

土の構造とメカニクス—ミクロからマクロへ—

5. 地盤力学におけるマイクロメカニクスとマクロメカニクスの関係 (その1)

小田 匡 寛 (おだ まさのぶ)

埼玉大学教授 工学部建設工学科地圏システム講座

5.1 地盤力学におけるミクロとマクロの間

5.1.1 はじめに

土は不連続な粒子から構成されている。この疑いのない事実にもかかわらず、土の力学は普通その連続性を前提に構築され、多くの成功を収めてきた。土の弾・粘・塑性理論の成功はその好例であろう。しかしその成功にもかかわらず、土の研究者が連続体としてのアプローチにいつも満足していたわけではない。「土は粒子の集まりである」との素朴な認識に立って、土の特徴的な性質（例えば、せん断に伴うダイレイタンス）を粒子論的な視点から説明する試みは、過去何度も繰り返されて来た^{1),2)}、飽くことの無い人間の好奇心に支えられて、今後もまた繰り返されることであろう³⁾。また、コンピューターを使った数値シミュレーション法の普及⁴⁾や、均質化法 (homogenization) 等の連続体理論⁵⁾にも刺激されながら、土の粒子性やその微視的構造を強く意識した研究は、今後ますます加速して行くものと予想される。

本論は、ミクロ (粒子論的) とマクロ (連続体的) との間 (はざま) にスポットを当て、研究の現状の一端を紹介しようとするものである。しかしこの分野を総括して述べることは、現在の筆者には荷が重過ぎる。幸い、粒子性を加味した連続体理論には、Mühlhaus⁶⁾による優れた解説があり、また均質化法は、本講座の別の節で解説されるはずである。文献を参照することにより、不足を補っていただければ幸いである。

5.1.2 Newland と Allely の研究

土を球体の集まりと考えてその力学特性を議論した研究は、過去に遡っても決して少なくない^{1),2)}。しかしそれらの興味は弾性波速度や微小変形の問題に限られていた。せん断破壊やそれに伴うダイレイタンスのように、大きな変形を受ける土を粒子論的視点から考察した研究は、Newland と Allely⁷⁾ と Rowe⁸⁾ によって始められ、また日本でも松岡⁹⁾らの研究に引き継がれ、今日に至っている。特に Newland と Allely の研究は、ダイレイタンスとせん断強度との不可分な関係を鮮やかに説明していて、今なお説得力を持つとして多くの研究者に受け入れられている。彼らの議論の進め方は、粒子論的研究を理解する上で参考となるので、ここで多少詳しく解説しておく。

せん断応力 τ を受けて破壊する粒子集合体を考えよう (図-5.1(a))。巨視的なせん断変形は微視的な粒子接点でのすべり変位によって起こると考えると、同図(b)の理想化が可能である。この場合、接点での微視的なすべり面の方向は、せん断応力が負荷される方向 (巨視的なすべり面の方向) と必ずしも一致しない。接点でのすべりに伴って乗り上げや落ち込みが生じ、局所的な体積膨張や圧縮が起こっていると考えられる。今、 k 番目の粒子間のすべり面は、巨視的なすべり面と角度 $\theta^{(k)}$ をなし、またその巨視的なすべり面へ $s^{(k)}$ の投影面積をもっているとする (図-5.1(c))。せん断応力 τ と垂直応力 σ_n が $\theta^{(k)}$ とは無関係に様に作用すると考えれば、粒子間力 $f_n^{(k)}, f_t^{(k)}$ (図-5.1(c)参照) は、力の釣合いから次式で求まる。

$$\begin{aligned} f_n^{(k)} &= \tau s^{(k)} \sin \theta^{(k)} + \sigma_n s^{(k)} \cos \theta^{(k)} \\ f_t^{(k)} &= \tau s^{(k)} \cos \theta^{(k)} - \sigma_n s^{(k)} \sin \theta^{(k)} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (1)$$

接点における固体摩擦角を ϕ_μ とすれば、摩擦則から次式が得られる。

$$\frac{f_t^{(k)}}{f_n^{(k)}} = \frac{\tau s^{(k)} \cos \theta^{(k)} - \sigma_n s^{(k)} \sin \theta^{(k)}}{\tau s^{(k)} \sin \theta^{(k)} + \sigma_n s^{(k)} \cos \theta^{(k)}} = \tan \phi_\mu \quad \dots \dots \dots (2)$$

式(2)は更に次のように書き改められる。

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{(\tan \phi_\mu + \tan \theta^{(k)})}{1 - \tan \phi_\mu \tan \theta^{(k)}} = \tan (\phi_\mu + \theta^{(k)}) \quad \dots \dots \dots (3)$$

