

## 修正個別要素法による崖の進行性破壊解析

(A Modified Distinct Element Analysis for Progressive Failure of a Cliff)

岩 下 和 義<sup>1)</sup> (Kazuyoshi Iwashita)  
伯 野 元 彦<sup>11)</sup> (Motohiko Hakuno)キーワード：個別要素法／進行性破壊／粘性土  
(IGC : E 13/E 6)

## 1. はじめに

現在、地盤の挙動の動的解析の手法として、主に地盤を連続体と近似した解析法 (FEM, BEM 等) が用いられている。これらの手法は、破壊に至るまでの解析を主眼としており、破壊した後の解析には困難が伴う。

近年、電子計算機は急速に性能が向上し、今まで可能性でしかなかった様々な数値シミュレーションが様々な分野で現実に行われるようになってきた。こうした数値シミュレーションの1つに粒状体解析が含まれる。この方法は、媒質を粒子の集合として取り扱う方法である。今までに粒状体解析法は、最上の<sup>1)</sup> 統計力学的手法を始めとして佐武も提案しているが<sup>2)</sup>、シミュレーション手法としては、1971年 Cundall<sup>3),4)</sup> が提案した DEM (Distinct Element Method) が知られている。DEM は地盤などの媒質を土砂や岩石といった非連続な要素 (ブロック) からなる集合体と考える非連続体解析法であり、各々の要素の運動方程式を考え、要素同士の接触点を通して力が伝達されることとして、各要素の挙動を動的に時間領域で追跡する手法である。この方法では、破壊の発生から進行に至るまでの連続的な解析が可能である。また、1973年伯野・平尾<sup>5)</sup> も独立に粒状体シミュレーションを行ったが、Cundall に比べて遅れており、静的問題に限られていた。

最初、DEM は2次元で多角形要素を用いていたが、要素の接触判定が複雑であり、多くの情報を必要とするため、大規模なシミュレーションには向かなかった。その後、接触判定が容易な円要素を用いることが提案された<sup>6)</sup>。日本でも、木山・藤村らが、等しい半径の円要素を用い、トンネルの掘削による地盤沈下の解析<sup>7)</sup> や、サイロ内の岩質粒状体の重力流動の解析<sup>8)</sup> などを行った。

また植村・伯野<sup>9),10)</sup> は、不規則な半径の要素を用い要素数を数千個に拡張し、土砂崩壊や地震時土圧の解析を行い、ルシア・伯野<sup>11)</sup> は、粘着力のない斜面崩壊の解析に応用した。更に垂水・伯野<sup>12)</sup> は、砂粒子レベルで間隙水の移動も考慮した DEM を用いて液状化解析を行っている。静的液状化に関しては、岸野<sup>13)</sup> も独自の手法でシミュレーション解析を行った。また、木山・藤村ら<sup>14),15)</sup>、足立ら<sup>16)</sup>・西脇ら<sup>17)</sup>、吉田ら<sup>18)</sup> も、DEM を用いて様々な試みを行っている<sup>14)~18)</sup>。

DEM では、要素間は接触しない限り完全に不連続である。しかし、水分を含んだ砂や粘性土など一般的な土をマクロに考えると、完全な非連続体ではあらかわせない。そのため、DEM を地盤の解析手法として用いる際には多くの問題が生じる。例えば、

粘性土的な性質を持たせることが難しい等である。

本研究では、DEM 解析法に剛体要素間の直接の接触による力の他に、要素が接触していない場合でも間に粘土など他の物質が存在していたり、要素が円形でなく、突起部のひっかかり等を表現するため、垂直方向とせん断方向の間隙ばねを提案した。

そして、崖の進行性破壊や地震時の挙動の解析を試みた。

## 2. DEM による動的解析

## 2.1 DEM の考え方

## (1) 基本的考え方

我々の修正 DEM による計算の流れ図を図-1 に示す。DEM では、粒状体を基本的に剛体として取り扱う。そして物性を持つ線型性や非線型性は、要素の接触点に弾性スプリング、粘性ダッシュポット、スライダーなどを想定することで表現できるとする。一つの要素についての運動方程式は、以下のように表すことができる。

$$m\ddot{u} + \eta\dot{u} + Ku = 0 \quad (1)$$

$$I\ddot{\phi} + \eta r^2\dot{\phi} + Kr^2\phi = 0 \quad (2)$$

ただし、 $K$  は弾性スプリングのバネ係数、 $\eta$  は粘性ダッシュポットの粘性係数、 $m$  は要素の質量、 $r$  は要素の半径、 $I$  は要素の慣性モーメント、 $u$  は要素の変位、 $\phi$

1) 埼玉大学建設基礎工学科 講師

ii) 東京大学地震研究所 教授 (文京区弥生 1-1-1)  
(1989. 3. 22 原稿受付・討議期限 1991. 4. 1. 要請があれば1か月の  
期限延長可能)

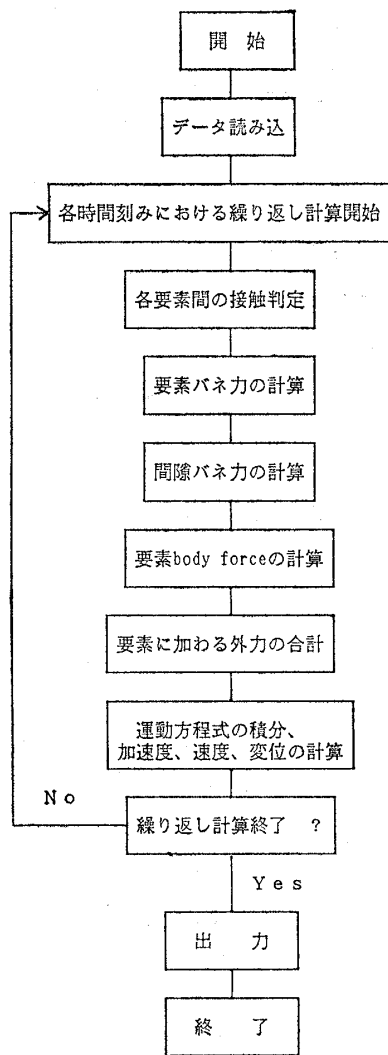


図-1 修正 DEM の解析流れ図

は要素の回転変位とする。

これらの式をすべての粒状体について求める。これらの運動方程式を、時間領域で差分近似し、数値解析することにより前の時刻の要素の変位から、今回作用している力を求め、ニュートンの法則により加速度を求め、数値積分により変位を求める。

(2) 接触判定

任意の円形要素  $I, J$  の間の接触について示す。解析のタイムステップの時間増分を  $\Delta t$  とする。時刻  $t$  における  $I, J$  の座標を  $(x_i, z_i), (x_j, z_j)$ , 半径を  $r_i, r_j$  とする。

図-2 に示すように、要素  $I, J$  が接触しているかどうかの判別条件は、以下の式で表される。

$$r_i + r_j \geq R_{ij} \quad (3)$$

$$\text{ここで } R_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (4)$$

要素が離れると、式 (3) が成り立たなくなる。

(3) 要素間に働く力

要素  $I, J$  の中心をむすんだ線を要素衝突の直方向と考えることにする。図-3 に示すように、この線と  $x$  軸

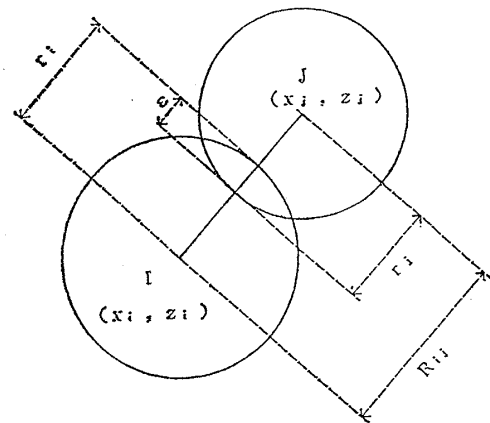


図-2 要素の接触判定

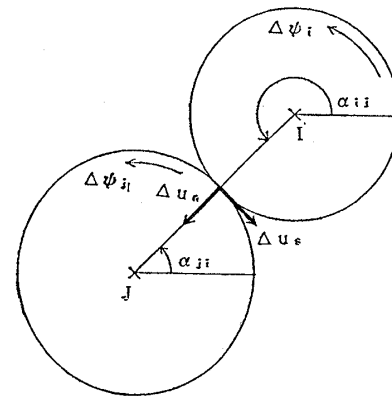


図-3 要素の接触時の相対変位

のなす角を  $\alpha_{ij}$  とする。 $\alpha_{ij}$  は反時計周りを正とする。この角の正弦と余弦は、

$$\sin \alpha_{ij} = -\frac{(z_i - z_j)}{R_{ij}} \quad (5)$$

$$\cos \alpha_{ij} = -\frac{(x_i - x_j)}{R_{ij}} \quad (6)$$

で与えられる。接触する2要素  $I, J$  の  $\Delta t$  間の  $x, z$  回転方向の変位を  $(\Delta x_i, \Delta z_i, \Delta \Phi_i)$ ,  $(\Delta x_j, \Delta z_j, \Delta \Phi_j)$  とおけば、直およびせん断方向の相対変位増分  $\Delta u_n$  (接近を正),  $\Delta u_s$  (反時計周りを正) は、以下の式で与えられる。

$$\Delta u_n = (\Delta x_i - \Delta x_j) \cos \alpha_{ij} + (\Delta z_i - \Delta z_j) \sin \alpha_{ij} \quad (7)$$

$$\Delta u_s = -(\Delta x_i - \Delta x_j) \sin \alpha_{ij} + (\Delta z_i - \Delta z_j) \cos \alpha_{ij} + (r_i \Delta \psi_i + r_j \Delta \psi_j) \quad (8)$$

