

# 相互作用するボソン模型におけるカオスと対称性

埼玉大学教養部 吉永尚孝

法政大学教養部 全卓樹

東京大学大型計算機センター 重原孝臣

東京大学理学部 水崎高浩

## 要約

原子核における最近の我々の研究についてカオスと関連づけて紹介する。以下の項目の順に簡単に説明する。

- 1 原子核でのカオスの研究の歴史
- 2 相互作用するボソン模型
- 3 我々の仕事
- 4 まとめ

### 1 原子核でのカオスの研究の歴史

図1は $^{232}\text{Th}$ に遅い中性子をぶつけたときの全断面積を表している。このとき同じスピンパリティの状態だけが選択的に励起されると考えられる。この図で特徴的なことは、低エネルギー領域に比べてエネルギー密度が $10^6$ も多いということと、細い共鳴の幅からわかるように、共鳴レベルの寿命がかなり長いということである。

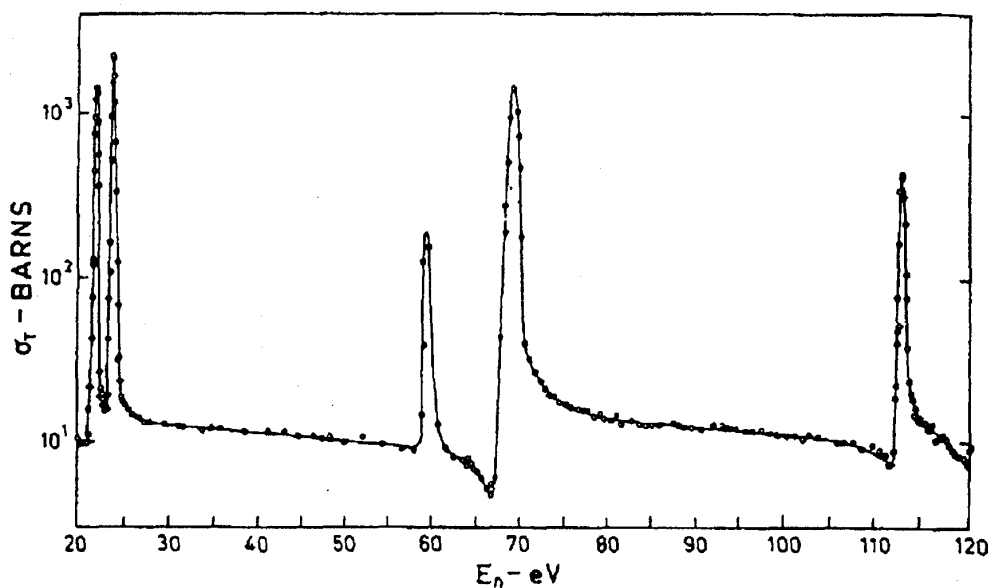


図1  $n + ^{232}\text{Th}$ による全断面積。横軸は中性子の入射エネルギー。

## 研究会報告

このことからNiels Bohrは原子核の複合核模型を提唱した[1]。エネルギー密度が基底状態付近に比べてこれだけ多いと、統計的に扱う必要がある。1958年にWignerは隣接エネルギー単位間隔の統計分布( $P(s)$ )に関して、いわゆるWigner distributionを提唱した[2]。図2は上の実験の223個のエネルギーレベルの分布をプロットしたものであるが、Wigner distributionがよく実験値を再現しているのがわかる。

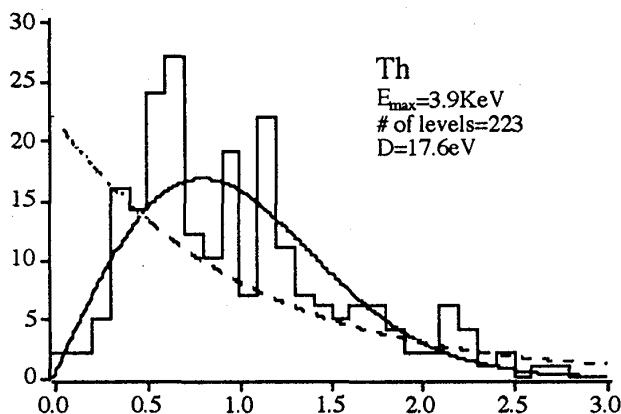


図2  $P(s)$ のグラフ。City diagramは実験値を示し、実線はWinger distribution、破線はPoisson distributionを示す。Bohr and Mottelson, Nuclear Structure, p180, Fig 2-9より