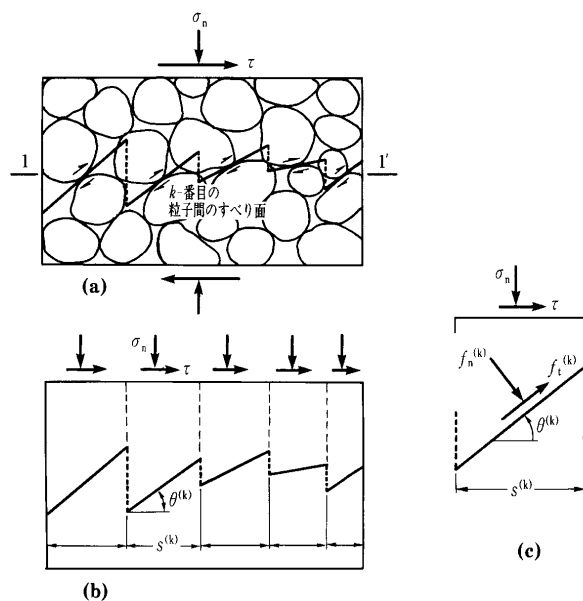


図-5.1 土のせん断モデル⁷⁾

講 座

$\theta^{(k)}$ は微視的なすべり毎に異なるが、簡単のために、 $\theta^{(k)}$ をその平均値 $\bar{\theta}$ で置き換えれば、式(3)は、

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \tan(\phi_\mu + \bar{\theta}) \equiv \tan \phi \dots\dots\dots(4)$$

と書ける。 ϕ は土の内部摩擦角である。

また、 k 番目の粒子間すべりは、 dk の水平変位と dy の鉛直変位（膨張）を伴う。巨視的すべり面が厚さ t 当たり一つあるとすれば、せん断ひずみ増分 dy は dx/t に、また体積ひずみ増分 $d\varepsilon_v$ （圧縮を正）は $-dy/t$ に等しい。その比を取れば、次式を得る。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\varepsilon_v}{dy} = \tan \theta^{(k)} \equiv \tan \bar{\theta} \dots\dots\dots(5)$$

式(5)の関係を式(3)に用いれば、次式を得る。

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{\tan \phi_\mu - \frac{d\varepsilon_v}{dy}}{1 + \frac{d\varepsilon_v}{dy} \tan \phi_\mu} \dots\dots\dots(6)$$

(ただし原論文では、実験結果との整合性を図るために、粒子間摩擦角 ϕ_μ は残留状態における応力比から求まる摩擦角 ϕ_f に置き換えられている)。式(4)と(6)の結果は、次のように要約できる。1)土の内部摩擦角 ϕ は粒子間摩擦角 ϕ_μ のみならず、土の微視的構造 $\bar{\theta}$ （同じことであるが、塑性ひずみ増分比 $-d\varepsilon_v/dy$ ）に依存し、また、2)せん断抵抗を表す応力比 τ/σ_n は、微視的構造を仲立ちとして、塑性ひずみ増分比 $-d\varepsilon_v/dy$ に関連づけられる。

Newland らの優れた洞察とその結果は、土の力学の歴史の中でも特に傑出していて、多くの研究者を魅了してきた。事実、この視点に立つ研究は、更に松岡らによって拡張・一般化され、SMP モデルへと発展した¹⁰⁾。しかしその一方で、図-5.1のせん断モデルは、過度な単純化の結果、実現象とかけ離れているとの批判もある。図のような粒子間すべりはむしろ脇役であり、特にせん断帯の中において粒子回転が極めて重要な働きをすとの実験事実がある¹¹⁾。

5.1.3 微視的構造のテンソルによる定量化

土のせん断を粒子論的視点から論じようとする、まず土粒子が作る幾何学的配列（粒子構造、あるいは単に構造と呼ぶ）と向き合わねばならず、それをどのように捉え、表現するかは、研究の成否を左右する関心事である。すでに述べた Newland らの研究では、微視的すべり面の平均的傾き $\bar{\theta}$ が粒子構造を代表していた。本節では、より一般性の高い構造指標として構造テンソルを取り上げ、その定義と土の力学へのかかわりについて解説する。

間隙比（あるいは間隙率）は構成粒子の粗密を量的に表していて、その重要性に疑問の余地は無い。しかし、このようなスカラー量だけで、構造の広範な概念を表現し尽くせないことは、粒子の長軸や接平面に方向性が存在することを考えれば、容易に納得できる（構造の定義は、本講座¹²⁾を参照のこと）。

