

現況総括

土の構成式に関する現況総括

6. 粒状体の構造とその変形モデル

(Constitutive Equation of Soils
6. Fabrics and Deformation Model of Granular Material)

小 田 匡 寛* (Masanobu Oda)

キーワード：ダイレイタンシー／土の構造／破壊
／変形／粒状体
IGC： D 3/D 6

6.1 ま え が き

粒状体は固体と液体の中間の性質を帯び、ある場合には固体のように挙動し、またある場合には液体のように流れる。このように粒状体の性質は複雑であり、一口で定義できるものではないが、その顕著なダイレイタンシー現象は、その材料の特質を端的に表わすものである^{1),2)}。したがって、そのダイレイタンシーを統一的に表現する構成式の研究は、粒状体の力学に課せられた最も重要な問題といえる。しかしその研究は、多くの先達の奮闘にもかかわらず、その緒についたばかりである。最近の10年の新しい傾向として、粒状体の複雑性の認識とあいまって、その中に隠された法則性・規則性を解明しようとする研究が、意欲的に取り組まれるようになった。粒状体の力学の研究は新しい段階に入った、といえる。この報告は、粒状体の構成式を微視的観点を踏まえて誘導しようとする時重要となる、次の項目についての最近の研究成果を概観したものである。

- | | | |
|-----------------------|---|-------------------------------|
| (1) 粒状体の構造と、変形に伴う構造変化 | } | (イ) 粒子間接点での法線 N_i の頻度分布 |
| | | (ロ) 粒子間力 |
| | | (ハ) 間隙比と接点数 |
| (2) 粒状体の変形モデル注1) | } | (ニ) 粒子の長軸の定方向配列 |
| | | (ホ) Newland-Allely-松岡による変形モデル |
| (3) 粒状体の応力とひずみ | } | (ヘ) Rowe-Horneによる変形モデル |

この報告では、粒状体の複雑さの中に隠された法則性・規則性を、できる限り明解に記述するように心がけた。従って、粒状体の本質を過度に単純化した部分を含んでいるかもしれないことを、まずおことわりしておきたい。また記述の範囲を粒状体の構造の視点のものに限定した。従って、粒状体の構成式に係るすべての問題を網羅して触れたものではない。特に具体的な構成方程式については、松岡氏によって総括的に述べられるはずである。

6.2 粒状体の構造特性と変形に伴う構造変化

小田³⁾によれば、均質な粒状体の粒子構造(Fabric)注2)は、(1) だ円の形状をした粒子の定方向配列 (Orientation fabric) と、(2) 構成粒子間の相互関係 (Packing) によって把握できる (図-6.1)。粒子間の相互関係は、(イ) 粒子間接点 (図-6.1 の c_i) での法線方向 N_i 、(ロ) 接点数、(ハ) 粒子間接点での粘着性、の3つの構造要素 (Fabric elements) によってさらに具体的に表わされる注3)。粒状体の構造特性が 図-6.1 に示す構造要素によって、必要かつ十分に記述し得るか否かについては、現在のところ不明である。しかし上述の構造要素のいずれも、粒状体の構成式や強度論の微視的考察にとって不可欠なものであることは、次の点を注意すれば容易に理解されよう。すなわち、「粒状体の変形や力の伝達は粒子間接点 c_i を介して行われ、従って、 N_i の分

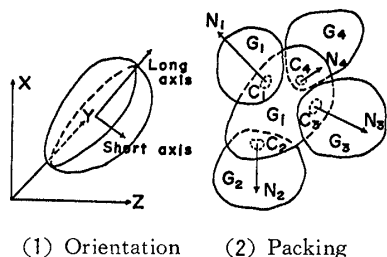
注1) 粒状体の変形モデルに関する研究を、(ホ)、(ヘ) の二つに分類することには多くの異論があろう。提案された変形モデルは、それぞれユニークであり、画一的に分類すべきではないかもしれない。ここでの分類は、研究の歴史を概観するためにとられた便宜的なものである。

注2) 不均質な粒状体は、巨視的な不連続面により、さらに小さい均質な領域に分けることができる。不均質な粒状体の力学特性は、均質な領域の力学特性のみならず、領域を区分する不連続面による巨視的構造にも依存する。

注3) 粒状体は無数の粒子の集合体である。従って、各構造要素は統計量を用いて記述される。例えば法線方向 N_i の記述は、 N_i の確率密度関数 $E(\alpha, \beta)$ を導入することによって行われる。

* 埼玉大学工学部建設基礎工学科 助手 (浦和市下大久保 255)

• この現況総括に対するディスカッションは昭和54年10月1日までにご投稿下さい。



(1) Orientation (2) Packing

図-6.1 粒状体の構造 (粒状体の構造は、(1)に示す長軸の方向と、(2)に示す粒子 G_i の他の粒子 G_1, \dots, G_4 との相互関係とによって定義される。)

