 5$ deg として数値計算すると、タイプ 1 の振動子の振幅下限値は約 10 deg となる。）しかし、ここでは同位相同期で大振動が起る場合、振動子の振動数と台の固有振動数とが近くなるにつれて振動子の振幅が小さくなることに着目し、振動子の加振方法についてはこれ以上検討はしない。

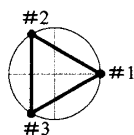
図 5(c)は台の振幅が大きく振動子の位相が同位相のタイプ 1 を模式的に示し、図 5(d)は台の振幅が小さく、振動子の位相が約 180 deg の逆位相で振動するタイプ 2 を模式的に示したものである。振動子 #1 を基準としてタイプ 1 は位相差が約 0 deg、タイプ 2 は位相差が約 180 deg であることを表している。また実線で振動子 #1 と #2 を結んでいるが、これは二つの振動子の振動数がほぼ同じであることを意味している。このように振動子間の位相差を表現して考察を行う。



(a) Displacements



(b) Phase difference

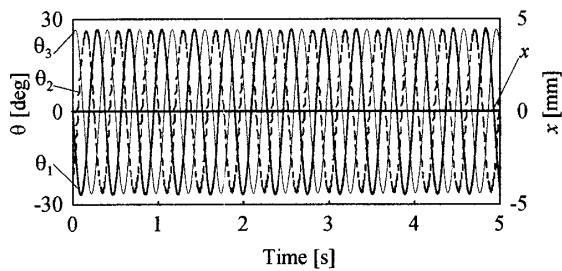


(c) Phase difference, Type 3

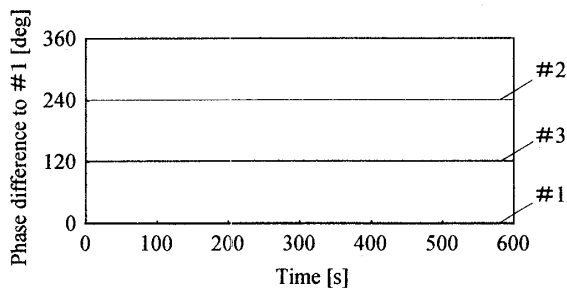
Fig. 6 Experimental results ($N = 3, f_p = 3$ Hz)

5・2 3台の場合 台の固有振動数が振動子の振動数より少し離れている場合 ($f_p = 2, 4$ Hz), 2台の結果と同じで, 3台の振動子は初期位相を保持したタイプ1で振動した. 図6, 7は3台の振動子を台に載せた場合で台の固有振動数と振動子の振動数がほぼ等しいとき (図6, $f_p = 3$; 図7, $f_p = 2.8$ Hz) の結果である. 変位と位相差を時間に対して示している. ここで位相差は振動子#1を基準として0に固定し, 振動子#2と#3の振動子#1に対する位相差を示している. 3台の振動子は同期振動数2.7 Hzとなり, 位相差はそれぞれほぼ120 degを保持して振動した. 図6(c)はこのときの位相差を図5(c)と同じように模式的に示したものである. ここでは, この位相差の振動をタイプ3と呼ぶことにする.

5・3 4台以上の場合 4台以上の場合においても初期条件として同位相で振動を開始した場合, 台と振動子の振動数が少し離れているときは, タイプ1の大きな振動が起った. 図8は, 振動子と台の固有振動数 (実験結果, $f_p = 3$; 計算結果, $f_p = 2.8$ Hz) がほぼ等しいときの結果を示したものである. 図8(a), (b)は図6(b), 7(b)と同じように振動子の位相差を時間



(a) Displacements



(b) Phase difference

Fig. 7 Calculated results ($N = 3, f_p = 2.8$ Hz)

に対して示したものである. 3台までの場合とは異なり, 振動子の位相差が一定値に落ち着くことは無かった. 図(a-1)は100sのときの振動子の位相差を図6(c)のように模式的に表している. この結果より, 全ての振動子の位相差が一定になっているのではないことが分る. この結果を用いて, 時間に対して同じような位相変化をする振動子の組を, 線をつないで表した. 線をつないだ振動子間の振動数の差は0.002 Hz以下のものであり, ほぼ振動数が一致しているとして表した. 完全な同期期ではないが一組として表した振動子同士は, 時間に対して同じように位相を変化させるため, 同期した組合せとみなして考察を進める.