粒子の方向はその長軸に平行な単位ベクトルで、また接平面の方向は接平面に立てた法線（単位）ベクトルで

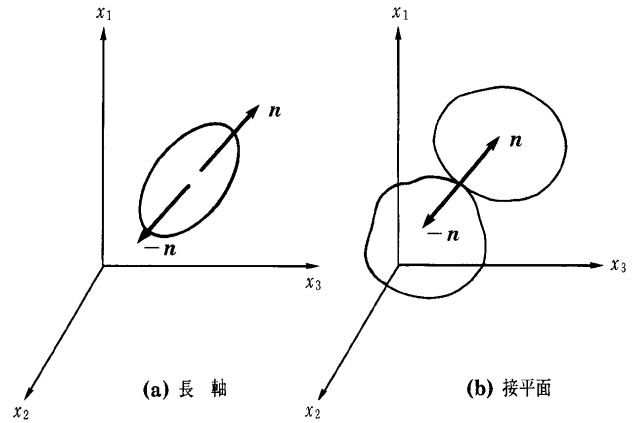


図-5.2 ベクトル n

表せばよく、ここでは便宜上、これらのベクトルを n で総称する。ここで一つの問題は、長軸や接平面の方向に正・負を区別できない点である。この問題は、例えば、粒子の長軸方向に二つの単位ベクトル n と $-n$ を貼り付けることで解決できる（図-5.2）。したがって体積 V 中に M 個の粒子があれば、長軸方向を表す単位ベクトルは $2M$ 個存在することとなる（今後、 n と $-n$ を含めて単に n と記すことにする）。次の問題は、 n の集合を特徴付ける構造指標として何を選択するか、である。最も単純な指標として、その平均値が考えられる。しかし定義から明らかなように、単純な平均値は恒等的に 0 ベクトルとなり、全く意味をなさない。そこで次の選択肢として、ダイアド $n \otimes n$ の平均が考えられる。すると恒等的には零ではない二階のテンソル A （構造テンソルと呼ぶ）が $A = (1/2M) \sum n \otimes n$ と定義でき、恒等的に零ではない次の成分を持っている¹³⁾。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ \text{Sym.} & & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2M} \begin{pmatrix} \sum n_1^{(k)} n_1^{(k)} & \sum n_1^{(k)} n_2^{(k)} & \sum n_1^{(k)} n_3^{(k)} \\ & \sum n_2^{(k)} n_2^{(k)} & \sum n_2^{(k)} n_3^{(k)} \\ & & \sum n_3^{(k)} n_3^{(k)} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

ここで上付きの添え字 (k) は、 k 番目の単位ベクトルを表す。 $n_i^{(k)}$ は、単位ベクトル $n^{(k)}$ の座標軸 x_i ($i=1, 2, 3$) への投影成分であり、 $n^{(k)}$ と座標軸 x_i とのなす角の余弦に等しい。容易に確かめられるように、 A のトレース $A_{ii} (= A_{11} + A_{22} + A_{33})$ は恒等的に 1 となる。また構造テンソルは、応力テンソルと同じように、 $A_{ij} = A_{ji}$ の対称性を示す。したがって A には、直行する 3 本の主軸と、主軸方向に三つの主値 (A_1, A_2, A_3) とが存在することになる。この主軸は構造異方性の主軸であり、また主値の比は異方性の強さの指標と見なしてよい。

$2M$ が十分大きい数であることに注意して、式(7)の総和形式は、確率密度関数 $E(n)$ を使ってしばしば次の積分形式で置き換えられる。

$$A_{ij} = \int_{\Omega} n_i n_j E(n) d\Omega \dots\dots\dots(8)$$

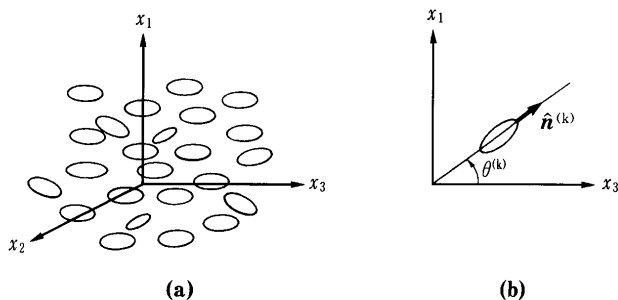


図-5.3 二次元断面上の見かけの長軸方向 \hat{n}

\mathbf{n} は常に $-\mathbf{n}$ を伴うので、 $E(\mathbf{n}) = E(-\mathbf{n})$ が成立しなければならない。 Ω は全立体角の 4π に等しい。 $d\Omega$ は微小立体角であり、 $E(\mathbf{n})d\Omega$ は微小立体角中にあるベクトル \mathbf{n} の割合 (確率) にほかならない。

次に、粒子の長軸を単位ベクトル \mathbf{n} に選んで、2階の構造テンソル \mathbf{A} がどのように決められかを考えてみよう¹⁴⁾。

土粒子の長軸方向を三次元的に決定することは、それほど容易なことではない。そこで便法として、二次元断面上での見かけの長軸方向から求める方法を紹介しよう (図-5.3)。図中、基準座標 x_1 は鉛直上向きであり、また x_2, x_3 は水平面内にある。 x_1 と x_3 を含む鉛直断面で切断し、その切断面上で \hat{M} 個の粒子を無作為に抽出し、各粒子について見かけの長軸 $\hat{n}^{(k)}$ と x_3 とのなす角 $\theta^{(k)}$ を測る。すると、 $(\hat{n}_1^{(k)}, \hat{n}_3^{(k)}) = (\sin \theta^{(k)}, \cos \theta^{(k)})$ に注意すれば、二次元の構造テンソル $\mathbf{A}^{(2)}$ の成分は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{13}^{(2)} \\ A_{31}^{(2)} & A_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\hat{M}} \begin{pmatrix} \sum \sin^2 \theta^{(k)} & \sum \sin \theta^{(k)} \cos \theta^{(k)} \\ \sum \sin \theta^{(k)} \cos \theta^{(k)} & \sum \cos^2 \theta^{(k)} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