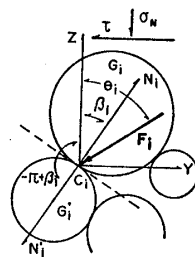


図-6.2 接点 c_i での法線 N_i, N_j と粒子間力 F_i (角度は時計方向に測られた場合を正とする。)

布、接点数、接点での粘着力の有無などは、粒状体の力学的性質を支配する最も基本的な要素である。]

上述の各構造要素が、粒状体の力学理論を微視的観点から構成する上で、いかなる実質的な意味を持っているか? 以下はこの問題に焦点を絞って話題を進めたい注4)。

6.2.1 接点での法線の頻度分布と変形による頻度分布の変化

接点 c_i での法線 N_i の頻度分布と、変形に伴うその変化に関する最近の知識は、粒状体の力学に関する物性論的研究の中でも、最も際立った研究成果の一つと考えられる。すなわち、 N_i の頻度分布は粒状体の変形に伴い敏感に変化し、この変化は、粒状体のダイレイタンス特性やモービライズされる応力比の変化と呼応しておくものであることが実験的に明らかにされた。

Biarez と Wiendieck^{4),5)} は、不規則な形状の粒子を二次元的にランダムに並べることにより、粒状体をモデル的に表わした。このモデルを用いて二軸的な圧縮試験を行い、各接点での法線 N_i の方向を多数計測し、その頻度分布を求めた。そして彼等は、粒状体の変形と N_i の頻度分布との間に興味深い関係を見出した。

今、丸棒のランダムは集合体を考える。粒子の個数はその中に十分あるものとする。一つの接点 c_i に2つの法線 N_i^1, N_i^2 が対応し、それぞれが鉛直軸 Z と β_i と $-\pi + \beta_i$ をなす (図-6.2)。(ただし、 β_i は時計方向に計られた場合を正とする。この定義は 図-6.5, 図-6.7 にも適用される。) β_i は $0 \sim 2\pi$ の範囲にあり、その確率密度関数を $E(\beta)$ で表わす。すると N_i が $\beta_i - \frac{1}{2}\Delta\beta \sim \beta_i + \frac{1}{2}\Delta\beta$ の範囲に入る確率は、 $E(\beta_i)\Delta\beta$ に等しい。ただし、 $\int_0^{2\pi} E(\beta)\Delta\beta = 1$ 。二軸圧縮試験では N_i の分布の対称性を考えれば、 $E(\beta)$ を $0 \sim 2\pi$ の範囲で考える必要はなく、 $0 \sim \frac{1}{2}\pi$ の範囲で考えれば十分である。Biarez と Wiendieck によって見出された関係を、変形によって漸次変化する $E(\beta)$ として、図-6.3 に示す。横方向からの圧縮 ((a) \rightarrow (b) \rightarrow (c)) と、軸方向からの圧縮

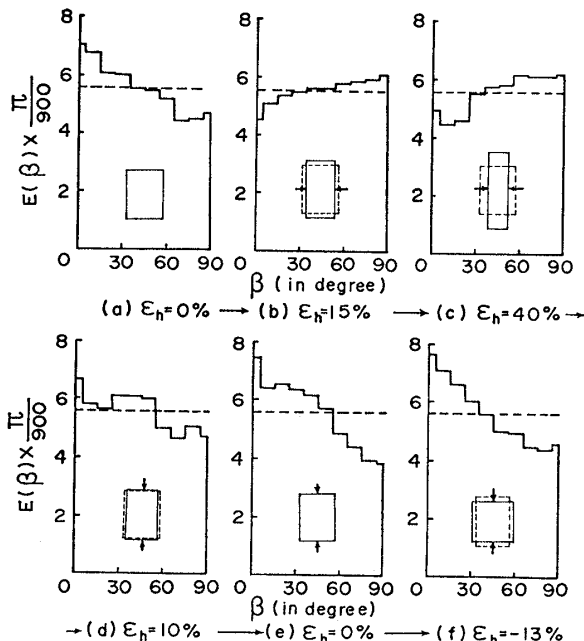


図-6.3 二軸圧縮変形に伴う $E(\beta)$ の変化⁴⁾ ((a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) は、横方向からの圧縮変形を示し、一方 (c) \rightarrow (d) \rightarrow (e) \rightarrow (f) は、軸方向からの圧縮変形を示す。図中の ϵ_h は、横方向からの圧縮変形量をパーセントで示す。)