2.2 DEM の修正

(1) ベクトルを用いた定式化

DEM は、変位増分を用いて定式化されているが、ベクトルを用いて定式化することもできる。このほうが、3次元の拡張にも向いていると思われる。そこで、2次元でベクトルを用いた方法を提案する。ここでは、以前のタイムステップより接触している要素  $I, J$  について具体的に示す。

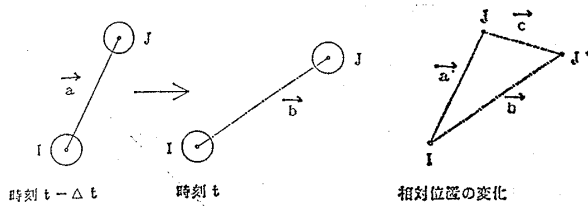


図-4 要素 I, J の Δt 間の位置の変化

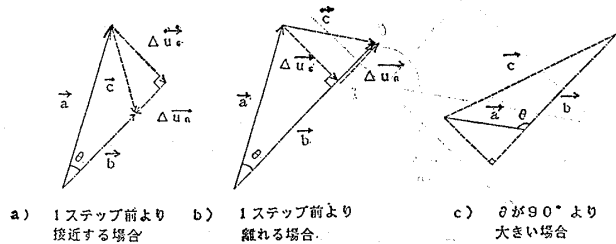


図-5 相対変位ベクトルの分離

図-4 に示すように、片方の要素 I を基準とした要素 J の相対位置をベクトルとしてもちいる。時刻  $t - \Delta t$  の位置ベクトルを  $\vec{a}$ 、時刻  $t$  のそれを  $\vec{b}$  とする。  $\Delta t$  の間の要素 J の移動  $\vec{c}$  は、

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} \quad (9)$$

で表される。ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  からなる角を  $\theta$  とすれば、

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 \quad (10)$$

という関係があるので、余弦  $\cos\theta$  がもとまる。

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad (11)$$

図-5 に要素 I, J の位置の変化を示す。1 ステップ前よりも接近する場合と、離れる場合がある。  $c$  を、  $b$  と平行な成分  $\Delta\vec{u}_n$  と垂直な成分  $\Delta\vec{u}_s$  とに分離して考える。

$$\vec{c} = \Delta\vec{u}_n + \Delta\vec{u}_s \quad (12)$$

つまり、  $\Delta\vec{u}_n$  は法線方向の、  $\Delta\vec{u}_s$  は接線方向の相対変位ベクトルの増分である。ここで、図-5 からわかるように以下のような関係がある。

$$|\vec{b} - \Delta\vec{u}_n| = |\vec{a}|\cos\theta \quad (13)$$

要素 I, J が離れる場合、つまり Case A では、

$$|\vec{b} - \Delta\vec{u}_n| < |\vec{b}| \quad (14)$$

では、  $\vec{b}$  と  $\Delta\vec{u}_n$  は同じ向きとなり、  $\Delta\vec{u}_n$  は以下の式で求まる。

$$\Delta\vec{u}_n = \frac{||\vec{b} - \Delta\vec{u}_n| - |\vec{b}||}{|\vec{b}|} \vec{b} \quad (15)$$

要素 I, J が近づく場合、つまり Case B では、

$$|\vec{b} - \Delta\vec{u}_n| > |\vec{b}| \quad (16)$$

では、  $\vec{b}$  と  $\Delta\vec{u}_n$  は逆向きとなり、  $\Delta\vec{u}_n$  は以下の式で求まる。

$$\Delta\vec{u}_n = -\frac{||\vec{b} - \Delta\vec{u}_n| - |\vec{b}||}{|\vec{b}|} \vec{b} \quad (17)$$

$\Delta\vec{u}_s$  は式 (9) と (12) より求まる。

$$\Delta\vec{u}_s = \vec{c} - \Delta\vec{u}_n = \vec{b} - \vec{a} - \Delta\vec{u}_n \quad (18)$$

法線方向および接線方向の相対変位ベクトル  $[\vec{u}_n]_t$  と  $[\vec{u}_s]_t$  は、以下の式で求まる。

$$[\vec{u}_n]_t = [\vec{u}_n]_{t-\Delta t} + \Delta\vec{u}_n \quad (19)$$

$$[\vec{u}_s]_t = [\vec{u}_s]_{t-\Delta t} + \Delta\vec{u}_s \quad (20)$$

尚、今回のタイムステップで初めて、接触した場合には、以下のように考える。

$$[\vec{u}_n]_t = -\frac{|r_i + r_j - |\vec{b}||}{|\vec{b}|} \vec{b} \quad (21)$$

$$[\vec{u}_s]_t = \vec{0} \quad (22)$$

接触が切れた場合には、以下のようにする。

$$[\vec{u}_n]_t = \vec{0} \quad (23)$$

$$[\vec{u}_s]_t = \vec{0} \quad (24)$$

力と変位の関係は、法線方向の弾性ばねの力を  $\vec{e}_n$ 、粘性ダッシュポットの力を  $\vec{d}_n$  とすれば以下のようになる。

$$\vec{e}_n = k_n[\vec{u}_n]_t \quad (25)$$

$$\vec{d}_n = \eta_n \frac{[\vec{u}_n]_t}{\Delta t} \quad (26)$$

時刻  $t$  における 2 要素間の法線方向合成  $\vec{f}_n$  は、以下のようになる。

$$\vec{f}_n = \vec{e}_n + \vec{d}_n \quad (27)$$

以上は、要素の回転を考えない場合である。次に回転について示す。図-6 のように要素 I, J の相対位置ベクトル  $\vec{b}$  と X 軸のなす角を  $\alpha$  とすると、反時計方向の接線方向単位ベクトル  $\vec{s}$  は以下の式で表される。

$$\vec{s} = (-\sin\theta, \cos\theta) \quad (28)$$

図-7 のように、回転の効果を  $s$  方向の並進運動に置き換えて考える。要素の回転の影響は、要素の接線方向だけに働くとする。そこで、法線方向の関係は、回転を考えない場合と同じになる。回転による接線方向の相対変位の増分を  $\Delta\vec{u}_r$  で表すと、以下のようになる。

$$\Delta\vec{u}_r = r_j \cdot \Delta\theta \cdot \vec{s} - r_i \cdot \Delta\theta \cdot \vec{s} \quad (29)$$

接線方向の相対変位増分  $\Delta u_{sr}$  は、並進運動による増分  $\Delta\vec{u}_s$  と回転運動の  $\Delta\vec{u}_r$  の和となる。

$$\Delta\vec{u}_{sr} = \Delta\vec{u}_s + \Delta\vec{u}_r \quad (30)$$

時刻  $t$  での接線方向の相対変位は以下の式で求められる。

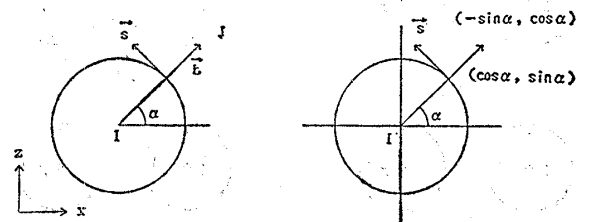


図-6 要素の接触点における直方向とせん断方向の単位ベクトル

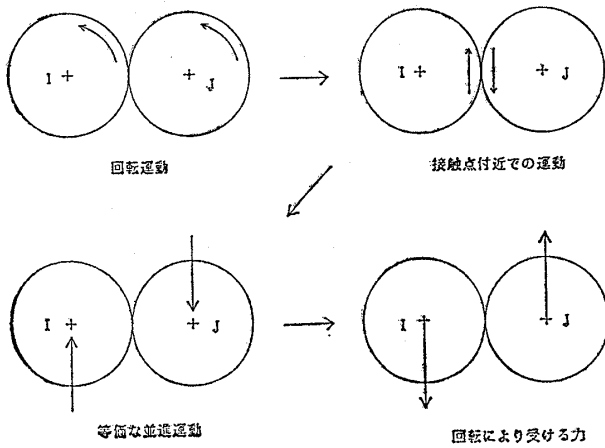


図-7 回転運動の扱い方

$$[\vec{u}_{sr}]_t = [\vec{u}_{sr}]_{t-\Delta t} + \Delta \vec{u}_{sr} \quad (31)$$