またその構造テンソル $\mathbf{A}^{(2)}$ の主値 ($A_1^{(1)}, A_3^{(2)}$) と主方向 (θ_1, θ_3) は、それぞれ次式で計算される。

$$\begin{cases} A_1^{(1)} \\ A_3^{(2)} \end{cases} = \frac{1}{2} (A_{11}^{(2)} + A_{33}^{(2)}) \pm \left[\frac{1}{4} (A_{11}^{(2)} - A_{33}^{(2)})^2 + (A_{13}^{(2)})^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{2} (1 \pm \Delta) \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{cases} \theta_1 \\ \theta_3 \end{cases} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2A_{13}^{(2)}}{A_{33}^{(2)} - A_{11}^{(2)}} \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 Δ は粒子の配列強度を示し、次式で定義される¹⁵⁾。

$$\Delta = \frac{1}{2\hat{M}} \left[\left(\sum_{k=1}^{2\hat{M}} \cos 2\theta^{(k)} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{2\hat{M}} \sin 2\theta^{(k)} \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

$\Delta = 1$ は完全な定方向配列を、また $\Delta = 0$ は方向性の無いランダム配列を意味しているが、具体的な値は土の堆積方法や土粒子形状によって決まる¹⁴⁾。

土粒子の長軸は、重力の影響で水平面内に並ぶ傾向を

示す。このために、粒子構造は鉛直軸 x_1 を回転対称軸とする対称性を示す。このことを考慮して、二次元のテンソル $\mathbf{A}^{(2)}$ から三次元のテンソル \mathbf{A} を求めてみよう。この場合、図-5.3に示す座標軸 $x_i (i=1, 2, 3)$ は構造主軸となり、主値には $A_1 \leq A_2 = A_3, A_1 + 2A_3 = 1$ などの関係が成立する。また主値の比で定義される異方性の指標は、二次元と三次元で変わらないと考えられるので、 $A_1^{(2)}/A_3^{(2)} = A_1/A_3$ の比例関係を想定できる。これらを考慮すれば、三次元の構造テンソルは先に定義した Δ を使って次のように書ける。

$$A_{ij} = \frac{1}{3+\Delta} \begin{pmatrix} 1-\Delta & 0 & 0 \\ & 1+\Delta & 0 \\ \text{sym.} & & 1+\Delta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

この節を終えるにあたり、次の3点を注意しておきたい。

1) 既に明らかなように、2階の構造テンソル A_{ij} は \mathbf{n} の方向によって一義的に決まる。しかしその逆は成り立たない。もっとも二つの試料が同一の構造テンソルを持てば、 \mathbf{n} の方向分布は少なくとも第一近似で一致しているとしてよい。 \mathbf{n} の方向分布の詳細を記述するには、次に定義する高階のテンソルが必要である¹⁶⁾。

$$A_{i_1 \dots i_k} = \int_{\Omega} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_k} E(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \dots\dots\dots (14)$$

2) 構造要素の方向は、一律に単位ベクトル \mathbf{n} で表された。しかしより一般的には、大きさの異なるベクトルの集合と見なさねばならない場合も多い。また単位体積当たりのベクトル数が重要な意味を持つことも多い。岩盤中の地質不連続面 (クラックと呼ぶ) を例にすれば、このことは容易に理解されよう。すなわちクラックの集合は、方向、大きさだけでなくその密度によって記述しなければならない。このような場合、式(8)に代わって、次の無次元のテンソル (クラックテンソルと呼ぶ) が構造指標として有効である¹⁷⁾。

$$F_{ij} = \frac{1}{4} \pi \rho \int_0^\infty \int_{\Omega} r^3 n_i n_j E(\mathbf{n}, r) dr d\Omega \dots\dots\dots (15)$$

ρ は単位体積当たりのクラック数 (クラック密度)、 r はクラックの寸法、 n_i はクラックに立てた法線 (単位) ベクトルの軸 x_i への成分である。

3) 構造テンソルが土の観察からいかに決定できるか? この問いに答えられなければ、構造テンソルを導入するメリットはほとんど失われる。本節では、式(13)を一例として示すに留めるが、近年幸い、ステオロジー (幾何統計学) と画像解析とを組み合わせた土粒子構造に関する研究が盛んであり、状況は大いに改善されている^{18), 19)}。