((c) \rightarrow (d) \rightarrow (e) \rightarrow (f)) との変形で、確率密度関数 $E(\beta)$ がどのように変化するかを読み取れる。(Biarez と Wiendieck は、図-6.3 の意味を粒状体の Induced anisotropy との関連で述べている。) 図-6.3 の (a) は、載荷枠内に粒子を堆積させた時のものであり、 $\beta = 0^\circ$ で $E(\beta)$ が大きい (Inherent anisotropy)。しかし横方向から圧縮変形を加えると、Inherent anisotropy は消え ((a) \rightarrow (b)), $\beta = 90^\circ$ に新たな集中を生じる ((c))。 (このような変形によって生じた異方性を Induced anisotropy と呼んでいる。) 更にこの粒状体を軸方向に圧縮すると、 $\beta = 90^\circ$ に見られた集中はしだいに消え ((c) \rightarrow (d)), $\beta = 0^\circ$ に新たな集中が認められるようになる。図-6.3 からは、(1) 粒状体の変形はその構造変化 (特に N_i の頻度分布の変化) を伴い、(2) 圧縮変形最大の方向に N_i が集中する傾向にある、ことなどが読み取れる。

粒状体をアルミ丸棒やガラス棒の積層体でモデル化し、粒状体の力学的挙動を二次元的に観察するのは、魅

注4) 粒子間接点 c_i での粘着力の有無は、特に粒状体の強度を論ずる場合、不可欠な構造要素である。この報告では、非粘性材の問題に焦点を絞っているので、接点での粘着力に関しては深く言及しないことにする。

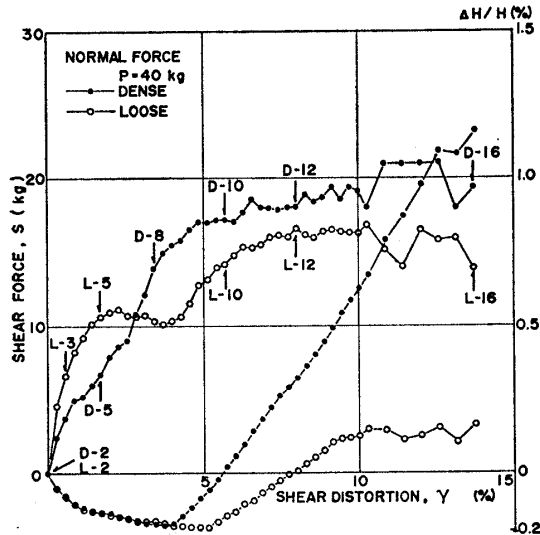


図-6.4 光弾性丸棒の二次元積層体の単純せん断試験^{11),13)}
(L-2, L-3, …などの記号は、光弾性写真を用いて解析した位置を示す。●-●-は、初期間隙比を0.22とする密詰めの場合を、また○-○-は、初期間隙比を0.26とするゆる詰めの場合をそれぞれ示している。)

力的な方法である。特に Dantu⁶⁾, 若林⁷⁾, 村山と松岡^{8),9)}, 松岡¹⁰⁾, 小西^{11),12)}, 小田と小西¹³⁾, Drescher と de Jong^{14),15)}, 梅屋^{16),17)}らは、更に光弾性の解析技術を導入して、粒状体の研究に特筆すべき成果をもたらした。ここでは、小西^{11),12)}, 小田と小西¹³⁾の研究から引用しよう。

小西は、光弾性材料であるエポキシ樹脂から丸棒(直径; 6 mm, 8 mm, 10 mm)を作り、それを用いて二次元積層体(幅 156 mm×高さ 156 mm)の単純せん断試験を行った。図-6.4 に示す二次元積層体の応力~ひずみ~ダイレイタンスー関係は、砂の単純せん断試験のものと同様である。このことから砂のような粒状体は、二次元積層体によってモデル的に表わせるものと考えてよい。図-6.4 に L-2, L-3, …の記号で示す载荷ステップごとに、 N_i の頻度分布をもとめると共に、光弾性等色線縮写真を撮り、粒子間力の大きさやその方向を観察した。図-6.5 は、せん断応力 τ の増加による N_i の頻度分布の逐次的変化を示している。せん断応力を Y 軸の負方向に増すと、(1) N_i の集中度が増すと共に、(2) その集中方向は、Z 軸の方向から Y 軸に $+45^\circ$ をなす方向へと回転するのが見られる。光弾性写真の解析によると、 N_i の集中方向は最大主応力方向と概ね一致しており、集中方向の回転は主応力軸の回転と呼応しておこるらしい。村山と松岡⁸⁾⁻¹⁰⁾は、粒子間力の節で述べるように、図-6.5 と定性的に一致する結果を報告している。

変形している粒状体では、各接点を (1) 新たに発生する接点、(2) 消滅する接点、(3) すべりながら接点角 β を変える接点、(4) 変化しないでそのまま止まる接点、

