

## Husimi distribution and Quantum Section

水崎高浩 東京大学理学部物理

吉永尚孝 埼玉大学教養部

全 卓樹 法政大学教養部

重原孝臣 東京大学大型計算機センター

カオスを示す古典系の古典・量子対応は、K系において Gutzwiller<sup>1)</sup>のトレース公式であるが、可積分系とK系の中間的な系（ソフトカオス系）では有効な方法が見つかっていない。しかしながら、トレース公式が示唆するようにカオス系では無数に存在する周期軌道こそが量子化する際の骨組みを与えているようである。この考えがソフトカオス系にはどう適応できるか調べたい。

量子系から古典系の情報を引き出す方法として Wigner 分布<sup>2)</sup> や Husimi 分布<sup>3)</sup>の方法が知られている。Wigner 分布は負の値も取り得ることから古典的な分布関数と対応させる点で困難があるが、Husimi 分布にはそのようなことがなく、また、高橋<sup>4)</sup>が示したように Husimi 分布は古典的な分布関数との対応が分かりやすく量子古典対応を考える際に便利である。さらに、Heller 達<sup>5)</sup>によってやられてきた Wave-Packet Dynamics, つまり不確定性最小の gaussian wave-packet の時間発展を調べる研究においてもこのような波束の位相・振幅因子は周期軌道およびその近傍の古典的な力学変数によって規定される事がわかっている。このようなアプローチはある意味で Husimi 分布による方法と等価であり、量子系の Husimi 分布による表示によって周期軌道の情報を引き出せることを示唆していると考えられる。

系の可積分性について量子系の波動関数の情報から行われたこれまでの方法をあげると Wave-Packet Dynamics, Wigner 分布による Berry の議論, 波動関数の相関長<sup>6)</sup>, スカー<sup>7)</sup>があげられる。最も成功したのはスカーの議論であるが、数値計算ではっきりと示す事ができるのは幾何学的に簡単なビリヤード系ぐらいしかない。波動関数によって量子古典対応を調べることは、定量的な議論はほとんどされていないし、量子準位統計ではできない系の位相空間との対応がわかるというメリットがあるし、ソフトカオス系も調べることができるので研究を進めていく価値があると考えられる。

そういう立場から我々は、2自由度の非線形な振動子系を用いて古典系の解析には Poincare section を用い、量子系としては、Poincare section の量子論的対応物を以下のように Husimi 分布を使って構成し、その対応を調べた。まず、2自由度系の coherent state を

$$|Z_1, Z_2\rangle = e^{Z_1 c_1^\dagger + Z_2 c_2^\dagger} |0\rangle \quad (1)$$

$$Z_i = \left( \frac{q_i}{b_i} - i b_i p_i \right) / \sqrt{2} \quad (2)$$

$$b_i = \sqrt{\frac{1}{m\omega_i}} \quad (3)$$

を定義する。ここで  $p, q$  は運動量と座標で  $m, \omega$  は質量と角振動数である。この coherent 状態により Husimi 分布  $W_\psi(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2)$  は

$$W_\psi(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2) = \frac{|\langle Z_1, Z_2 | \psi \rangle|^2}{|\langle Z_1, Z_2 | Z_1, Z_2 \rangle|} \quad (4)$$

のように定義される。 $q_1 = 0$  の Quantum section はエネルギー保存から  $p_1 = \sqrt{2m(E_\psi - U)}$  ( $U$  はポテンシャル) とおいた Husimi 分布より  $W_{\psi, QS} = W_\psi(q_2, p_2)$  とした。ハミルトニアンは簡単のためポテンシャルが 4 次の同次式のものにした。同次式にするとエネルギーでスケールするため古典系の Poincare section は適当なエネルギーで 1 つ調べれば良いし、トレース公式等が簡単なるので数値計算の解析には便利である。

次に、いくつかの数値計算の結果を図 1, 2, 3 に示した。図 1 は、古典系の Poincare section と量子準位統計の関係を示した。図中の  $\lambda$  は非線形な相互作用の結合係数である。位相空間のカオスの程度と量子準位統計には密接な相関があることがわかる。図 2 は非線形度の弱い場合のいくつかの固有状態の Quantum section と対応する古典的な周期軌道による Poincare section である。図 3 はさらに非線形度を強くした場合の Quantum section と対応する古典的な周期軌道またはそれに近い軌道による Poincare section である。図 2, 3 より Husimi 分布で定義した Quantum section は Poincare section とよく対応することがわかった。また、固有状態はある周期軌道に強く影響を受けるため、Poincare section 全体は各固有状態による Quantum section の適当な和に対応することもわかった。

最後に、今回の我々の試みの結果は Husimi 分布による Quantum section が有効であることがわかったことである。さらに定量的な議論をするために古典系の周期軌道の安定性 (たとえば、モノドロミー行列など) が対応する固有状態にどう反映するかなどを現在研究中である。