このような実験事実からDysonとMethaは原子核の相互作用が非常に複雑であると考え、それは不可知と見なした。彼らは回転対称性、時間反転対称性等の基本的な対称性だけを考慮し、あとはハミルトニアンが乱雑であると考え、Random matrix Theoryの考えを提唱した[3]。よく知られているように、これによって彼らはGaussian Orthogonal Ensemble (GOE) 行列の場合、Wigner distributionが導かれることを示した。これまでは、一つの高励起原子核の共鳴エネルギーレベルについての統計のはなしであったが、Haq, PandeyとBohigas[4]は多種の原子核のエネルギーレベルを集め、その統計をとった。その結果の1つが図3に示されている。

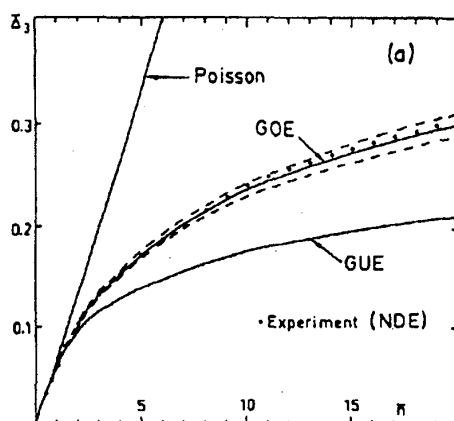


図3 スペクトル硬度( $\Delta_3$ )のプロット。黒丸は1407の共鳴エネルギーレベルからの実験値

ここではスペクトル硬度( $\Delta_3$ )をプロットしている。実験値は黒丸で示され、いろいろな原子核の平均値 (Nuclear Data Ensemble) であり、中性子散乱、陽子散乱、(n, $\gamma$ )反応より1407の共鳴エネルギーレベルを集めている。図でわかるとおり、実験は時間対称性を持つ Random Matrix Theoryの予想(GOE)を支持している。ところでレベル分布がGOEになるのは、これまでは原子核の相互作用が複雑で、まったく乱雑と考えられたためであったが、Bohigas達はシナイのビリヤードのような簡単な系でもGOEが得られることを示した[5]。すなわち2自由度の簡単な系でさえ、GOEを再現するのであるから、原子核の様な複雑の系ではGOEになるのは当然であると考えられる。ところが原子核の実験エネルギーを詳細に見ると、新たな事実がわかったのである。これまでの原子核のエネルギーレベルに関する統計は、中性子散乱等によって得られる比較的高いエネルギーのものであった。Abul-MagdとWeidenmullerは他の方法によって得られている、基底状態付近の低エネルギーレベルの統計を $^{24}\text{Na}$ から $^{244}\text{Am}$ にわたる多種の原子核にわたってとった[6]。特に偶偶核のスピニパリティが $2^+$ ,  $4^+$ であるレベルについて統計をとってみると、 $\Delta_3$ あるいは $P(s)$ についてGOEからのずれが見られ、むしろ古典的に可積分の系が予想するものに近いことがわかった。これを図4に示す。Weidenmuller達は軽い核から重い核までの原子核を寄せ集めた