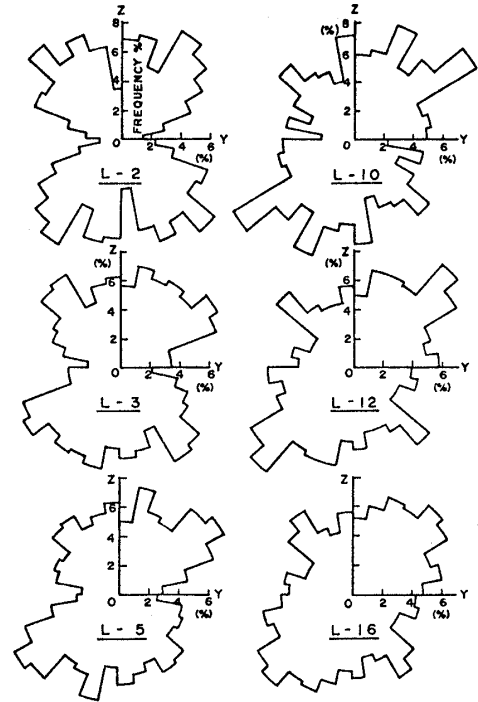


図-6.5 単純せん断変形に伴う N_i の頻度分布の変化^{11),13)}
(L-2, L-3, …の記号は、図-6.4 を参照のこと。)

の4種に区分することができる。その各々は、せん断の進行で異なった割合で存在し、その割合の変化は、図-6.5 に示す全体としての構造変化をもたらす。発生接点と消滅接点とを区別して観察し、その結果から粒状体のせん断機構を探る研究は、大槇¹⁸⁾, 竹田ら¹⁹⁾によって試みられた。一般にせん断力に抵抗しやすい方向の接点は発生し、反対に抵抗しない方向の接点は消滅するらしい。このことは、図-6.5 に示される傾向とよく一致する。

丸棒の二次元積層体の研究から粒状体の力学的性質を解明しようとする試みは、モデルとしての限界を十分に認識して行わねばならない。モデル実験から得られた結果は、実際の粒状体との比較を通して、正しく評価されるべきである。三次元粒状体の N_i の頻度分布に関する研究は、Field²⁰⁾, 小田²¹⁾⁻²⁴⁾, 小田と小西¹³⁾, Borowicka²⁵⁾らによって報告されている。

小田²²⁾は、相馬砂を突き棒で詰めた供試体について排水三軸圧縮試験を行い、ユニバーサル・ステージ付きの顕微鏡を用いて、法線 N_i の三次元の測定を行い、その結果から、供試体の変形に伴う $E(\beta)$ の変化を報告した。(砂の N_i 分布は、実際には三次元的である。従ってその確率密度関数は、 $E(\alpha, \beta)$ で表わせる。しかし N_i の分布が最大主応力軸に対して軸対称となるので、 $E(\alpha, \beta)$ は α に依存せず、 $E(\beta)$ の形で書ける。ただし β は、 N_i と最大主応力軸とのなす角である。) その結果によると、二次元積層体の場合(図-6.3)と同様に、主応力軸方向($\beta=0^\circ$)への N_i の集中が変形に伴って著

しくなることを示した注5)。このような最大主応力軸方向への N_i の集中は、砂に作用している主応力比やダイレイタンス特性と不可分な関係にあることが、実験的に確かめられた。

図-6.3, 6.5 に示す事実は、粒状体の微視的な変形の機構やひずみ硬化の機構を考察する上で、極めて重要である。Newland と Allely²⁶⁾, Rowe^{27),28)}, Horne^{29),30)}, 村山と松岡^{8)~10)}, 小田^{31),32)}, 徳江ら³³⁾ によって提案された粒状体の応力比~ダイレイタンス関係は、図-6.3, 6.5 において示される事実に理論の實質的な基礎を持つ、といっても過言ではない。

6.2.2 粒子間力

粒状体の構成式を微視的観点から導くには、粒子と粒子の間の接点で作用する力（粒子間力と呼ぶ）に関する知識を必要とする。高次に不静定な構造の粒状体では、各接点に作用する力を決定論的に議論できないのが普通である。（たとえなんらかの仮定の上にそれが可能であったとしても、粒状体の実際の問題とは掛け離れたものとなる³⁴⁾）従って、粒子間力に関するある種の単純化が必要となり、その上に立って理論展開がなされる。このような粒子間力についての単純化の正当性は、しかしながら、なんらかの方法で実験的に検証されなければならない注6)。粒子間力の問題は、粒状体の力学を構成する上で、最も基本的な研究部門である。