弾性ばねの力  $\vec{e}_{sr}$  と粘性ダッシュポットの力  $\vec{d}_{sr}$  は、以下ようになる。

$$\vec{e}_{sr} = k_s [-\vec{u}_{sr}]_t \quad (32)$$

$$\vec{d}_{sr} = \eta_s \frac{[\vec{u}_{sr}]_t}{\Delta t} \quad (33)$$

摩擦力の制限を考え、以下の条件を加える。

$$|\vec{e}_{sr}| > \mu |\vec{e}_n| \text{ のとき } \vec{e}_{sr} = \frac{\mu |\vec{e}_n|}{|\vec{e}_{sr}|} \vec{e}_{sr} \quad (34)$$

以上より時刻  $t$  における 2 要素間のせん断方向の力  $\vec{f}_{sr}$  は以下ようになる。

$$\vec{f}_{sr} = \vec{e}_{sr} + \vec{d}_{sr} \quad (35)$$

要素にかかる力の総和は、以下ようになる。

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{f}_{jn} + \sum_j \vec{f}_{sr} - m_i g \quad (0.1) \quad (36)$$

$$\vec{F}_j = -\sum_i \vec{f}_{in} + \sum_i \vec{f}_{sr} - m_j g \quad (0.1) \quad (37)$$

ここで、 $m_i g$  (0.1),  $m_j g$  (0.1) は重力が Z 方向にかかることを示している。回転を考えない場合には、上式の  $\vec{e}_{sr}$  の項を  $\vec{e}_s$  で置き換えればよい。

接線方向の力による要素 I, J のモーメントを  $Fm_i$ ,  $Fm_j$  とする。図-8 に示すように、要素 I にとり  $\vec{f}_{sr}$  が時計方向の場合、

$$Fm_i = -\sum_j |\vec{f}_{sr}| \cdot r_i \quad (38)$$

$$Fm_j = -\sum_i |\vec{f}_{sr}| \cdot r_j \quad (39)$$

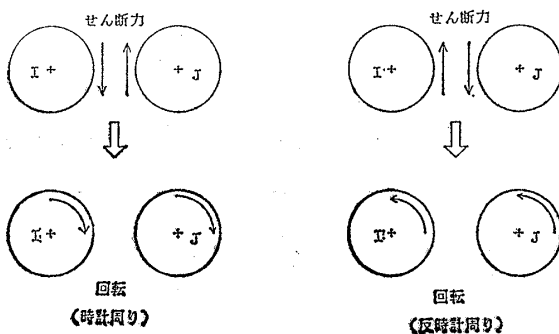


図-8 接触点でのせん断力による要素の回転

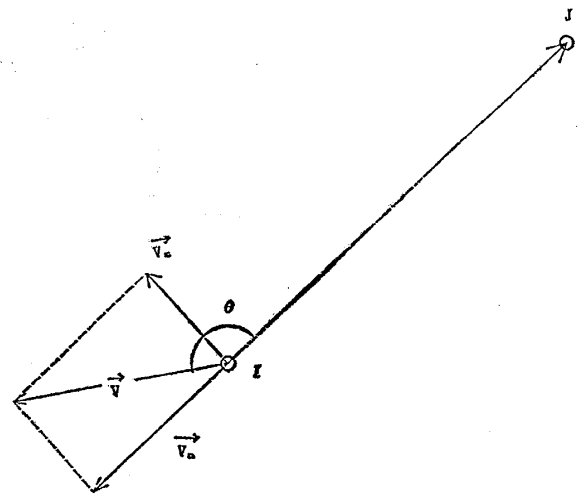


図-9 相対速度ベクトルの分離

反時計方向の場合、

$$Fm_i = \sum_j |\vec{f}_{sr}| \cdot r_i \quad (40)$$

$$Fm_j = \sum_i |\vec{f}_{sr}| \cdot r_j \quad (41)$$

要素と壁の接触についても同様に求まる。

(2) 運動エネルギーの消費

一般に物質が衝突をする際に、様々な形で運動エネルギーが消費される。この効果を反発係数に置き換えて DEM 解析に取り入れる。

本来は、衝突の前後の速度で考えなければならないのだが、多数の要素を扱い、厳密に求めることは不可能なので、以下の方法を便宜的に用いた。2つの要素が接触している間は完全弾性体の挙動を考えると、離れるまでにはエネルギーの消費は生じないことにする。そして要素の接触がはずれた時に速度を小さくすることで、まとめて運動エネルギーの消費を考慮する。

図-9 に示すように要素 I, J の接触がはずれたタイムステップにおける相対速度ベクトル  $\vec{v}$  を  $\vec{b}$  と平行な成分  $\vec{v}_n$  と垂直な  $\vec{v}_s$  とに分離する。

$$\vec{V} = \vec{V}_n + \vec{V}_s \quad (42)$$

$\vec{b}$  と  $\vec{v}$  のなす角を  $\theta$  とすると、 $\vec{v}_n$  の絶対値は、

$$|\vec{V}_n| = |\vec{V}| \cdot \cos \theta \quad (43)$$

これより、 $\vec{v}_n$  と  $\vec{v}_s$  を以下のように決める。

$$\vec{V}_n = \frac{|\vec{V}_n|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} \quad (44)$$

$$\vec{V}_s = \vec{V} - \vec{V}_n \quad (45)$$

弾性体の衝突の際に反発係数の影響を受けるのは、衝突方向の速度成分である。そこで、速度  $v$  のうち  $\vec{v}_s$  は衝突の前後で変化がないとし  $\vec{v}_n$  のみが変わるとする。反発係数を  $e$  とし、衝突後の速度を  $\vec{v}', \vec{v}_n'$  とすると、

$$\vec{V}_n' = e \cdot \vec{V}_n \quad (46)$$

$$\vec{V}' = \vec{V}_n' + \vec{V}_s \quad (47)$$

以上より、衝突後の速度  $\vec{v}'$  が求まる。尚、ここで考

慮しなかった接線方向成分  $\vec{v}_t$  も、要素の衝突中に摩擦力の上限を越えた場合にはすべりを生じてエネルギーを失っている。

以上の方法では、運動量保存則を考えていない。接触している要素が2つとか3つ4つなど少ない場合には、場合分けをして質量を求め、運動量保存則と弾性体衝突の式の双方を成り立たせることができる(垂水ら, 1987)。しかし、大きな塊から1つの要素がはずれる等の一般的な場合を総合的に扱うことは困難である。そこで、以下のような方法を便宜的に用いることにした。一般に物体がなんらかの変形をする際には必ずエネルギーの消費を伴っている。DEMでのモデルの変形とは、要素が動き、接触状態が変わることである。そこで要素が他の要素との接触を切るたびに速度を変えることで運動エネルギーの消費を表すことにする。運動量保存則を考慮していない方法ではあるが、要素のパッキングのように早く安定させたい場合や、大変形問題、材質の非線型性の強い問題などに用いることができる。

本研究では、基本的には、運動量保存則も成り立たせる方法を用いている。そして、パッキングの際などに上記の方法を用いることにする。

### 2.3 パッキングの方法

粒状体解析を行うためには、まず解析用のモデルを作成する必要がある。DEMでは、要素を解析対象の領域にあわせて、必要な形状に詰め(パッキング)、成形することでモデルを作成する。

パッキングの方法の内、落下法はDEM解析のプログラムをそのまま変更なしに用いることができる長所がある。また土の生成や、構造物(ロックフィルダム、盛土等)の建設など実際の現象にも近いと思われる。モデル内部の力の状態、静止土圧の分布なども適切に表せられる。以上の理由より、本研究では落下法を用いることにする。