## References

- 1) Gutzwiller MC (1990) Chaos in classical and Quantum Mechanics, Springer-Verlag
- 2) Wigner EP (1932) Phys Rev 40:749
- 3) Husimi K (1940) Proc Phys Math Soc Japan 22:264
- 4) Takahashi (1986) J Phys Soc Japan 55
- 5) Heller EJ (1975) J Chem Phys 62:1544
- 6) Berry MV (1977) J Phys 10:2083
- 7) Heller EJ (1987) Phys Rev A 35:1360

図1.  
Poincare  
Sectionと  
量子準位統計

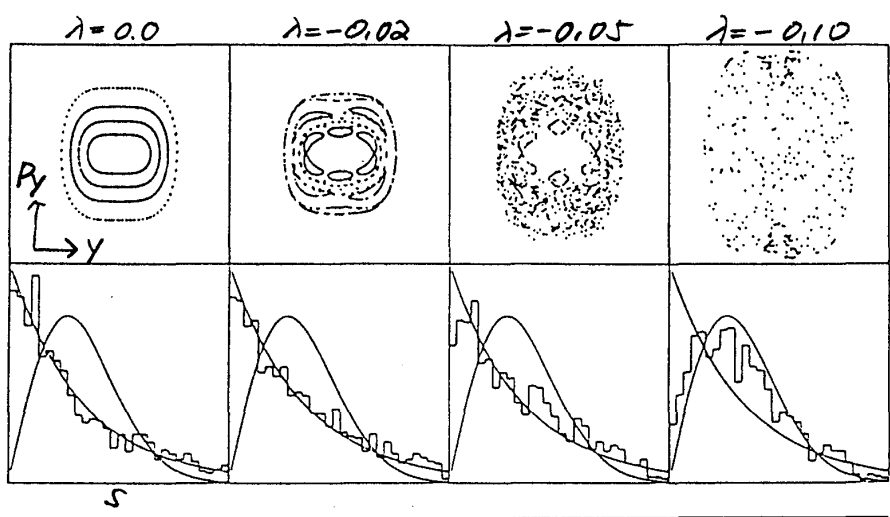


図2.  $\lambda = -0.02$

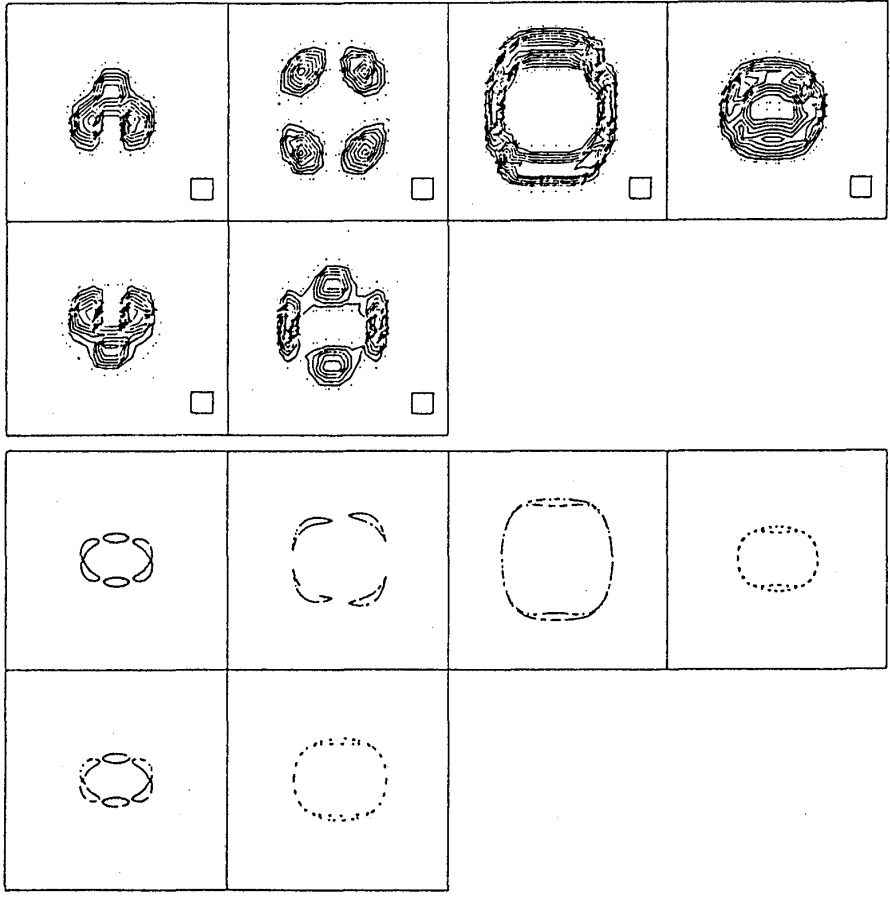


図3.  $\lambda = -0.05$