粒子間力の研究には、光弾性丸棒の積層体によるモデル実験が、極めて有力である。村山と松岡^{9)~10)}は、エポキシ樹脂の丸棒（直径；6.2 mm と 10 mm）の積層体を用いて、直接せん断試験を行った。彼等は法線 N_i の頻度分布を求めるとともに、粒子間力の大きさを等価縞次数注7)で表わし、それらを N_i の鉛直軸 (σ_N の方向と一致) とのなす角 β との関係として 図-6.6 を示した。図-6.6(a)は、せん断前 (K_0 -圧密状態に対応) の粒状体から得られたものであり、一方 図-6.6(b) は、せん断後から得られたものである。（ただし β は鉛直軸から時計方向を正とする。）

N_i の頻度分布を見ると注8)、せん断前ではほぼ左右

注5) 松岡の丸棒積層体に関する二軸圧縮試験によれば、最大主応力軸と若干傾いた方向に、 N_i の集中のピークが認められるという（私信）。

注6) この点に関連して、次の点は注意すべきである。微視的考察から得られた構成式が、実際の粒状体の挙動のある側面を説明し得たとしても、そのことによって、微視的考察全体の妥当性が保証されたことにはならない。なぜならば、異なる微視的考察から、みかけ上ほぼ同種の構成式を導くことが可能なためである。

注7) 実験は2種の径の光弾性丸棒を用いて行われた。径の違う丸棒に同じ粒子間力が作用しても、粒子径に逆比例した縞次数が観測される。図-6.6 では、縞次数を相互に比較できるように、粒径による縞次数の補正を加えたものを示している（等価縞次数と仮称）。

注8) 図-6.5 と 図-6.6 とで N_i の頻度図に質的な違いがある。図-6.5 の場合、接点 c_i はせん断領域の全体から無作為に抽出されたのに対し、図-6.6 の場合、仮定されたすべり面に沿って抽出されている。

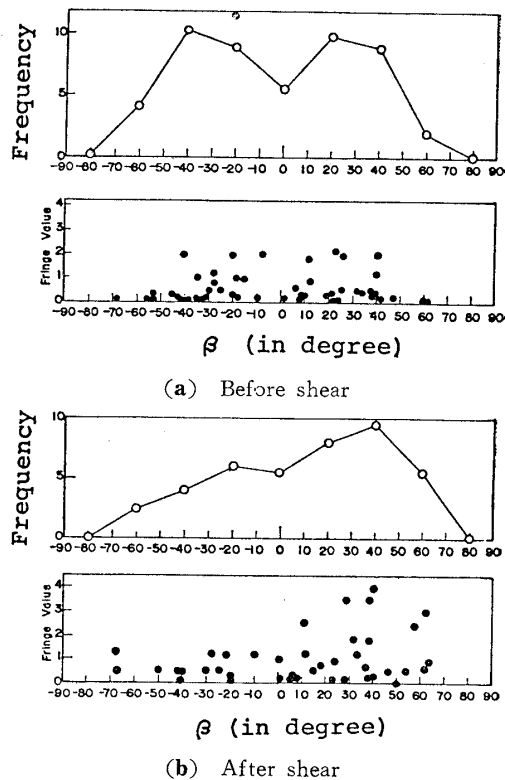


図-6.6 法線 N_i の頻度分布と粒子間力⁹⁾（二次元光弾性丸棒の積層体に関する一面せん断試験の結果を示す。）

対称とみなせるのに対し、せん断後では β の正の方向に偏っている。このような頻度分布の偏りは、図-6.5 に示す N_i の集中方向の回転と対応しており、主応力軸の回転と関係するらしい。図-6.6 に示されたいま1つの重要な事実は、大きい縞次数の接点が N_i の頻度の高い β でみられることである。図-6.6(b) の例でいえば、 $\beta = +40^\circ$ の近傍で N_i の頻度は最大であり、また同時に、その中には高い縞次数の接点が含まれている。村山らはデータをさらに整理して、「ある角度範囲内に法線を持つ接点を介して伝達される粒子間力の合計は、その角度範囲内にある接点の頻度の2乗に比例する」と結論している。単純せん断試験の粒子間力を解析した小西¹¹⁾も、この結論を支持している。

粒子間力はベクトル量であり、従って、その絶対値 F_i と作用する方向とによって定義される。今、任意の接点 c_i での法線 N_i と粒子間力の方向とが鉛直軸となす角を、それぞれ β_i, θ_i とする（図-6.2）。そこで、Mobilized angle (仮称) δ_i を次式で定義する。

$$\delta_i = \theta_i - \beta_i \quad (6.1)$$

ある接点で $\phi_\mu = |\delta_i|$ の関係が成立すれば、その接点はすべりの状態にある。（ただし ϕ_μ は物理摩擦角とする。）また $\phi_\mu > |\delta_i|$ であれば、その接点は少なくともすべりの状態にはないと判断される。このように Mobilized angle δ_i は明確な力学的意味を持ち、粒状体の力学の理論構成上極めて重要な役割を担っている。