実際の落下法によるパッキングを説明する。粒子の中心を格子点上に決め、次に半径を乱数的に与える。本研究では粒径分布を対数正規分布で表すことにする。

モデルに重力を作用させDEM解析を行う。粒子は落下していき領域の下の方にだんだんたまっていく。粒子同士が衝突する際には、非弾性衝突として反発係数をあたえ、エネルギーが消費されるとする。また粒子の接触点のダッシュポットによりエネルギーが消費される。そのためだんだんとモデルは安定化に向かっていく。

こうして落下法により作られたモデルは、まだ間隙が多く、外力を加えなくても動いてしまい、解析の際にノイズを発生してしまう。故にモデルをより安定させる必要がある。そのためには現実の地盤改良法と同様な方法を用いることができる。ここでは粒子の配置をより安定

させるために振動外力を用いてモデルを締め固める方法を用いる。これを振動法によるパッキングと呼ぶことにする。

## 3. 要素の間を填す物質の影響

### 3.1 要素の間を填す物質の影響

今までのDEMでは、要素同士が接触しないと力が作用しない形になっていた。サイロの中のとうもろこしのような完全な非連続体では、この通りだと思われる。また、土質材料でも砂や礫などでは非連続体に近い挙動をするので、いままでのDEMで問題なく解析できると思われる。しかし、濡れた砂や粘土混じりの土など一般的な土質材料をマクロ的にみると、完全な非連続体として挙動していると考えるのは困難であり、DEMをそのまま適用するには無理があると思われる。

土、特に粘性の強い土はある程度まで引張りに抵抗できるが、DEMでは引張りを考えていない。

金属のように連続性の高い物質ではわざわざDEM解析法を用いる必要はない。逆にコーンや大豆のような完全な粒状体は、今までのDEMを用いて問題ない。DEMを改良して用いたいのは、両者の中間の範囲である。土は微視的に捉えると粒状体であるが完全な球体ではなく、媒質としては連続体と非連続体の両方の性質をそなえていると思われる。そこで、この方向でDEMの改良を考える。

接触時に作用する要素間のスプリングとダッシュポットはそのままに手は加えない。そうでないと大変形時に挙動を追跡できなくなる。要素のばねを変化させるかわりに、新たに別のばねを導入することにする。土の粒子と粒子の間隙には、なにかつなぎの役をする物質があるため、全体としてある程度の連続性を持つと思われる。このつなぎの物質はより小さい粒子、普通の土では粘土粒子や水分であると思われる。これらの効果をDEMに採り入れることにする。DEMモデルで、より小さな要素を大きな要素の間隙に設置することはできるが、つなぎの効果は表せないと思われるので、要素間に新たに力学モデルを導入し、この効果を表すことにする。

つなぎの物質の効果を表すための力学モデルは、いろいろ考えられる。粘土の挙動を表す力学モデルとして、スプリングとダッシュポット、スライダーを用いたBinghamモデルや、スプリングとスライダーからなるSt. Venantモデルなどが適するといわれているが、一番簡単にスプリングのみを用いることにする。

このスプリングは、要素間の法線方向と接線方向に配置する。そして、解析初期の接触している要素間および、近くにある要素間に配置する。モデルは安定状態にあると考え、ばねの自然長は初期の要素の中心間距離と

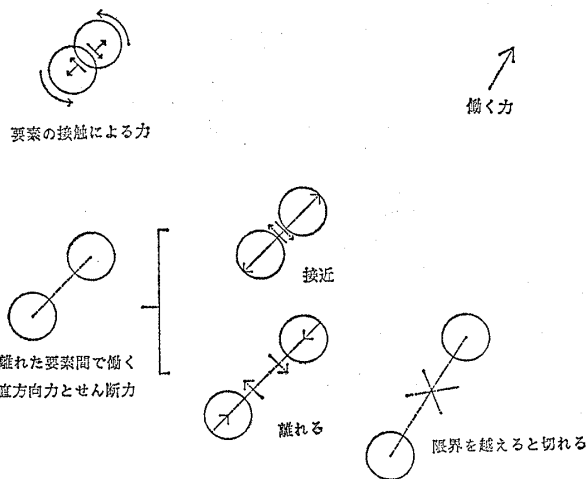


図-10 間隙の物質の効果をとり入れたモデルの概略図

し、これから伸びても縮んでも抵抗する。圧縮時にはどこまでも抵抗するが、引張り時には、ある限界のひずみの値を越えれば破壊され、それ以降働かなくなる。接線方向のスプリングも同様で、破壊基準は、せん断ひずみの限界とする。法線方向または、せん断方向のどちらか一方でひずみ限界を越えれば、間隙の物質は破壊され、両方のスプリングとも働かなくなることにする。このモデルの概要を図-10 に示す。

要素間には接触点におけるスプリングと間隙の物質の効果を表すスプリングの2種類のスプリングが設定されることになる。並列に配置されるため、要素間の見かけのばね定数は2本のばね定数の和となる。要素本体のばね定数のほうが間隙成分のばね定数よりかなり大きいため、接触時には、見かけのばね定数=要素本体のばね定数となる。また非接触時には間隙成分のばね一本のみとなる。

新たに加えたスプリングにより、要素のモデルは自立できるようになり、外力が作用して初めて破壊するという解析が可能となる。また、要素間の連続性が表せ、連続体解析と非連続体解析の中間的な解法となる。要素間のひずみレベルが低い間は、連続体的挙動を解析し、ひずみレベルが高くなると破壊し、非連続体として挙動するのを解析できる。

連続体と非連続体の中間的な解析手法として、他に川井ら(1985)<sup>19)</sup>の提案した剛体・ばねモデル(Rigid Body Spring Model, RBSM)がある。この方法は、連続体解法である、FEMをもとにした方法で、要素間が完全に離れると解析できなくなる。これに対して本方法は、非連続体解法であるDEMをもとにしているため、要素が完全に離れた後は、もとのDEM解析となり、その後も解析できる。

### 3.2 間隙間を填す物質の定式化

要素と要素の間隙にある物質の効果を表すために図-

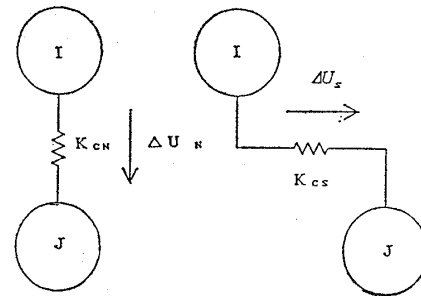


図-11 間隙に設定するばね

11 に示すように、法線方向と接線方向にばねを一本づつ系に取り入れる。ばねの扱いは、基本的に第2章2.2 に示したベクトルによる方法を用いる。これらのばねは、DEMモデルに設定する際には、伸び縮みしていない、つまりひずみのない中立な長さになっているとする。つまり、もとの要素間の距離が間隙ばねの自然な長さであり、DEMモデルは、この状態で安定に達しているとする。要素の相対位置がこの状態から変化するとばねが働き、抵抗力がかかる。間隙のばねを導入する前にDEMモデルが完全に静止し安定していれば、外力を加えなければ変位しないので、ばねを設定しても変位せず、反力を生じないので、安定している。またDEMモデルが安定しておらず振動している場合には、要素間の相対変位により間隙ばねも変位し、反力を生じ振動を打ち消すように作用する。そのため、要素モデルが変形しようとしても、安定状態つまりもとの要素配置に戻す方向に間隙ばねが働き、新たな安定状態めざして収束していくことになる。間隙の物質として粘性土を想定しているのでせん断破壊の条件もとり入れる。土の破壊は主にせん断破壊であり、ある部分でせん断応力が増加しせん断強度に達すると塑性的すべりを生じ、すべり面ができる。このモデルでも、間隙ばねにかかるせん断方向の力が、せん断強度に達すると、間隙のばねを無くすことで要素間でのすべりを許すことにする。このためすべり面が現れる。

以下、2つの要素 I, J のあいだの間隙について2次元モデルで説明する。3次元解析に用いる場合でも同様である。要素間の間隙が大きくなければ接触していなくても、粘土分が充填されており変形に抵抗すると思われる。要素が接している場合には、接触点の周囲に粘土分がついていると思われる。そこで、間隙のばねは I と J が接していなくても近くにあれば、設定することにする。