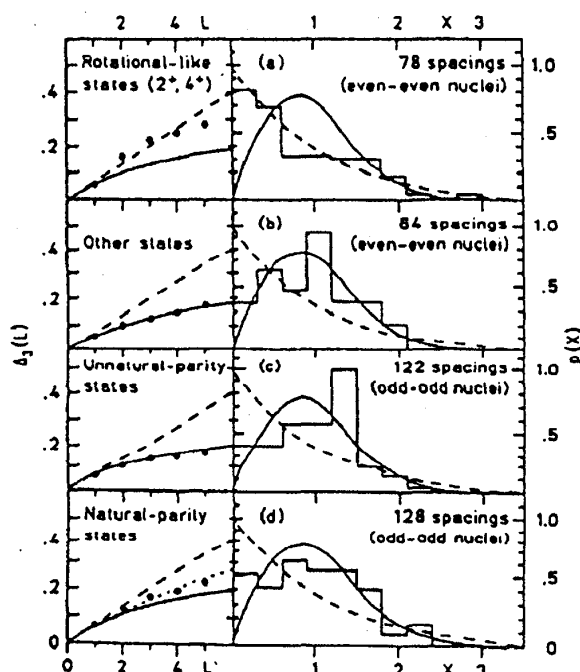


図4  $P(x)$ と $\Delta_3$ のグラフ。 $^{24}\text{Na}$ から $^{244}\text{Am}$ にわたる多種の原子核の実験値より

Shriner達は原子核の質量依存性をみた[7]。表1に見られるように、重い原子核、特にスピニパリティが $2^+$ ,  $4^+$ レベルに対しては、前と同様に $\Delta_3$ あるいは $P(s)$ のGOEからのずれがあることがわかる。ここで $\omega$ はBrody distributionのパラメータで1に近ければWigner分布、0に近ければPoisson分布に近づく。

表1

Nはレベル間隔の数。ωはBrody distributionのパラメータ  
文献[7]より抜粋。

質量数	すべての原子核		偶偶核 2 <sup>+</sup> 4 <sup>+</sup> のみ	
	N	ω	N	ω
0<A≤50	121	0.72±0.16		
50<A≤100	38	0.88±0.41		
100<A≤150	229	0.55±0.11	74	0.65±0.27
150<A≤180	388	0.33±0.07	71	0.13±0.14
180<A≤210	55	0.43±0.17	22	0.16±0.24
230<A	157	0.24±0.11		

この理由は重い原子核では、回転運動などの集団運動が、単一粒子運動に比べて重要になるためにregularな状態が顕在するようになるのが原因と考えられる。これらの現象を説明するために、以下に記述するような相互作用するボソン模型を用いた解析も行なわれている[8]。

## 2 相互作用するボソン模型

原子核は個数が1から260の中性子と陽子からなる多体系であり、お互いに強い相互作用で強く結びついている。原子核の低励起状態を記述するための模型として、原子核の殻模型が有効であることが知られている。ところでこの模型は中性子と陽子が独立な粒子として運動する模型に基づいているが、一方原子核は全体としての回転、振動などの集団運動を示す。図5は<sup>110</sup>Cdのエネルギーレベルを示したものであるが、これらは角運動量2のフォノン（ボソン）が励起した状態と考えるとよく理解できる。すなわち一番低い2<sup>+</sup>の状態は1フォノン状態、その次に高いエネルギーの0<sup>+</sup>,2<sup>+</sup>,4<sup>+</sup>は2フォノン状態、0<sup>+</sup>,2<sup>+</sup>,3<sup>+</sup>,4<sup>+</sup>,6<sup>+</sup>は3フォノン状態と解釈できる。相互作用するボソン模型(IBM)はそのような集団運動を扱うための模型であり、1974年有馬とイアケロによって提唱された[9]。ナイーブな模型では、偶偶核のみを記述することを目的とした。IBMではその基本的な構成要素としてSとD核子対を仮定する。それ以外はひとまず模型の範囲外に置いておく。まず簡単にS核子対について説明する。Mottelsonによると原子核の基底状態は超伝導状態(BCS状態)であり、核の集団運動対はクーバー対のように働く。このクーバー対がS対である。