振動子が4台の場合, 全ての振動子の位相差が一定値を保持することはなかった. しかし, 詳細にみると2台が一組になって振動しているようにもみえる. 振動子の組合せはいつも同じではなく, 振動子の組合せが変わることが実験で観察された. このように4台での振動は弱い結合関係を保ちながら, 相手の振動を打消し合うように振動していることが分る.

図8(c), (d)に振動子が5台の結果を示してある. このときの組合せは2台と3台の振動子が一組を構成している. 4台の場合と同じように振動子の組合せは, いつも同じではなく入れ替わりがあった. 図には示していないが, 振動子が6台と7台の場合においても同じような2台と3台が一組になって振動する弱い結合関係がみられた.

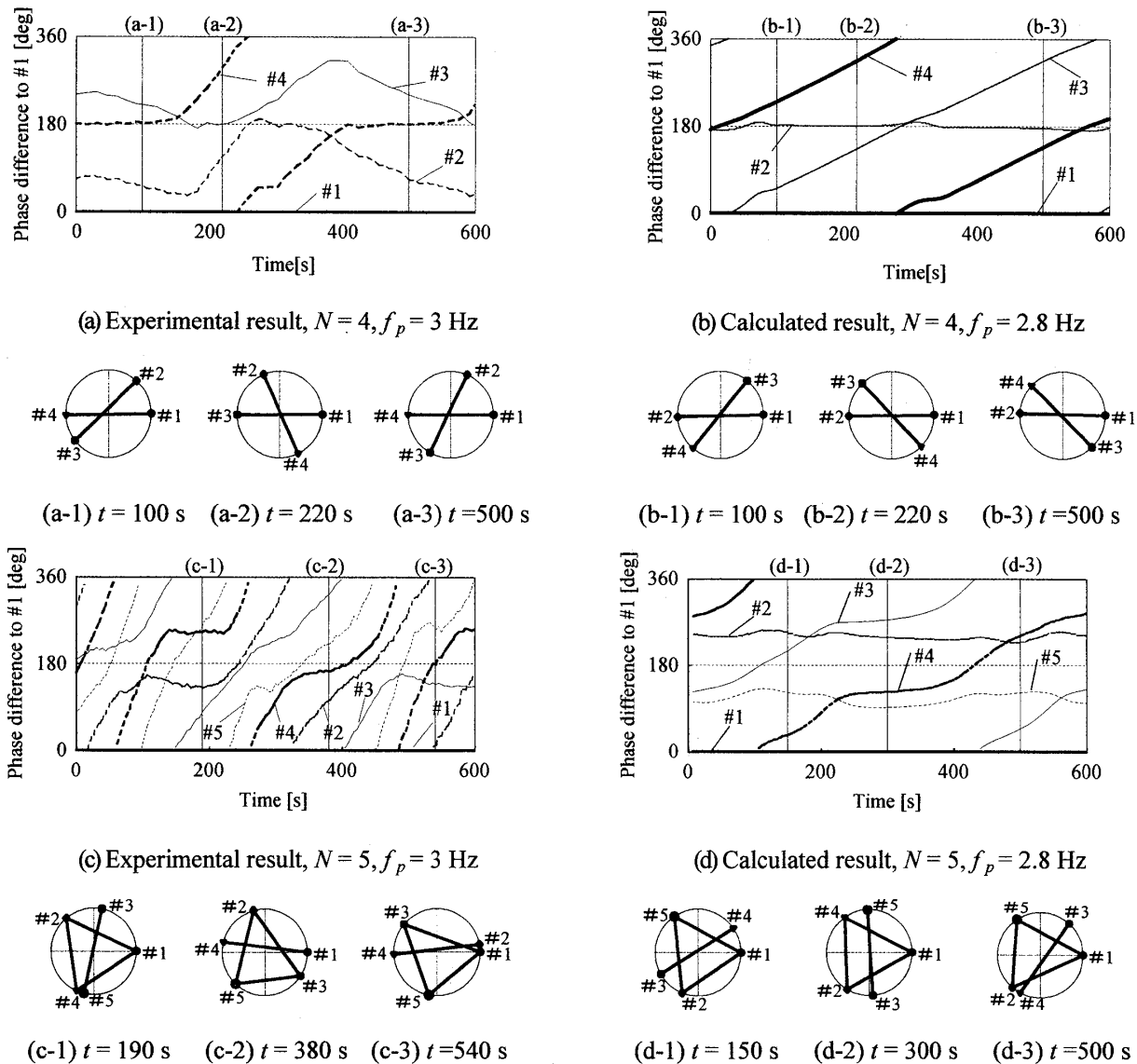


Fig. 8 Phase difference between oscillators

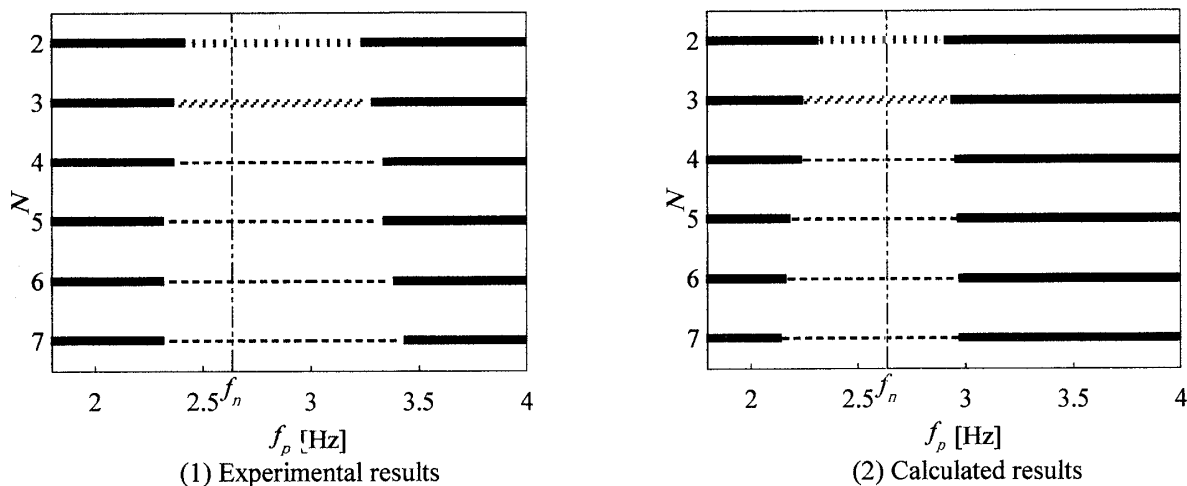
5・4 系の振動 図9は系の振動を振動子の台数 N と台の固有振動数 f_p に対して示したものである。いままでと同じように初期条件は振動子に 42 deg の初期角度を与えて、同位相で振動を開始させた。大きな振動が発生するタイプ1は振動子と台の固有振動数が少し離れている振動数で起っている。しかし、振動子と台の固有振動数がほぼ等しい振動数においては、台が小さく振動し、お互いの振動を打消すような振動となる。

この振幅の小さい振動は、2台では位相差が約 180 deg となるタイプ2、3台では位相差が約 120 deg となるタイプ3となり、振動子の位相は一定値に保持される。4台以上においては位相が一定値に保持されることはなく、振動子は2台もしくは3台の組合せを作る。すなわち、タイプ2とタイプ3を重ね合わせた振

動となる。組合せの振動子は必ずしも固定されておらず、振動子の組合せは入れ替わりがある。

図10は台の最大振幅を振動子の台数 N に対して示したものである。全ての振動子が同位相で振動するタイプ1のとき、台数 N が増えるにしたがい、台の振幅は大きくなるのが分る。振動子と台の固有振動数がほぼ等しい場合には、台の振幅は小さい。