要素のすきまの大きさの判定、すなわち間隙ばねの設定の基準には、以下の式を用いる。ただし、要素 I, J の半径、中心座標を  $r_i, (x_i, z_i), r_j, (x_j, z_j)$  とし、近いかどうかの指標の係数として DCR 1 を用いる。

$$(r_i + r_j) \times DCR 1 \geq R_{ij} \quad (48)$$

ここで、

$$R_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (49)$$

(48) は、要素の中心間距離が、要素の半径の和の DCR 1 倍以内なら、要素間は近いと考え間隙の効果を考えようというものである。

間隙ばねを設定する場合には、要素の相対位置を記憶しておく。要素  $I$  の位置を基準としたベクトルで扱う。間隙ばねの設定時つまり、時刻 0 での相対位置ベクトルを  $\vec{d} = (d_1, d_2)$  とする。

$$d_1 = x_j - x_i \quad (50)$$

$$d_2 = z_j - z_i \quad (51)$$

この  $\vec{d}$  が、要素  $I, J$  の間隙ばねにとって中立な、自然な向きを表すベクトルとなる。時刻  $t$  における要素  $I, J$  の中心の座標を  $(x_i', z_i'), (x_j', z_j')$  とする。この時の相対位置ベクトルを  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  とする。

$$b_1 = x_j' - x_i' \quad (52)$$

$$b_2 = z_j' - z_i' \quad (53)$$

間隙にあるつなぎの物質はいつまでも変形に耐えるわけではないので、引張り時には、ひずみによる破壊基準をもうける。ここで定数 DCR2 を用いて要素間のひずみ限界を DCR2 で表すことにすれば、基準は以下のようになる。

$$|\vec{b}| \geq DCR2 \times |\vec{d}| \quad (54)$$

$|\vec{d}|$  はばねの自然長である。この式が成立すると、以後  $I-J$  の間隙ばねの効果を法線方向・接線方向ともに考えるのをやめる。せん断破壊の判定は、あとで行う。

時刻 0 から時刻  $t$  までの間の要素の相対変位の変化を  $\vec{c}_u$  とする。

$$\vec{c}_u = \vec{b} - \vec{d} \quad (55)$$

間隙のばねは、要素  $I-J$  の相対位置関係を  $\vec{d}$  に戻そうとするが、その力の方向は、 $-\vec{c}_u$  となる。この  $\vec{c}_u$  を  $\vec{b}$  と平行な成分  $\vec{c}_{un}$  と  $\vec{c}_{us}$  とに分離して考える。平行な成分  $\vec{c}_{un}$  は、間隙の法線方向のばねの変位であり、垂直成分  $\vec{c}_{us}$  は接線方向の変位である。以下の式により  $\vec{c}_{un}$  と  $\vec{c}_{us}$  を求める。

$$\vec{c}_{un} = (|\vec{b}| - |\vec{d}|) \times \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad (56)$$

$$\vec{c}_{us} = \vec{c}_u - \vec{c}_{un} \quad (57)$$

弾性スプリングにかかる反力の法線方向成分  $\vec{e}_{cn}$  と接線方向成分  $\vec{e}_{cs}$  は、以下のようになる。

$$\vec{e}_{cn} = k_{cn} \times \vec{c}_{un} \quad (58)$$

$$\vec{e}_{cs} = k_{cs} \times \vec{c}_{us} \quad (59)$$

次に、せん断破壊の判定を行う。接線方向の力の絶対値  $|\vec{e}_{cs}|$  がせん断強度を越えた場合に破壊する。破壊基準としてクーロンの基準を用いる。  $s$  をせん断強度、  $\sigma$  をすべり面上の全直応力、  $c$  を粘着力、  $\varphi$  を摩擦角とすれば、以下のように表される。

$$s = c + \sigma \cdot \tan \varphi \quad (60)$$

この式は本来、応力レベルでの条件であるが、DEM では応力でなく力で解析しているので、(60) を力でも成り立つと仮定して用いる。

要素  $I-J$  の間隙が圧縮されている場合、つまり

$$|\vec{b}| < |\vec{d}|$$

には、破壊は、式 (60) と同じ形式の以下の条件でおこるとする。

$$|\vec{e}_{cs}| \geq c_{DEM} + |\vec{e}_{cn}| \times \tan \varphi \quad (61)$$

ただし、 $c_{DEM}$  は DEM における粘着力に相当する力とする。

(61) の右辺第 2 項は圧縮時の固体摩擦と考えられるので、 $I-J$  が引張りとなっている時に作用するとは思われない。そこで、引張り時、すなわち

$$|\vec{b}| > |\vec{d}|$$

には、粘着力  $c_{DEM}$  のみが残ると考え、破壊基準は以下のようになる。

$$|\vec{e}_{cs}| \geq c_{DEM} \quad (62)$$

ひずみによる破壊やせん断破壊が生じた後は、要素の間隙ばねは働かなくなる。要素間が圧縮され接触している場合には、間隙ばねがなくても本体の接触時のばね・ダッシュポットが働き、反力を生じる。要素本体が接していない場合には、つなぎばねはなくなり、自由に行動するようになる。また、接線方向にすべりやすくなるが、要素同士が接触すれば、その分の接触方向の反力が作用する。

間隙のばねにより、要素  $I, J$  が受ける力の総和  $F_{ci}$ ,  $F_{cj}$  は、以下の式で与えられる。

$$\vec{F}_{ci} = \sum_j \vec{e}_{cn} + \sum_j \vec{e}_{cs} \quad (63)$$

$$\vec{F}_{cj} = -\sum_i \vec{e}_{cn} - \sum_i \vec{e}_{cs} \quad (64)$$

これらの  $\vec{F}_{ci}$ ,  $\vec{F}_{cj}$  がいままでの力に加えて要素にかかることになる。

間隙にある物質として粘性土を想定しており、モーメントは伝達しないと思われるので、間隙のばねによるモーメントや要素の回転は考えない。なお、本解析では簡単のためスプリングしか用いなかったが、複雑な力学モデルを仮定しても容易に採り入れられる。

ひずみによる破壊やせん断破壊がおこらないようにすれば、モデルは連続体として挙動するようになる。またすぐに破壊するようにすれば、非連続体として挙動することになる。このモデルは、連続体解析からみると、ばねが条件により破壊される質点・ばねモデルに近いものであるといえよう。この方法により連続体として挙動していた構造が、塑性化し、破壊していく様子を一貫して解析できると思われる。

### 3.3 DEM パラメータの決め方

DEM 解析を行う前に、DEM のパラメータ、例えば

法線方向のばね定数, 粘性ダッシュポットの粘性係数などを決める必要がある。

### (1) 要素ばねのパラメータの決め方

要素についてのパラメータは弾性スプリングのばね定数  $k_n, k_s$ , 粘性ダッシュポットの粘性係数  $\eta_n, \eta_s$  など, 要素同士の接触, 要素一壁の接触という本来の DEM の定数である。木山・藤村ら<sup>9)</sup> (1983) は要素を円筒で考えた場合の定数の決定法を提案している。また, 実際にサンプルピースを落下させる実験と DEM 解析を平行して行い, パラメータを決める研究も行っている (藤村ら<sup>20)</sup>)。本研究では, 木山・藤村の提案した円筒理論を用いた方法を用いることにする。

### (2) 間隙ばねのパラメータの決め方

次に, 要素の間隙に設定するパラメータ, ばね定数  $k_{cn}, k_{cs}$  と破壊基準の粘着力  $C_{DEM}$ , 摩擦係数  $\mu$  を決定する。これらの係数の内,  $C_{DEM}, \mu$  は室内実験によって求めることが可能と思われるが, 本解析では適当な値を仮定した。 $k_{cn}, k_{cs}$  は有限要素法のように系を連続体として考えた際の媒質のパラメータと関係する。

図-12 に示すモデルを考える。要素の質量を  $m$ , ヤング率を  $E$ , 波動の速度を  $c$  とすれば, 波動方程式は以下のように表せる。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (66)$$

振動の式より以下の式を考える。ただし, 要素間の距離を  $\Delta x$ , 時間刻みを  $\Delta t$  とする。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k(y_{x-\Delta x} - y_x) - k(y_x - y_{x+\Delta x}) \quad (67)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{k}{m}(y_{x-\Delta x} - 2y_x + y_{x+\Delta x}) \quad (68)$$

波動方程式を微分近似して, 以下の式が求まる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2}(y_{t-\Delta t} - 2y_t + y_{t+\Delta t})$$

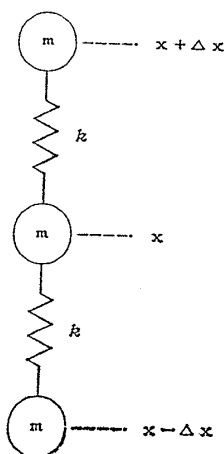


図-12 一次元質点ばねモデル

$$= \left( \frac{c}{\Delta x} \right)^2 (y_{x-\Delta x} - 2y_x + y_{x+\Delta x}) \quad (69)$$