5.1.4 構造テンソルを使いたいくつかの試み

構造テンソルは、土の粗密に次いで重要な構造指標であり、土の力学 (特に異方的挙動) に深くかかわっていると考えられる。純粹に粒子論的考察のみから土の力学を論ずるには、現状では大きな困難を克服しなければならない²⁰⁾。そこで、ミクロとマクロをつなぐ橋渡しとして、構造テンソルを利用する道を探ってみよう。利用

講 座

する道具立てはマクロ力学そのものにほかならない。しかし構造テンソルをマクロ力学に導入できれば、顕微鏡を使った観察結果を土の力学特性の評価に活かすなどの利用が可能となると期待される。

(1) 土の強度異方性¹⁴⁾

土の等方性が仮定できれば、土の破壊条件は、三つの応力の不変量 (I_1, J_2, J_3) を使って一般的に書かれる。一例として Drucker と Prager²¹⁾ の破壊 (降伏) 条件式は、次式で与えられる。

$$f = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - c = 0 \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 S_{ij} は $S_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{kk}/3)\delta_{ij}$ で定義され、偏差応力テンソルと呼ばれる (今後、下付きの添え字が一つの項に2度現れれば、1から3の総和を取るものと約束する。例えば、 $\sigma_{ij}n_j = \sigma_{1i}n_1 + \sigma_{2i}n_2 + \sigma_{3i}n_3$ である。また、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号で、 $i=j$ の時、 $\delta_{ij}=1$ となり、 $i \neq j$ の時、 $\delta_{ij}=0$ となる)。既に多くの実験事実によって明らかなように²²⁾、土は初期構造の異方性によって、その強度にも顕著な方向依存性が認められる。そこで、土の構造異方性の効果を考慮できるように、式(16)を次式のように一般化する。

$$f = \sqrt{J_2} - \alpha \bar{I}_1 - c = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$\bar{I}_1 = B_{ij} \sigma_{ji}$$

$$\bar{J}_2 = B_{ijkl} S_{ij} S_{kl} \dots\dots\dots (19)$$

ここで B_{ij} と B_{ijkl} は、それぞれ土の微視的構造に依存する2階、4階のテンソルである。

土の強度異方性は、粒子の長軸が卓越的に配列することによる構造異方性に起因すると考えられている¹⁴⁾。この場合の微視的構造特性は、したがって粒子の長軸方向を単位ベクトル \mathbf{n} とする式(8)の構造テンソル A_{ij} で表せる。すると、 B_{ij} と B_{ijkl} は一般性を失うことなく次式で与えられる²³⁾。

$$B_{ij} = a_1 \delta_{ij} + a_2 A_{ij} + a_3 A_{ik} A_{kj} \dots\dots\dots (20)$$

$$B_{ijkl} = b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 (A_{ij} \delta_{kl} + A_{kl} \delta_{ij})$$

$$+ b_3 (\delta_{ij} A_{km} A_{ml} + \delta_{kl} A_{im} A_{mj}) + b_4 A_{ij} A_{kl}$$

$$+ b_5 (A_{ij} A_{km} A_{ml} + A_{im} A_{mj} A_{kl}) + b_6 A_{im} A_{mj} A_{kn} A_{nl}$$

$$+ b_7 (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{kj})$$

$$+ b_8 (A_{ik} \delta_{ij} + A_{kj} \delta_{ii} + A_{ii} \delta_{kj} + A_{ii} \delta_{ki})$$

$$+ b_9 (A_{im} A_{mk} \delta_{li} + A_{km} A_{mj} \delta_{li} + A_{im} A_{ml} \delta_{kj}$$

$$+ A_{lm} A_{mj} \delta_{ik}) \dots\dots\dots (21)$$

係数 $a_i (i=1, 2, 3)$ と $b_i (i=1, 2, \dots, 9)$ は、間隙比 e のスカラー量と、テンソル A_{ij} の不変量とに依存する定数である。第1近似としてテンソル A_{ij} の一次の項までを採用し、かつ $\delta_{ij} S_{ij} = 0$ 等の関係に注意すれば、式(19)の不変量 \bar{I}_1 と \bar{J}_2 は次式となる。

$$\bar{I}_1 = (a_1 \delta_{ij} + a_2 A_{ij}) \sigma_{ji}$$

$$\bar{J}_2 = (2b_7 \delta_{ik} \delta_{jl} + 4b_8 A_{ik} \delta_{ij}) S_{ij} S_{kl} \dots\dots\dots (22)$$

もし構造が等方であれば (すなわち、 $A_{ij} = \delta_{ij}/3$)、式(18)の破壊条件式は、

$$f = \left[\left(2b_7 + \frac{4b_8}{3} \right) S_{ij} S_{kl} \right]^{1/2}$$

$$- \alpha \left(a_1 + \frac{a_2}{3} \right) \sigma_{kk} - c = 0 \dots\dots\dots (23)$$

となるが、当然、式(16)と一致しなければならないので、係数には次の等式が成立する。

$$2b_7 + \frac{4b_8}{3} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 + \frac{a_2}{3} = 1 \dots\dots\dots (24)$$