図11は、振動子の台数 $N=5$ の場合で振動子と台の固有振動数がほぼ等しい場合の実験結果であり、台の変位を 10 s 毎に周波数解析した結果を時間と振動数比 f/f_n に対して示したものである。振動子は非同期で振動しているため、台の振動数比の成分の大きさは時間に対して変動している。しかし、振幅そのものは十分に小さい。また、4倍以上の振動数比の成分はほとんど表れていない。



: In-phase synchronization in type 1,
 : Phase locking in type 2,
 : Phase locking in type 3,
 : Non-synchronization in type2 and/or type 3

Fig. 9 Types of vibration

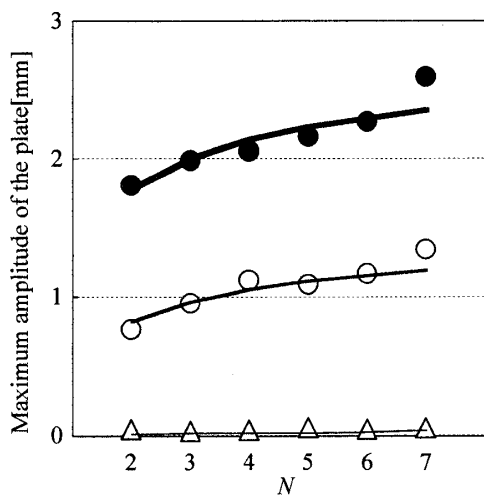


Fig. 10 Maximum amplitudes

(Experimental, ● : $f_p=2.0$ Hz, ○ : $f_p=4.0$ Hz, △ : $f_p=3.0$ Hz; Calculated, : $f_p=2.0$ Hz, : $f_p=4.0$ Hz, : $f_p=2.8$ Hz)

次に、振動子と台の固有振動数がほぼ等しい場合、振動子が互いの振動を打ち消し合うときの台の変位の周波数解析を行った。図12はその周波数解析の結果を示したものである。2台の場合、位相差約180 degの振動となり、振動子1台の振動数に等しい成分が主な振動数比成分となっている。2台で振動を打ち消し合うため小さな振幅であるが、若干の固体差があるため、不釣合いを完全に打ち消し合うことができず、片方の振動子の影響で、1倍の振動数比成分が卓越していると考えられる。

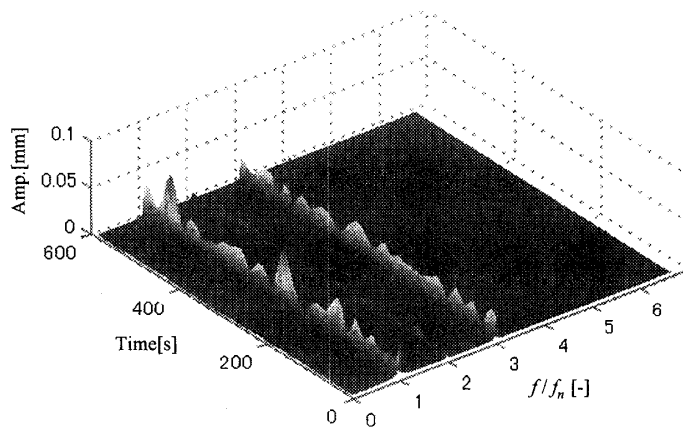


Fig. 11 Observed vibration of the plate ($N=5, f_p=3.0$ Hz)

3台の場合、振動子が約120 degの位相差で振動している。このため、振動子の振動数比の3倍の成分が卓越していると考えられる。

4台以上の場合には2倍と3倍の振動数比成分が含まれている。4倍以上の振動数比成分はほとんど現れない。この振動数比成分からも、2台もしくは3台の振動子が弱い組合せを作り、互いの振動を打ち消し合いながら振動していると考えられる。4台以上では、打ち消し合う振動で同期が起らない理由は以下のように考えられる。2台の場合には約180 degの位相差があることにより互いの振動を打ち消し合いながら振動数を平均化していると考えられ、同様に3台の場合には約120 degの位相差によって互いの振動を打ち消すことが