(68) と (69) より以下の関係が求まる。

$$k = m \cdot \frac{c^2}{\Delta x^2} \quad (70)$$

この式より間隙のばね定数を定めることができる。

### (3) $\Delta t$ の決め方

1回のタイムステップ中に, 波動が隣接する要素を乗り越えずと先の要素まで伝わってしまうと, DEM 解析はうまく働かなくなる。これは, DEM が要素の接触により力や波動を伝播させてしまうため, 隣接する要素からの反力が求まる前に波動が先まで伝わってしまうと反力の評価が正確に行えないためと思われる。この考えに基づいた,  $\Delta t$  の安定条件は次のようになる。

$$\Delta t \cdot V < \Delta x_{\min} \quad (71)$$

ここに,  $V$  は粒状体中を伝播する波動の速度を示す。この式は, 時間  $\Delta t$  の間に波動が伝播する距離が, 隣接する要素間の中心間距離のうちの最小値  $\Delta x_{\min}$  より小さければ良いという意味である。

## 4. 崖の崩壊の2次元解析

改良した DEM を用いて, 崖崩壊の解析を2次元で行い, 今までの DEM による結果とどのように異なるかを調べ, 本方法の適用性を調べる。

DEM を改造したことにより, 崖のモデルの強度を自由に変えられるようになり, 自立している崖も作成できるようになった。そこで, 崖が外力なしに崩壊する場合や, 振動外力を加えることにより崩壊する場合について解析してみる。前者は雨により地盤がゆるんで地滑りを生じる場合を想定しており, 後者は地震による崖崩れや山崩れを想定している。

### (1) 外力を加えない場合

用いる DEM モデルのパラメータを表-1 に示す。要素数は 1,000 個, 半径は 15~5cm とする。崖の大きさは高さ 3m, 奥行き 10m とする。モデルの概略を図-13 に示す。尚, 壁は変位を固定した要素を配置して用いることにする。壁要素の半径は, 10cm とする。解析は, 時刻 0 秒で片側の側壁をはずした場合について行う。

間隙ばねを用いない場合の各時刻の全要素の位置と速度の分布を図-14 に示す。0.2 秒にははずした壁側の要素が動き出している。速度の図でみると, くさび型の部分が動き出し崖の奥のほうは動いていない。0.6 秒では, 全体が丸くなり, 崖の前面が崩れている。その後, 表面から崩れていき奥のほうの要素も流れるようになっていき, だんだん斜面が平らになっていく。

次に, 粘土分を考えた場合の結果を示す。ひずみの限界を 1% とした解析例の 4 秒までの全要素の位置と速度



表-1 2次元崖崩壊のパッキング用データ

要素数	1,000 個	
要素の半径	最大	15.0 cm
	最小	5.0 cm
	平均	10.0 cm
	分散	0.15
崖の大きさ	幅 (x)	10 m
	高さ (z)	3 m

$K_n$	$6.0 \times 10^6$ (N/m)	$\rho$	2000.0 (kgf/m <sup>3</sup> )
$K_s$	$1.5 \times 10^6$ (N/m)	$\Delta t$	0.001 (sec)
$\eta_n$	0.0 (NSec/m)	DCR 1	1.2
$\eta_s$	0.0 (NSec/m)	$c_{DEM}$	1,000 (N)
$\mu$	0.2	$K_{CN}$	$1.2 \times 10^6$ (N/m)
$e$	0.2	$K_{CS}$	$1.0 \times 10^6$ (N/m)

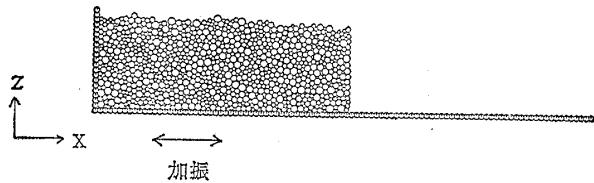


図-13 崖の崩壊解析用モデル

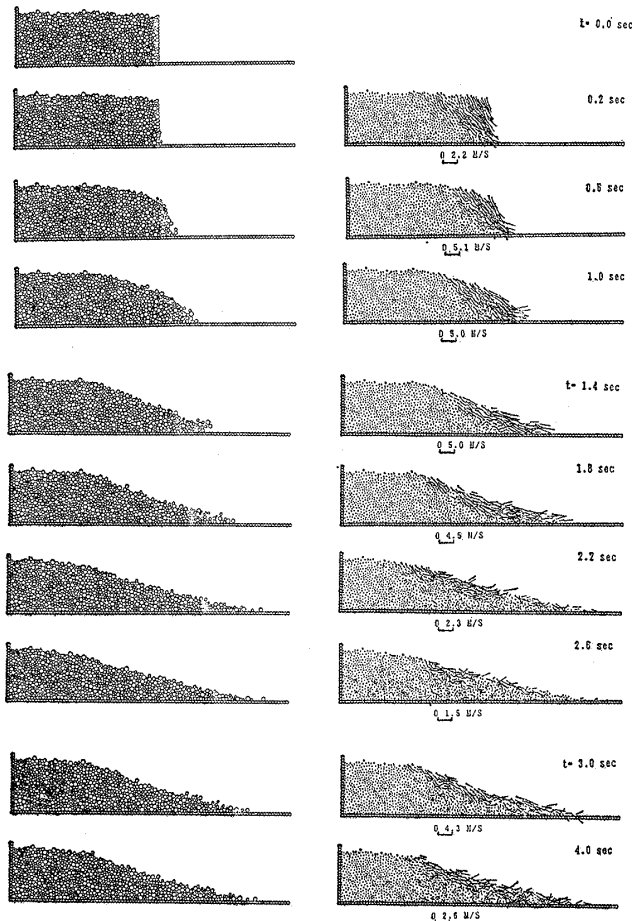


図-14 崖の崩壊 要素の分布 (左) と速度の分布 (右) (重力のみ, 粘土分なし)

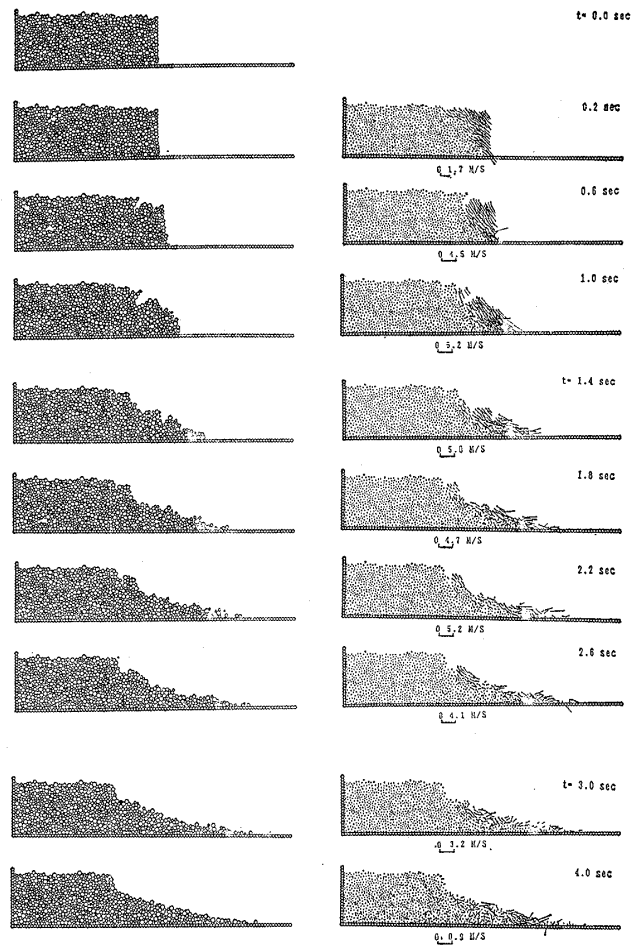


図-15 崖の崩壊 要素の分布 (左) と速度の分布 (右) (重力のみ, 粘土分あり, ひずみ限界 1%)

分布を図-15 に示す。0.2 秒では前の例と同様、はずした壁側の上部のくさび内の要素が動き出している。しかし、0.6 秒以降の結果は、まったく異なっている。速度の分布図をみると、崩れていく部分と崩れずに残る部分がはっきりとわかれている。崩れていく部分と崩れない部分の境界にある間隙のばねが破壊されている。要素の図でみると、崖に亀裂がはいり、そこを境として崩れていく様子がよくわかる。崩れていく部分の内部では、間隙のばねは残っており、一体のブロックとして挙動している。その後、崩れていくブロックは地山との衝突で複数のブロックに碎けながら落ちていき、地山の端のブロックが崩れて支えを失った部分が新たに塊りとして崩れていく様子が表れている。