すなわち上式を満足する四つの係数を含む式(18)によって、砂の強度異方性が表せたことになる。実験結果を検討した結果によれば、砂の強度異方性は、式(13)の A_{ij} を式(22)に用いることによって表せる¹⁴⁾。しかし更に高い精度での一致が求められれば、 A_{ij} の高次の項が考慮されなければならない。

(2) 土の異方硬化

すでに多くの実験事実²⁴⁾が示しているように、土は異方的に硬化する塑性体として理想化できる。このような土の硬化は、微視的観察によれば²⁵⁾、接点での単位法線ベクトル \mathbf{n} の塑性変形に伴う主応力方向への集中と共に起こっている。したがってこの場合、接点での単位法線ベクトル \mathbf{n} による構造テンソル A_{ij} が重要である。種々の異方硬化モデルが理論上可能であろうが、この土の構造変化と矛盾しないものでなければならない。この視点を更に強調するには、降伏条件や塑性ポテンシャルが直接的に構造テンソルを含む形で定式化できればよい。一つの試みとして、ここでは飛田²⁶⁾の修正応力による方法を紹介しよう。

議論を簡単にするために、土を球粒子の集合と考える。粒子は、座標軸 x_i に垂直な面 (x_i -面と呼ぶ) に関して、二つのグループ A と B に分けることができる (図-5.4)。グループ A の粒子はその重心が x_i -面の正の側にあり、一方グループ B の粒子は負の側にある。またグループ A の粒子がグループ B の粒子と接点でつながっている場合、粒子の重心を結ぶ直線を“枝” (branch) と呼ぶことにし、その長さを $l^{(x_i)}$ 、また方向を $\mathbf{n}^{(x_i)}$ で表す。この“枝”には、次の重要な役目がある。すなわち x_i -面に作用する応力 σ_{ij} は、 x_i -面の単位面積当たり、グループ A の粒子から B の粒子に“枝”に沿って、粒子間力として伝達される。

“枝”には必ず一つの接点を伴うが、その接点での接触面積を $\Delta s^{(x_i)}$ とする。接点の方向が単位法線ベクトル

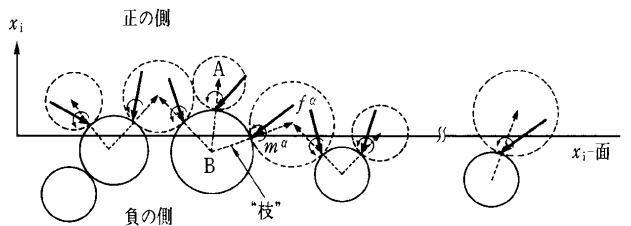


図-5.4 x_i -面上の“枝”の定義

$n^{(x_i)}$ であることに注意して、 $\Delta s^{(x_i)}$ を座標軸 x_j に垂直な面へ投影すれば、その投影面積は $\Delta s^{(x_i)} n_j^{(x_i)}$ に等しい。単位面積の x_i -面には多くの“枝”（したがって多くの接点）が伴われているが、すべての接点の接触面積を座標軸 x_j に垂直な面に投影して総投影面積 s_{ij} を求めれば、次式が得られる²⁵⁾。

$$s_{ij} = \rho \bar{L} \Delta \bar{s} A_{ij} \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 ρ は接点密度（単位体積当たりの接点数）、 \bar{L} は枝の平均長さ、 $\Delta \bar{s}$ は平均接触面積である。この投影面積 s_{ij} は、実際に力を伝達する接触面積であることから、土の変形・強度を支配する応力を、実空間での x_i -面上ではなく、実質的に力を伝える s_{ij} 面上で定義することは自然なことに思える。

s_{ij} は対称な2階のテンソルであることから、三つの主軸 (A_{ij} の主軸と一致) と主値 ($s_i, i=1, 2, 3$) を持っている。今、この主軸 x'_i を座標軸に選べば、単位面積の x'_i -面に関連するすべての接触面積を x'_i 軸に投影すれば主値 s_i が得られ、他の軸への投影面積は零に等しい。そこで、 x'_i -面に定義される応力 σ_{ij} に単位の面積を掛け（力に変換）、更に s_i で除して、修正応力 T'_{ij} を次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ & T'_{22} & T'_{23} \\ & & T'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{s_2} & 0 \\ & & \frac{1}{s_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

あるいは、

$$T'_{ij} = s_{ik}^{-1} \sigma_{kj} \dots\dots\dots (27)$$

ここで s_{ij}^{-1} は s_{ij} の逆テンソルであって、 $s_{ik}^{-1} s_{kj} = \delta_{ij}$ を満たしている。式(26)の修正応力は非対称であること、また微視的構造が等方であっても修正応力は応力 σ_{ij} に一致しないなど、応用上不便である。そこで修正応力として、最終的に次式を提案する（係数を除いて飛田²⁶⁾ の定義に一致）。

$$T_{ij} = \frac{1}{6} (A_{ik}^{-1} \sigma_{kj} + A_{jk}^{-1} \sigma_{ki}) \dots\dots\dots (28)$$