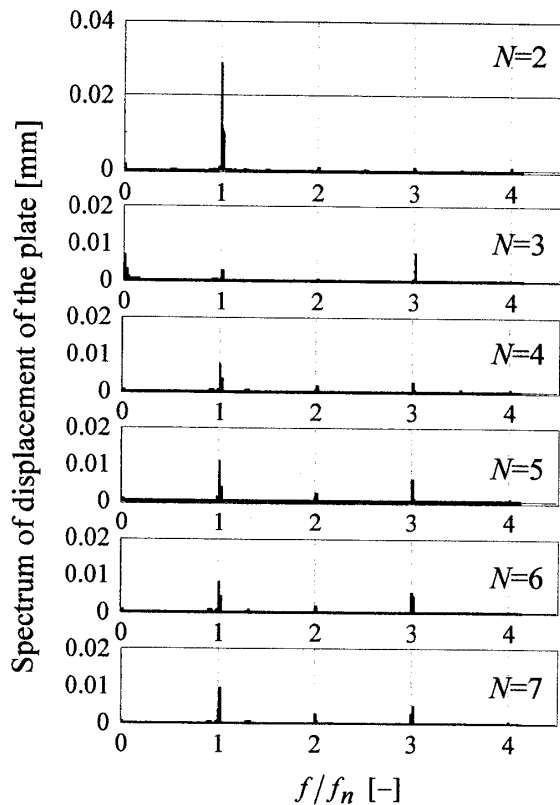


Fig. 12 Frequency-analysis of the observed vibration
(Experimental results, $f_p=3.0$ Hz)

できると考えられる。しかし、4台以上の場合は、互いの振動を打消し合う位相差の組合せが無数にあり、3台までの場合のように一つの組合せだけではなくなる。このようなことから、4台以上では、位相差が一定とならないと考えられる。

6. まとめ

糸で吊られた台の上に、ほぼ特性が同じ振動子を搭載した系で実験と数値計算を行い、以下の結論が得られた。

振動子が同位相で同期すると支持系は大きく振動し、振動子の振幅が減少する。振幅の減少は台の固有振動数と振動子の振動数が近いほど大きくなる。このような同位相同期が起るためには振動子に駆動トルクが十分に入力される必要がある。

一方、同位相同期が起らない場合は、振動子の振幅の変化はほとんどなく、支持系は振幅の小さい振動となる。この振幅の小さい振動では、振動子が2台のとき位相差は約 180 deg となり、3台のときは約 120 deg となる。4台以上のときは位相差は一定値とはならず、2台もしくは3台が組となって振動する。

文 献

- (1) Pikovsky, A., et al., *Synchronization*, (2001), pp.1-7, Cambridge University Press.
- (2) Blehman, I. I., *Synchronization in Science and Technology*, (1988), pp.152-153, ASME Press.
- (3) Sato, Y., et al., Synchronized Phenomena of Oscillators, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers* (in Japanese), *Series C*, Vol.66, No.642(2000), pp.363-369.
- (4) Kondou, T., et al., Self-Synchronized Phenomena Generated in Pendulum-Type Oscillators, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers* (in Japanese), *Series C*, Vol.68, No.676 (2002), pp.3499-3506.
- (5) Bennett, M., et al., Huygens's clocks, *Proceedings of the Royal Society Lond. A*, Vol.458(2002), pp.563-579.
- (6) Fujino, Y., et al., Synchronization of Human Walking Observed During Lateral Vibration of a Congested Pedestrian Bridge, *Earthquake Engineering and Structural dynamics*, Vol.22(1993), pp.741-758.
- (7) Matsuhisa, k., et al., Synchronization of Walking Rhythm by Lateral Vibration of Footbridge, *Preprint of the Japan Society of Mechanical Engineers* (in Japanese), D&D2003 No.03-7(2003), 458, pp.1-6.