地山の崩壊は 2 秒ほどで終り、それ以降は崩れた土砂が碎けながら転がっている。地山の残った露出面は、かなり急な角度になっているが、崩壊は終わっており、自立している。長野市の地附山の地滑り現場でも、このように崩壊後、急な斜面が露出していた。崩れていく部分も内部は堅固であり、衝突で破壊されるまでブロックのまま一体で挙動している。

これらの図から、崩れなかった地山の部分と崩れて堆

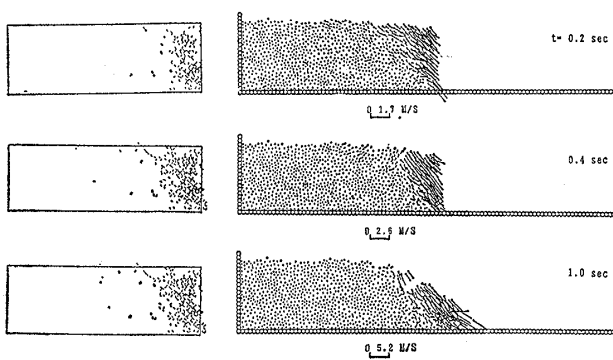


図-16 崖の崩壊 すべりの分布(粘土分あり)(左に 0.2, 0.4, 1.0 秒までにすべりを生じた地点, 右に 0.2, 0.4, 1.0 秒での速度分布を示す。)

積した部分がはっきりと区別できる。間隙ばねの図より、連続な部分と非連続になっている部分とがはっきりと区別できる。崩れて堆積した部分には、間隙ばねはほとんど残っておらず、粉々になっている。落下物のつくる傾斜の角度は、間隙ばねを用いない場合の角度とほぼ同じ  $15^\circ$  になっている。またひずみの限界が異なる場合でも角度は同じになっている。これは、落下物の中では間隙ばねの多くが破壊されており、元来の DEM 解析での要素が安定する斜面の角度  $\equiv$  安息角 ( $\phi=11^\circ$ ) が表れるためと思われる。このことより、間隙ばねを用いない場合には、崖がこの角度になるまで崩れ続けると思われる。崩れずに残った部分は垂直線と  $30^\circ$  をなしており、 $\pi/4 - \phi/2 = 40^\circ$  とはなっていない。

次に図-16 に 0.2, 0.4, 1.0 秒までにすべり(間隙ばねの破壊)を生じた場所を示す。右側には各時刻の速度分布を示す。崩れる部分ですべりが多数生じ、0.4 秒には左上がりて破壊が連続し、そこを境にブロックとなったまま崩れている。この境の線がいわゆるすべり線にあたると思われる。しかし、崩壊したブロック内の破壊にまぎれてしまい、明確には表れていない。この事より、崖崩れでも岩石の破壊実験の AE 法でみられるのと同様、まずあちこちで小さな破壊が多数生じ、その内から大破壊の面が形成されそこがすべり崩壊する、と思われる。

#### (2) 水平振動外力を加える場合

次に、外力が加わらない状態では自立している崖モデルに、地震動つまり振動外力が作用する場合の崩壊解析を行なう。(1)と同じモデルとする。要素間にある粘土分の効果を表す間隙ばねのひずみの限界値 DCR 2 を 3% より大きくすれば崖は外力を加えなければ自重で崩壊することはないので、DCR 2 は 5% とする。振動外力は図-13 に示すように、壁要素を振動させることでモデルに入力する。入力波には、簡単のため正弦波を用いることにする。

次に、ひずみの限界値 DCR 2 を 5% にあげた場合の

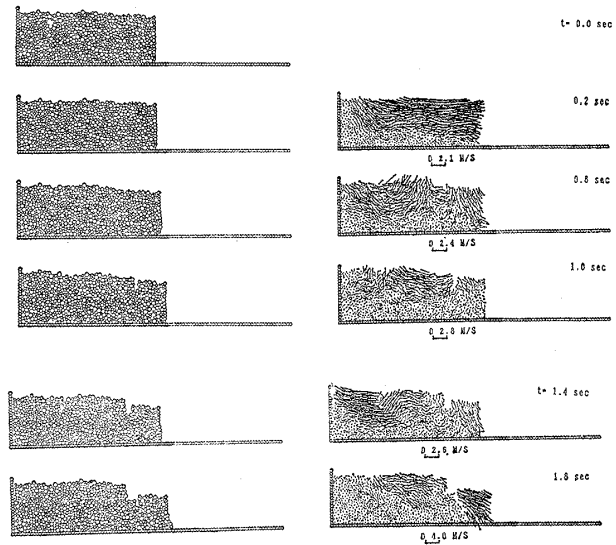


図-17 崖の崩壊 要素の分布(左)と速度の分布(右)(粘土分あり, ひずみ限界 5%, 外力として 2 Hz, 800 gal の正弦波加加速度を入力)

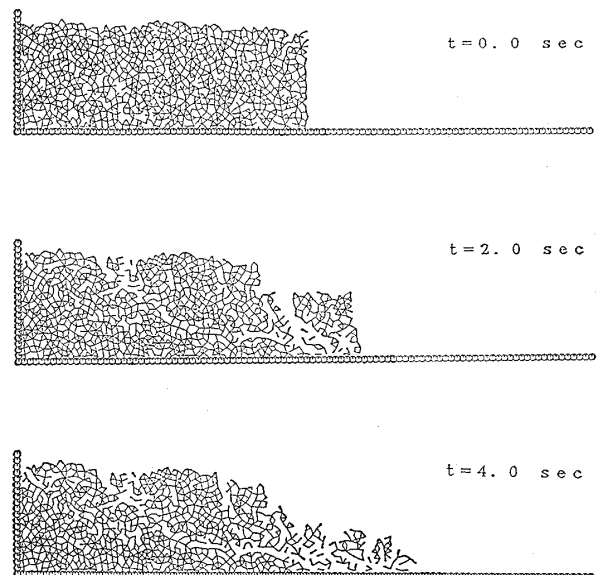


図-18 崖の崩壊の様子  
(図-17 の間隙ばねの分布を示す  $t=0.0, 2.0, 4.0$  sec)

結果を図-17 に示す。0.2 秒から 0.6 秒の間に崩れ始めている。また、1.4 秒では崖モデルの中央部に亀裂が生じているがすべり初めてはいない。1.8 秒には閉じている。この解析結果を間隙ばねの分布図により表示すると図-18 のようになる。この図のほうが、すべりの発生状況を明確に捉える事ができる。2 秒の分布図より左上から右下にかけてすべり線が生じかけていることがわかる。また、右側の崩れ落ちた部分は完全に崖本体とのつながりは失っている。4 秒になるとすべり線は一層明確になる。他にも 1 本表れている。解析を続ければすべり線上の間隙ばねがすべて破壊され、この線ですべり始めると思われる。

すべり線の付近では要素間にずれが生じ、見かけの体

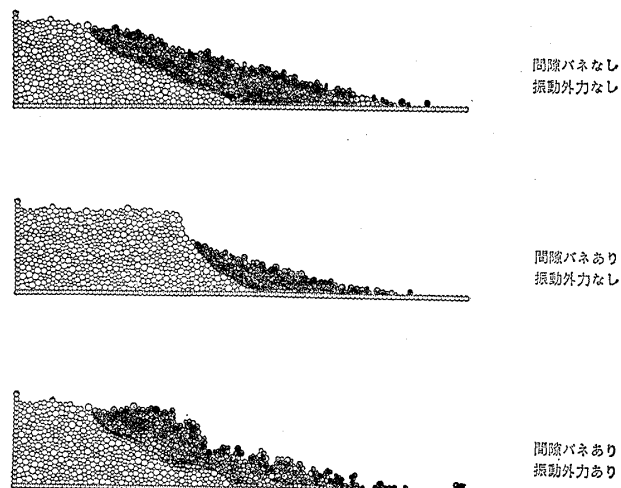


図-19 崖の崩壊 4.0 sec における全体の形状図 (20 cm 以上動いた粒子を少し濃く表示した)

積が増えている。これはダイランシーが表れていると解釈することができる。

図-19 に間隙ばねなし外力なしの例と、間隙ばねあり外力なしの例と、間隙ばねあり振動外力ありの例の結果を示す。4秒での要素の分布を示す。外力を加えると加えない場合に比べてずっと奥の要素まで変位していることがわかる。また、自重で崩れないようにモデルを堅固にしたため、崩落物のなかに間隙ばねで結合したままの要素の塊りが多く残り、斜面の角度は他の2例と異なっている。これは他の例では崩落物は間隙のばねなしで挙動しているのに、この例では塊りのまま挙動しているためと思われる。