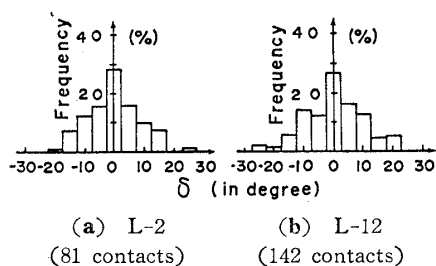


図-6.7 Mobilized angle δ の頻度分布¹²⁾ (L-2, L-12 の記号は, 図-6.4 を参照のこと。)

変形している粒状体で δ はどのような値を取るか? この疑問への答は, 光弾性丸棒の単純せん断試験 (図-6.4 参照) を解析した小西^{11),12)}, 小田と小西¹³⁾ によって示された (図-6.7)。図-6.7 は, δ の頻度分布を示している。図-6.7 (a) は, せん断前の K_0 -圧密状態にある粒状体から得られたものであり, 一方 図-6.7 (b) は, 巨視的にみて破壊の状態にある粒状体から得られたものである。図-6.7 (a), (b) はともに, (1) δ の大部分は -25° から $+25^\circ$ の範囲で分散し, (2) $\delta=0^\circ$ に鋭いピークを持ち, (3) 左右対称の分布をなす, などの特徴を持っている。実験によれば, 光弾性丸棒の物理摩擦角 ϕ_μ は約 22° である。巨視的にみて破壊の状態にある粒状体においても (図-6.7(b)), $|\delta|=\phi_\mu$ の条件を満たす接点の占める割合は, 意外なほど少ない。「完全に塑性の状態にある粒状体においても, すべりの状態にある接点の占める割合は少ない」という事実は, 「粒状体の塑性変形は, 比較的少数のすべっている接点によって支配される」と解釈できる。

主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を受けた粒状体で, 任意の接点 c_i を考える。 c_i の法線 N_i は, 主応力軸に対して (l_i, m_i, n_i) の方向余弦で表わせる。 c_i で作用する粒子間力は確率変数であり, 決定論的には議論できない。しかし (l_i, m_i, n_i) の方向に法線 N_i を持つ接点 $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ij}, \dots$ を特に取り出し, 各接点に作用している力 F_{ij} の平均値 \bar{F}_{ij} を考える。 \bar{F}_{ij} は, (1) 作用している応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 状態, (2) 主応力軸に対する法線の方向 (l_i, m_i, n_i) , (3) 粒子の幾何学的配列 $(k_1, k_2, \dots, k_i, \dots)$ の関数と考えてよい。今, \bar{F}_{ij} の主応力軸方向への成分を $\bar{F}_{ij}^1, \bar{F}_{ij}^2, \bar{F}_{ij}^3$ とすれば, それらは次の一般式で書ける。

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{ij}^1 &= f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, l_i, m_i, n_i, k_1, k_2, \dots, k_i, \dots) \\ \bar{F}_{ij}^2 &= f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, l_i, m_i, n_i, k_1, k_2, \dots, k_i, \dots) \\ \bar{F}_{ij}^3 &= f_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, l_i, m_i, n_i, k_1, k_2, \dots, k_i, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

(6.2) 式の最も簡単な形のものとして, 次式を考える。

$$\bar{F}_{ij}^1 = k_1 l_i \sigma_1, \quad \bar{F}_{ij}^2 = k_2 m_i \sigma_2, \quad \bar{F}_{ij}^3 = k_3 n_i \sigma_3 \quad (6.3)$$

小田²³⁾, 小田と小西³⁵⁾, 小西¹²⁾によれば, (6.3) 式から

得られる粒子間力の平均値 \bar{F}_{ij} は, 光弾性の解析から得られる粒子間力の方向角 β ($\cos \beta = l$) による変化をよく説明する。

6.2.3 間隙比と接点数

よく締まった粒状体は, 一般に大きい強度を持つ。この経験的事実から, 粒状体の力学的性質を支配するものとして, 間隙比の重要性は古くから認識されていた。最上^{36)~38)}は, 粒状体の力学特性を明らかにする上で, 平均間隙比のみならず, その標準偏差の重要性を最初に指摘した。また Cowin³⁹⁾は, 間隙比の場所的变化率の概念を導入して, 粒状体の flow の理論を展開した。