土の構造 (n の分布) が等方的であれば、 $A_{ij} = \delta_{ij}/3$ が成立する。すると式(28)の修正応力は、コーシーの応力に一致する。式(28)以外にも、例えば、負荷されている応力を使って修正応力を定義するなどの提案がある²⁷⁾。塑性変形する砂にあっては、応力と構造にある種の関係が成立することが知られている²⁵⁾ ことから、一見全く異なって見えるこれらの修正応力にも、ある共通性が隠されているかもしれない。次の問題は、修正応力にはどのような応用が可能か、である。ここでは、修正応力の導入に共通した応用例について、概説する（詳細は文献を参照のこと）。

降伏関数 f は、普通、テンソルの不変量と硬化パラメーター $\alpha^{(i)}$ を使って次のように表される。

$$f = f(I_1, J_2, J_3, \alpha^{(i)}) \dots\dots\dots (29)$$

応力の不変量を修正応力の不変量 ($\hat{I}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$) で書き改めれば、式(29)は容易に異方硬化する降伏関数 \hat{f} として一般化できる。

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \hat{f}(\hat{I}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3, \alpha^{(i)}) \dots\dots\dots (30) \\ \hat{I}_1 &= T_{ii} \\ \hat{J}_2 &= \frac{1}{2} \left(T_{ij} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \delta_{ij} \right) \left(T_{ji} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \delta_{ji} \right) \\ \hat{J}_3 &= \frac{1}{3} \left(T_{ij} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \delta_{ij} \right) \left(T_{jk} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \delta_{jk} \right) \left(T_{ki} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \delta_{ki} \right) \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

塑性ひずみ増分は、式(30)の降伏関数を塑性ポテンシャルとして導けるが、この場合、応力と塑性ひずみ増分の主軸の共軸性 (Coaxiality) は失われる。理論を完結させるには、硬化パラメーター $\alpha(d\varepsilon_v^{(p)})$ の定式化のみならず（既往の研究が利用できる）、構造の発展方程式（すなわち、構造変化 dA_{ij} を巨視的な $d\sigma_{ij}$ や $d\varepsilon_{ij}^{(p)}$ で表すこと）が必要である。この種の研究は、最近始まったばかりであるが^{25),26),28),29)}、土の物性論を連続体の力学につなげる橋渡しを担う研究として、土の力学に相応しい興味ある分野といえよう。

(3) 不連続性岩盤への応用例

岩盤は多くの地質不連続面（クラックと総称する）を含むが、その解析には、まず弾性体としての近似が一般的である。巨視的ひずみテンソル ε_{ij} と応力テンソル σ_{kl} の弾性の線形関係は、次の一般式で表せる²³⁾。

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \dots\dots\dots (32)$$

ここで C_{ijkl} は、弾性コンプライアンステンソルであり、 $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ の対称性を満たしている。この弾性コンプライアンステンソルは内部構造に強く依存することから、式(21)の C_{ijkl} は、 A_{ij} を式(15)の F_{ij} に代えれば、そのまま C_{ijkl} の表現として利用できる。クラックが薄い円盤状で表せ、またクラック相互の弾性干渉の影響が無視できる特別な場合を考えれば、 C_{ijkl} は更に次式となる¹⁷⁾。

$$C_{ijkl} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4k} (\delta_{ik} F_{jl} + \delta_{jk} F_{il} + \delta_{il} F_{jk} + \delta_{il} F_{ik}) \right] \dots\dots\dots (33)$$

ここで E と ν はそれぞれ岩石基質部のヤング率とポアソン比であり、また k はクラックの変形性にかかわる無次元の定数であり、円盤状のオープンクラックであれば、およそ $2/\pi$ に等しい。この例では、近似的ながら、応力-ひずみの巨視的關係が準ミクロ的考察から直接誘導されている。岩盤中の透水は主にクラックを通して起こるが、岩盤の透水テンソルもまたクラックテンソルを使って定式化できる³⁰⁾。クラックの成長 ($dF_{ij} \neq 0$) を含むより一般的な問題へ拡張するには、クラックの進展則が負荷される応力の関数として定式化されなければならない、更なる困難に直面することになる。しかし、 F_{ij} を拠り所としてミクロとマクロをつなぐアプローチから、非弾性の構成方程式を論ずる日も決して遠くないと考えている。

講座

5.1.5 おわりに

講座の担当を引き受けた当初より予想できていたことながら、「地盤力学におけるミクロとマクロとの間」の構想が固まらず往生した。最終的には、我々の最近の研究を中心にまとめることで、勘弁していただくことにした。本テーマで参照すべき多くの論文に、著者の非力で言及できなかったことをお詫びしたい。