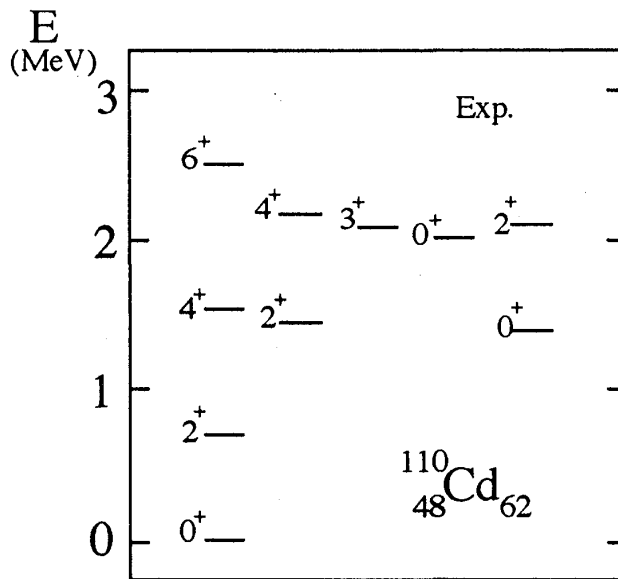
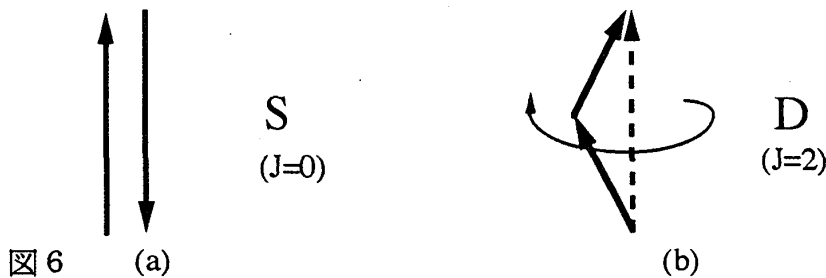


図5 典型的な振動核の例

図6 (a)は2つの核子が角運動量  $J = 0$  に組んで対を作る様子を示している。



式で書くと  $|\text{Ground state}\rangle \sim |\text{BCS}\rangle \sim |S^n\rangle$  のようになる。ここで  $n$  は対の数である。S核子対だけでは原子核の基底状態しか記述できないので、励起状態のためD核子対を導入する。D核子対は  $J = 2$  に組んだ対であり、図6(b)のようになる。このようにしても、フェルミオンはまだ計算が大変なので、つぎのようにボソンに置き換える。

S nucleon pair  $\rightarrow$  s boson ( $J=0$ )

D nucleon pair  $\rightarrow$  d boson ( $J=2$ )

このようなことはSD対の集団性が強いときは十分意味のあることである。今  $a_j^\dagger$  を核子の生成演算子とし、 $j$  を殻模型での単一粒子軌道とすれば、S対の生成演算子は  $S^\dagger = \sum_j \alpha_j (a_j^\dagger a_j^\dagger)^{(0)}$  と書ける。ここで各軌道が同じウエイトでS対に寄与すると仮定すれば、 $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{2}}$  となるので、 $[S^\dagger, S] = 1 - \frac{N}{2\Omega}$  を得る。ここで  $N$  は valence にある粒子数演算子、 $\Omega$  は可能な最大の占有数の半分である。もし  $N/\Omega$  が小さいならば（すなわちある大きい殻に、十分少数の核子しかなければ）、上の式は  $S^\dagger, S$  がボソンの演算子と見なせることを示している。図7は valence にあるフェルミオンがボソンに置き換えられるようすを示している。