最上らの理論に呼応して, 間隙比の観点から粒状体の力学特性をとらえようとする試みが, 活発に討論された。最上と今井⁴⁰⁾は, 大きさの等しい鋼球を準平面状態に並べ, 光電管を利用して間隙比の平均値と偏差を測定し, この種の問題に先鞭をつけた。また落合と山内^{41),42)}は, アルミ丸棒の二次元積層体 (幅 10 cm × 高さ 20 cm) の圧縮試験を行い, 変形に伴う間隙比の場所的变化を調べた。図-6.8 は, 軸ひずみ ϵ_a の 0% から 5.5% への増加に伴って生じる間隙比の場所的变化を, 間隙比の頻度図の変化として示している。与えられた変形量によって, 間隙比の平均値や頻度分布の形に変化を読み取ることができる。

三次元的な実際の粒状体で間隙比の場所的变化を調べるには, (1) X線, γ 線による方法^{43),44)}, (2) 粒状体の二次元断面を観察する方法²³⁾, (3) 含水比の変化を測定する方法, などが考えられる。また間隙径の分布の測定には, (1) 多孔体に吸水させて毛細管上昇を利用する方法⁴⁵⁾や, (2) 水銀圧入法⁴⁶⁾, などによっている。

間隙比の平均値やその偏差が, 粒状体の構成式になん

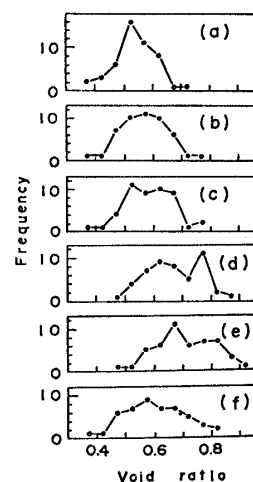


図-6.8 アルミ丸棒の積層体の二軸圧縮試験による, 変形に伴う間隙比分布の変化^{41),42)} ((a) $\dots \epsilon_a=0\%$; (b) $\dots \epsilon_a=1\%$; (c) $\dots \epsilon_a=2.5\%$; (d) $\dots \epsilon_a=4\%$; (e) $\dots \epsilon_a=4.5\%$; (f) $\dots \epsilon_a=5.5\%$ 。ただし, ϵ_a は軸ひずみを意味する。)

らかの形で関与するのは間違いない。しかし、理論構成にさいしてどのような形式で導入すべきかは、模索の段階にあるといってよい。現在、粒状体の理論として知られているものの多くは、接点角の分布、接点での力の釣合いなどの限られた情報を基礎として構成されている。ある意味ではこれらの情報は、粒状体の特性を把握する上で極めて不十分なものであり、従って、得られた理論は粒状体の限られた側面を説明するのみである。例えば、Rowe-Horne による応力比-ダイレイタンス式は、Horne^{29),30)} によってすでに指摘されたように、応力-ひずみの関係に積分できない。応力-ひずみの関係を得るには、粒状体の微視的構造や変形機構に関するより豊富な情報を必要とする。

粒子1つあたりの接点数 n は、粒状体の構造の観点からみれば、間隙比とほぼ同じ意味を持っている。ランダムな球粒子の集合体の接点数に関する研究は Smith⁴⁷⁾ から始まり、その後、平均接点数 \bar{n} と間隙比との相関関係について、多くの報告がなされた^{48)~50)}。最近の研究を整理して以下に述べよう。(1) 平均接点数 \bar{n} は、粒状体の粒度組成とは無関係に、平均間隙比と良い相関関係を示す^{20),51)}。(2) 接点数の標準偏差は、粒状体の粒度組成によって異なり、構造の不均一性を示す1尺度とみなせる⁵¹⁾。(3) 粒状体の強度は、接点数の平均値と標準偏差を考慮することによって、正しく評価できる⁵¹⁾。

宇野と西⁵²⁾ は、アルミ丸棒の積層体を用いて二軸圧縮試験を行い、せん断変形に伴う接点数の変化を報告した。また Wilkins⁵³⁾ や Sadasivan⁵⁴⁾ は、接点数についての実験を基礎に、粒状体の強度論を展開している。この方面の研究は、粒状体の力学で究明すべき分野として、今後特に重要となろう。

6.2.4 粒子の長軸の定方向配列

粒子の長軸の定方向配列は、(1) X線照射による方法^{55),56)}、(2) 粒状体の二次元断面上で見掛けの長軸を観察する方法^{21)~23)}、などによって調べられる。一般に粒状体の構成粒子は、棒状、板状を呈する。このような粒子を堆積させれば、粒子の長軸は水平面と一致するように配向し、またその配列強度は、粒子の形状が扁平な程著しい⁵⁷⁾。このような粒子の定方向配列は、微視的構造の異方性を意味しており、従って、当然のことながら粒状体の構成式は、この異方性を表現するパラメーターを含んだ形式によって記述されなければならない。粒状体の強度異方性については小田^{21),57)} や Arthur^{58),59)} によって詳しく調べられている。また異方性を加味した応力比-ダイレイタンス理論は、龍岡^{60),61)} によって発表された。