参考文献

- 1) Deresiewicz, H.: Mechanics of Granular Matter, In Advanced in Applied Mechanics V, Academic Press, pp. 233~306, 1958.
- 2) 最上武雄：粒状体の力学，最上武雄編「土質力学」第8章，pp. 893~1036, 1969.
- 3) Powders and Grains 2001, (edited by Kishino, Y.), Balkema, 2001.
- 4) Discrete Element Approach, In Mechanics of Granular Materials, (Edited by Oda, M. and Iwashita, K.), Balkema, pp. 147~223, 1999.
- 5) Cambou, B.: Fundamental concepts in homogenization process, In Mechanics of Granular Materials, (Edited by Oda, M. and Iwashita, K.), Balkema, pp. 35~39, 1999.
- 6) Mühlhaus, H. B.: Polar continua and micromechanics of granular materials, In Mechanics of Granular Materials, (Edited by Oda, M. and Iwashita, K.), Balkema, pp. 86~106, 1999.
- 7) Newland, P. L. and Allely, B. H.: Volume changes in drained triaxial tests on granular materials, Géotechnique, Vol. 7, pp. 17~34, 1957.
- 8) Rowe, P. W.: The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, Proc. Roy. Soc., A 269, pp. 500~527, 1962.
- 9) Matsuoka, H.: Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2, pp. 47~61, 1972.
- 10) Nakai, T. and Matsuoka, H.: Shear behaviors of sand and clay under three-dimensional stress condition, Soils and Foundations, Vol. 23, No. 3, pp. 26~42, 1983.
- 11) Oda, M. and Kazama, H.: Microstructure of shear bands and its relation to the mechanisms of dilatancy and failure of dense granular soils, Géotechnique, Vol. 48, No. 4, pp. 465~481, 1998.
- 12) 小田匡寛：土の微視的構造—顕微鏡で土の何が見えるか—，土と基礎，Vol. 50, No. 4, pp. 42~47, 2002.
- 13) Satake, M.: Fabric tensor in granular materials, IUTAM Conference on Deformation and Flow of Granular Materials, A. A. Balkema, pp. 63~68, 1982.
- 14) Oda, M. and Nakayama, H.: Yield function for soil with anisotropic fabric, J. Engineering Mech., ASCE, Vol. 115, No. 1, pp. 89~104, 1989.
- 15) Curry, J. R.: Analysis of two-dimensional orientation data, J. of Geology, Vol. 64, pp. 117~131.
- 16) Kanatani, K.: Distribution of directional data and fabric tensor, Int. J. Engineering Science, Vol. 22, No. 2, pp. 149~164, 1984.
- 17) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu, T.: Elastic compliance for rock like materials with random cracks, Soils and Foundations, Vol. 24, No. 3, pp. 27~40, 1984.
- 18) Kanatani, K.: Stereological determination of structural anisotropy, Int. J. Engineering Science, Vol. 22, No. 5, pp. 531~546, 1984.
- 19) Kuo, C.-Y., Frost, J. D. and Chameau, J.-L. A.: Image analysis determination of stereology based fabric tensor, Géotechnique, Vol. 48, No. 4, pp. 515~525, 1998.
- 20) 佐武正雄：土のマイクロメカニクス入門，土と基礎，Vol. 50, No. 7, pp. 49~54, 2002.
- 21) Drucker, D. C. and Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quarterly of Applied Mechanics, Vol. 10, No. 2, pp. 157~165, 1952.
- 22) Oda, M.: Initial fabric and their relations to mechanical properties of granular materials, Soils and Foundations, Vol. 12, No. 1, pp. 17~36, 1972.
- 23) Chen, W. F. and Saleeb, A. F.: Constitutive Equation for Engineering Materials: Elasticity and Modeling, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1982.
- 24) 龍岡文夫：三軸せん断装置による砂の変形特性に関する基礎的研究，東京大学博士論文，1972.
- 25) Oda, M.: Inherent and induced anisotropy in plasticity theory of granular soils, Mechanics of Materials, Vol. 16, pp. 35~45, 1993.
- 26) Tobita, Y.: Contact tensor in constitutive model for granular materials, Proc. US-Japan Seminar on Micromechanics of Granular Materials, Sendai-Zao, (edited by Satake, M. and Jenkins, J.), pp. 263~270, 1988.
- 27) Nakai, T. and Mihara, Y.: A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, Soils and Foundations, Vol. 24, No. 2, pp. 82~94, 1984.
- 28) Kurukulasuriya, L. K.: Undrained shear strength anisotropy of an over-consolidated clay and its effect on the bearing capacity of strip footing, Doctor Thesis at Saitama University, 1998.
- 29) Li, X. S., and Dafalias, Y. F.: Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behavior, J. Geotech. & Environ. Eng., ASCE, Vol. 128, No. 10, pp. 868~880.
- 30) Oda, M.: Permeability tensor for discontinuous rock masses, Géotechnique, Vol. 35, No. 4, pp. 483~495, 1985.