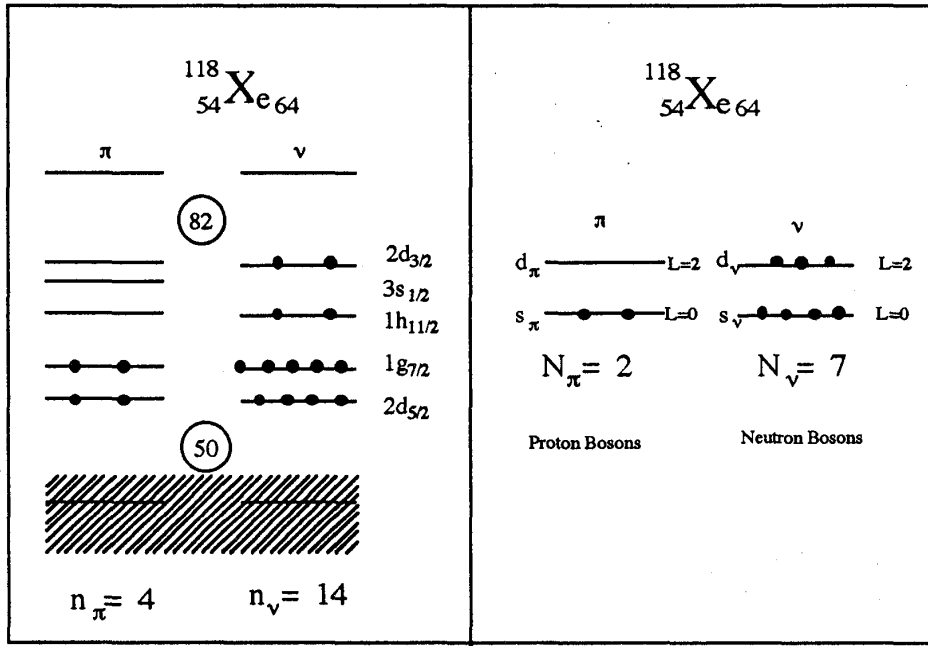


図7 左図は核子が魔法数50と82の間に詰まる様子を示す。  
 右図はフェルミオンの状態をsdボソンの配位で表す様子を示している。

注意すべきことはボソンの数とフェルミオンの対の数とは1対1対応していることである。相互作用するボソン模型ではハミルトニアンは  $H = H(1\text{-body}) + H(2\text{-body})$  とボソンで1体演算子と2体演算子で表される。その1例を図示すると図8のようになる。

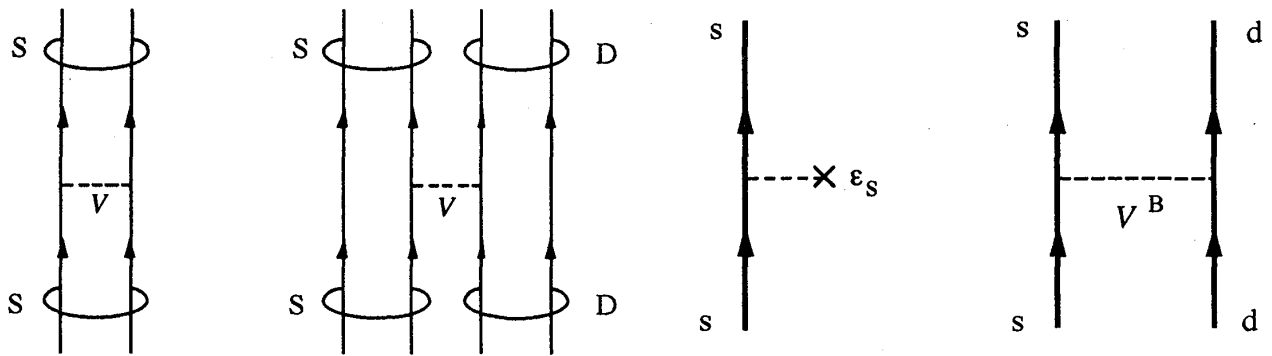


図8 左図はフェルミオンSD対間の相互作用。右図はそれをボソンで表したもの。

この模型はU(6)の内部対称性をもっている。この対称性の生成子は、

- $s^\dagger s$  (1)
- $d_\mu^\dagger d_\nu$  ( $5 \times 5 = 25$ )
- $s^\dagger d_\nu$  (5)
- $d_\mu^\dagger s$  (5)

で表され、その角運動量の群 ( $O(3)$ ) を含む部分群の鎖は

$$U(6) \supset \left\{ \begin{array}{l} U(5) \supset O(5) \\ SU(3) \\ O(6) \supset O(5) \end{array} \right\} \supset O(3) \supset O(2)$$