### 5. 斜面の崩壊の2次元解析

図-20, 21 は垂直な崖ではなくて、斜面の場合水平地震力を受けると、どのような挙動をするかを示した。

図-20 は、斜面が 45° の場合で、図-21 は、30° の場合である。解析に用いたデータは、4. で用いたものと同じである。斜面の場合の特徴は、のり肩その他から、引張り亀裂が何条もほぼ平行して入ることである。全体としてのすべり線は、崖の場合とそれほどは変わらない。

### 6. む す び

DEM に間隙のばねを加えることにより、粘性土からなる崖の崩壊解析を行う可能性が得られた。崖の進行性破壊も再現することができ、すべり線を捉え、表すことが可能になった。

また、間隙ばねのひずみのレベルが実際の地盤のひずみのレベルに比べて大きいという問題があるがこれは、局所的ひずみは、平均的ひずみに比べてはるかに大きいためと思われる。

尚、CPU タイムは 2,000 ステップ、2 秒分の解析を

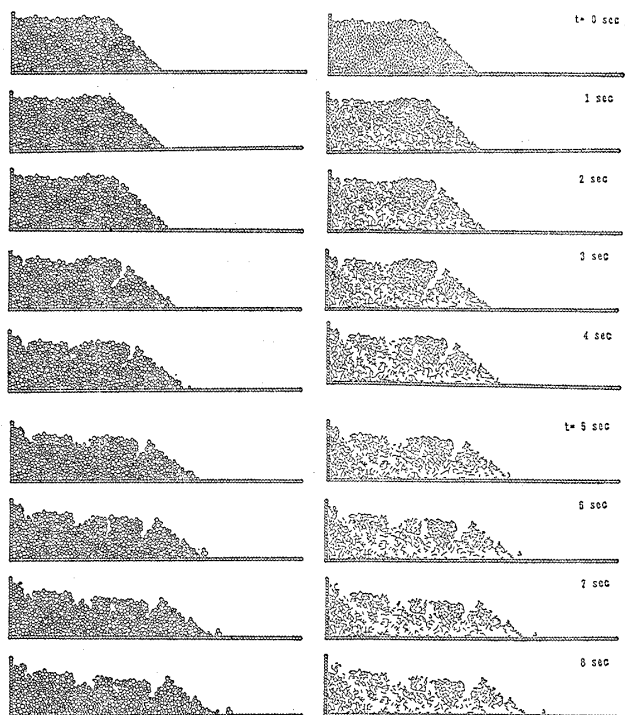


図-20 盛土の崩壊 (左図は要素の分布図, 右側は間隙ばねの分布図) (斜面の角度 45°, ひずみ限界 1.6%)

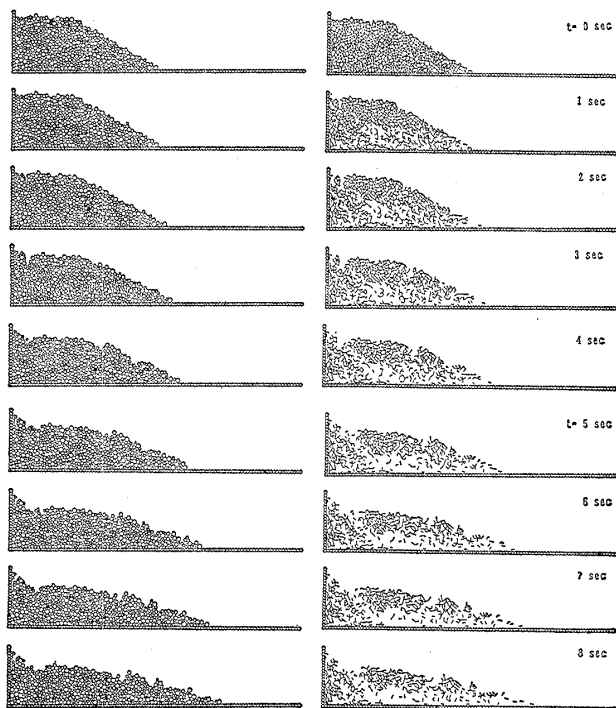


図-21 盛土の崩壊 (左図は要素の分布, 右図は間隙ばねの分布図) (斜面の角度 30°, ひずみ限界 1.2%)

行うのに HITAC M-280 H (17 MIPS, 16 MB) で 25 分であった。

### 参 考 文 献

- 1) 最上武雄 (1969): 「土質力学」, 技報堂.
- 2) 佐武正雄 (1985): "Graph-theoretical approach to the mechanics of granular materials," Proc. 5th Inter. Symp. on Continuum Models of Discrete Systems,

- pp.163-173.
- 3) Cundall, P. A. (1971): "A computer model for simulating progressive, large scale movement in blocky rocksystem," Symp. ISRM, Nancy, France, Proc. Vol.2, pp.129-136.
  - 4) Cundall, P. A. (1974): "Rational design of tunnel supports-A computer model for rock mass behavior using interactive graphics for the input and output of geometrical data," Technical Report MRD-2-74, Missouri River Division, U. S. Army Corps. of Engineers.
  - 5) 伯野元彦・平尾寿雄 (1973): 粒状体のランダムパッキングに関する一つの試み, 「土木学会論文報告集」, Vol.219, pp. 55-63.
  - 6) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. (1979): "A discrete numerical model for granular assemblies," Géotechnique, Vol.2, No.1, pp. 47-65.
  - 7) 木山英郎・藤村 尚・西村 強 (1982): Cundall モデルによる地表沈下の解析—地下浅所のトンネル掘削に伴う地表沈下—, 「土木学会第37回年次学術講演会概要集」, III部門, pp. 309-310.
  - 8) 木山英郎・藤村 尚 (1983): カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析, 「土木学会論文報告集」, Vol.333, pp. 137~146.
  - 9) Uemura, D. and Hakuno, M. (1987): "Granular assembly simulation with Cundall's model for the dynamic collapse of the structural foundation," Structural Eng./Earthquake Eng. Proc. Japan Society of Civil Eng., Vol.4, No.1, 155s-164s.
  - 10) Uemura, D. and Hakuno, M. (1987): "Granular assembly simulation for ground collapse," the Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Vol.62, pp.19-59.
  - 11) Casaverde L. M., Iwashita K., Tarumi Y., and Hakuno M. (1989): "Distinct element analysis for rock avalanche," Structural Eng./Earthquake Eng. Proc. JSCE, Vol.6, No.1, 130s-140s
  - 12) Hakuno, M. and Tarumi, Y. (1988): "A granular assembly simulation for the seismic liquefaction of sand," Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. JSCE, Vol.5, No.2, 156s-166s.
  - 13) Kishino, Y. (1988): "Disc model analysis of granular Media," Micromechanics of Granular Materials, edited by M. Satake and J. T. Jenkins, Elsevier, pp. 143-152.
  - 14) 井筒博明・木山英郎・藤村 尚・西村 強 (1986): 間隙水の挙動を考慮した DEM 解析, 「第 21 回土質工学研究発表会概要集」, pp.1621~1622.
  - 15) 川崎 了・木山英郎・藤村 尚・西村 強 (1986): 楕円形要素の DEM 解析に関する検討, 「土木学会第 41 回年次学術講演会概要集」, III部門, pp. 367~368.
  - 16) 足立紀尚・辻 賢之 (1986): 地震時の斜面崩壊機構に関する基礎的研究, 「第 21 回土質工学研究発表会概要集」, pp. 1559~1562.
  - 17) 西脇芳文・井上直洋・三室俊昭 (1987): 個別要素法の不連続性岩盤挙動解析手法への適用性に関する検討, 「土木学会第 42 回年次学術講演会概要集」, III部門, pp.444~445.
  - 18) 吉田 博・榎谷 浩・今井和昭 (1987): 個別要素法による落石の衝撃特性に関する研究, 「土木学会第 42 回年次学術講演会概要集」, I部門, pp.32~33.
  - 19) 井川忠彦・竹内則雄・三藤正明 (1985): 長野県西部地震による御岳崩壊の計算機シミュレーション, 「東京大学生産技術研究所水曜懇談会資料」.
  - 20) 藤村 尚・木山英郎・西村 強・池添 保 (1986): 岩石の DEM 定数決定のための落下反発試験, 「土木学会第41回年次学術講演会概要集」, III部門, pp. 369~370.