となる。すなわち 3 つの部分群があり、 $U(5)$  symmetry (非調和振動核)、 $SU(3)$  symmetry (回転核)、 $O(6)$  symmetry ( $\gamma$ 不安定核) である。ここで括弧内に書いたのは対応する幾何学的なモデルでの描像である。実験で 3 つの対称性に属する原子核が見つまっている。この 3 つの極限では群論的に問題を解くことができるので、古典力学的に言えば可積分だということができる。

### 3 我々の仕事

相互作用するボソン模型を用いて量子カオスの研究をする動機は次の点にある。この模型はハミルトニアンのパラメータを変化させることによって、可積分領域から非可積分領域に変化するソフトカオスの例になっている。 $P(s)$  が、可積分の場合あるいはカオスの場合に、どのようになるかは経験的に良く知られている事実だが、それらの極限的な場合以外にはどうなるかはまだ色々と議論がある。この模型は原子核の模型としては現実的で大変成功した模型なので、そのようなことを調べるのは大変面白い。この研究のためには模型の特徴的な面だけを抜き出す必要があるので、我々の用いたハミルトニアンは以下のような簡単なものである。

$$H = (1-\kappa) (\alpha n_d^2 + \beta U \cdot U) - \kappa Q(\chi) \cdot Q(\chi)$$

ここで  $\alpha = \sqrt{2}$ 、 $\beta = \sqrt{3}$  また

$$n_d = (d^\dagger \cdot \tilde{d}) \quad U = [d^\dagger \tilde{d}]^{(3)}$$

$$Q(\chi) = ([s^\dagger \tilde{d}]^{(2)} + [d^\dagger \tilde{s}]^{(2)}) - \frac{\sqrt{7}}{2} \chi [d^\dagger \tilde{d}]^{(2)}$$

ここで  $\kappa$  と  $\chi$  を変化させることにより色々な原子核を扱うことができる。

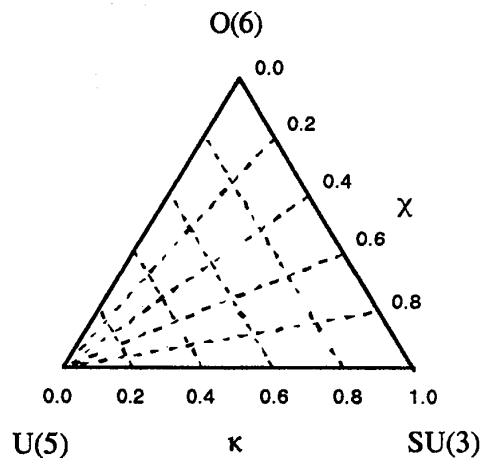


図9  $\kappa$  と  $\chi$  のパラメータ空間

## 研究会報告

また $\kappa$ と $\chi$ の特定の値では、つぎのように可積分の系になる。

$\kappa=1, \chi=1 \rightarrow \text{SU}(3)$  limit (回転核)

$\kappa=0 \rightarrow \text{U}(5)$  limit (非調和振動核)

$\kappa=1, \chi=0 \rightarrow \text{O}(6)$  limit ( $\gamma$ 不安定核)

図9は $\kappa$ と $\chi$ のパラメータ空間を書いたものである。

これらの系のカオス度を測るため、モーメントを見る方法をとる。モーメントは  $M_n = \int_0^\infty ds s^n P(s)$  で定義する。Wigner distributionに対しては

$$M_2 = 1.273, M_3 = 1.909, M_4 = 3.242, \dots,$$

同様に可積分のPoisson distributionに対しては

$$M_2 = 2, M_3 = 6, M_4 = 24, \dots$$

が得られ、これ以外の系ではこの中間の値を取ることが期待される。従って  $M_2$  の値が 1.2から2.0の間どの値を取るかによって系のカオス度を測ることができる。我々の実際の計算では28個のボソンを考え、統計をあげるため角運動量8の状態まで考えた。考えたレベルの数は全部で1254個である。図10に我々の結果を示す。

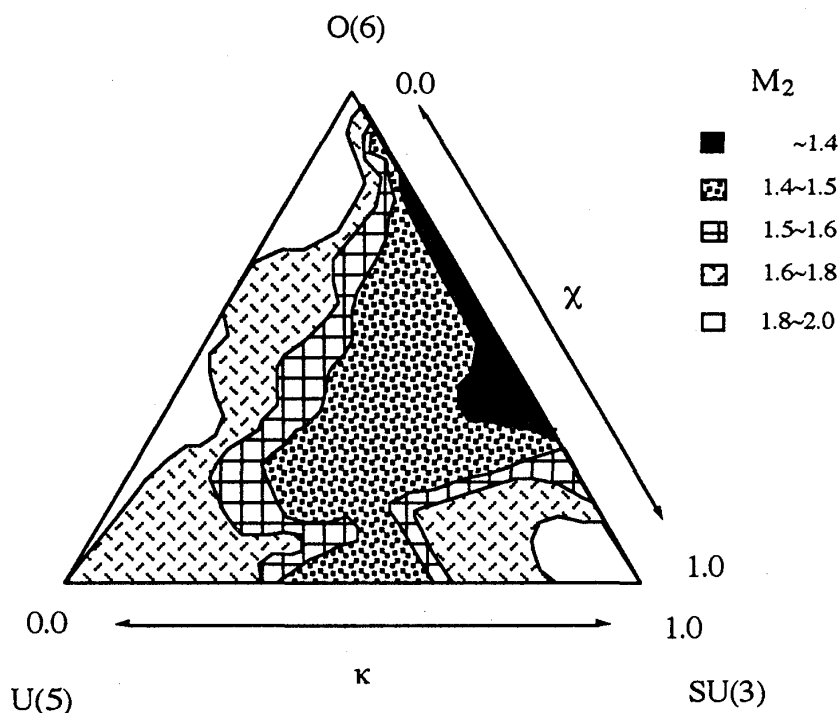


図10 Casten diagramにおける2次のモーメントによるカオス度

SU(3)とO(6)の間に強いカオス的な領域があることがわかる。U(5)とO(6)の間にはポアソンの統計が続くが、これはこれらの群がO(5)という共通の部分群を含むためであり、統計はそういう余分の対称性を見事に抜き出すことがわかる。文献で[11]で指摘されたように、注意してみるとU(5)とSU(3)を結び、少し奥に入ったところにかなり2次のモーメント



が小さい領域があることがわかる。これが何を意味しているかは、いまのところわからない。図11にパラメータを変化させたときの $P(s)$ をプロットした。群論的な極限から離れた領域ではBrody distributionがよく計算値を再現しているのがわかる。

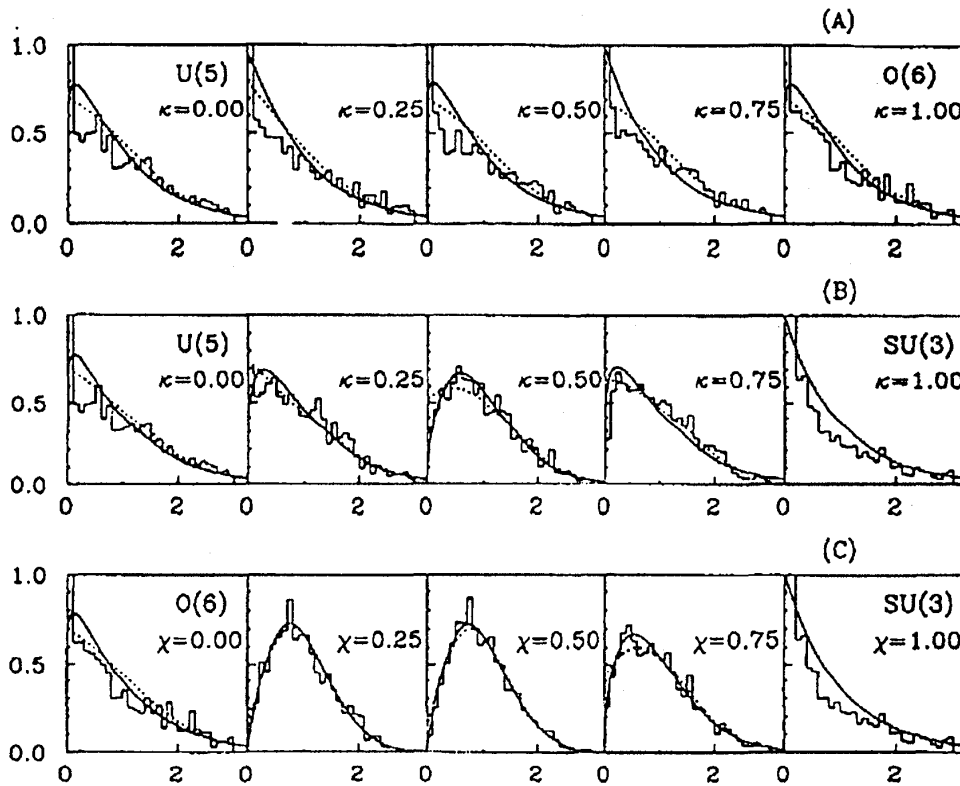


図11  $P(s)$ のプロット。City diagramは計算値、実線はBrody distributionを示す。

我々の仕事の一部はすでに出版されているので、さらに興味のある方はそちらをご覧ください[10]。また同様の仕事が他のグループによっても行なわれている[11]。

#### 4 まとめ

相互作用するポソン模型によるカオスの研究として以下のことがわかった。

- (1) SU(3)とO(6)の間に強いカオス的なスペクトルが見られた。
- (2) U(5)とO(6)の間にはポアソンの統計が続く。
- (3) Brody distributionは可積分の領域を除いて、適当だと考えられる。
- (4) 群論的にはない、新しいregularな領域が存在するように思える。

カオスの研究での一つの驚きは2自由度のような簡単な系でもカオスが生じるということであった。では逆に複雑な系で、カオスの発生が押さえられて可積分的な系が生じるであろうか？ 実験を見ると、ある種の原子核ではこのようなことが起こっているように思われる。いろいろな考え方があがるが、我々は原子核は本来カオスになるべき系であると考え

## 研究会報告

えている。上の研究でわかったように、集団運動のみによる系でさえカオス的になりえるのである。実際の原子核では集団運動と単一粒子運動の相互作用があるから、もっと複雑になるであろう。もし原子核の実験で得られた統計分布がGOEで予言されるものしかなかったら、原子核でのカオスの研究はまったく面白くないものであっただろう。原子核が本来的にカオスであり、どのような場合に可積分性を取り戻すかは、例えば簡単な模型、対相関+4重極相互作用模型で調べてみればよいと考えられ、そのような研究もはじめている。

現在はエネルギーレベルの統計によって系がカオス的かそうでないか判断しているが、将来的には波動関数の情報も引き出していきたいと考えている。例えばE2遷移などを考えたいと思っている。また原子核の巨大共鳴(Giant resonance)の微細構造にフラクタル的な構造があるかも知れないと指摘されており、このような研究は将来”量子カオス”の研究の一つになるかも知れない。

## 参考文献

- [1] N. Bohr, Nature **137**(1936)344
- [2] E.P. Wigner, Ann. Math. **67**(1958)325
- [3] E.J. Dyson and M.L. Mehta, J. Math. Phys. **4**(1963)701
- [4] Haq, Pandey and Bohigas, Phys. Rev. Lett. **48**(1982)1086
- [5] Bohigas, Giannoni and Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**(1984)1
- [6] Abul-Magd and Weidenmuller, Phys. Lett. **162B**(1985)223
- [7] Shriner, Mitchell and von Egidy, Z. Phys. **A338**(1991)309
- [8] V. Paar and D. Vorkapic, Phys. Lett. **B205**(1988) 7; Phys. Rev. **C41**(1990) 2397
- [9] A. Arima and F. Iachello, *The interacting boson model*  
(Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987)
- [10] T. Mizusaki, N. Yoshinaga, T. Shigehara, T. Cheon, Phys. Lett. **B269**(1991)6
- [11] Y. Alhassid, A. Novoselsky and N. Whelan, Phys. Rev. Lett. **65**(1990) 2971  
Y. Alhassid and N. Whelan, Phys. Rev. Lett. **67**(1991)816