粒状体の粒子の定方向配列は、変形に伴ってどのように変化するものであろうか？ この問題は、粒状体の変

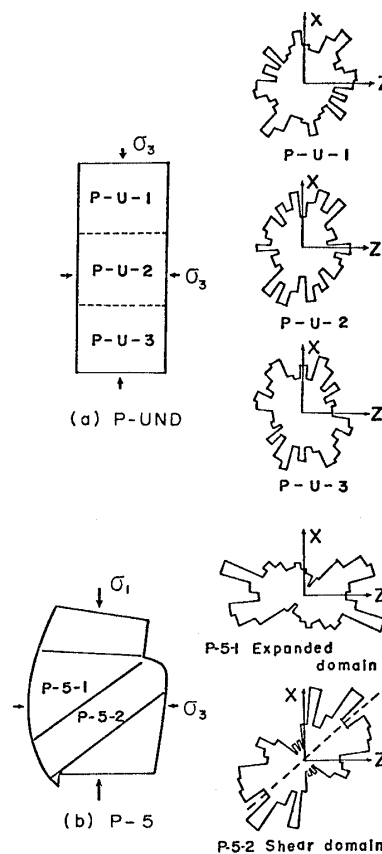


図-6.9 相馬砂の三軸圧縮変形に伴う Orientation fabric の変化²³⁾

形機構や Induced anisotropy の性質などを考える上で、重要である。粒状体の変形機構が純粋に接点でのすべり変位のみであるならば、粒子の定方向配列の変形に伴う変化は無視できよう。図-6.9 (a), (b) は、鉛直断面上で観察される砂粒子の見掛けの長軸の定方向配列を、ローズ・ダイアグラムで示している²³⁾。相馬砂を突き棒で詰め、それに等方圧 $\sigma_3=1.0 \text{ kg/cm}^2$ を加えた供試体とその鉛直断面上で観察すると、見掛けの長軸はどの部分を取ってもほぼランダムである(図-6.9 (a))。その供試体を、排水三軸圧縮 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$) の条件で、残留強度の状態にまで載荷すれば、図-6.9 (b) に示す長軸の配向性が現れる。すなわち、供試体の中央部 (Expanded domain) では、見掛けの長軸は最大主応力軸に垂直な方向に卓越し(図-6.9 (b) の P-5-1)、また巨視的にみたとすべり領域内 (Sheared domain) では、すべり面の方向に配向するのがみられる(図-6.9 (b) の P-5-2)。この事実は、粒状体の変形機構の一つとして、粒子回転が無視できないことを示すとともに、Induced anisotropy の重要性をも明らかにしている。

落合と山内^{41),42)} は、先に述べたアルミ丸棒の積層体を用いた二軸圧縮試験において、6.5%の軸ひずみを与えて約 20° の土粒子の回転を観察している。また Roscoe と Schofield⁶²⁾ は、二次元土槽のガラス壁面近傍にある

砂粒子の回転現象を観察し、変形機構の一つとして土粒子回転の重要性を主張した。Rowe, Horne に代表される砂の応力比-ダイレイタンスー式は、いずれも接点におけるすべりを唯一の変形機構として導かれ、粒子回転についての考察は不十分な場合が多い注9)。Horne が主張するように、粒状体の変形機構の中で粒子回転の占める役割は、あるいは小さいのかもしれない。しかし、回転に関する考察を省略した理論は、それなりの限界を持つものであることを知らねばならない。

6.3 粒状体の変形モデル

粒状体の変形モデルは、その構成関係とその微視的観点から樹立する上で、前提となる。Newland と Allely²⁶⁾ による重要な研究が発表されて以来、粒状体の変形モデルについて活発な議論が展開されてきた。それらの研究を、便宜上、次の二つのグループに分類してみる注10)。その一つは、粒状体の変形の各段階で、すべり面、あるいは Potential sliding plane^{注11)} を a priori に仮定するグループである。このグループの考えは、粒状体(砂)のダイレイタンスーモデルとして Newland と Allely によって最初に提案され、松岡^{8)~10)}によって発展させられた。特に松岡^{67)~70)}による SMP (spatial mobilized plane) の導入は、このグループの特徴を端的に表わしている。他の一つは、Rowe^{27),28)} と Horne^{29),30)} の研究で代表される。Rowe による次の文章は、後者のグループによって支持されている。“Initiation of slip line in an element of granular assembly is the result of failure and does not occur at the peak stress state”。

6.3.1 Newland-Allely-松岡による変形モデル

Newland と Allely による変形モデルを 図-6.10 に示す。構成粒子は、図-6.10 (b) の折れ線で示す巨視的なすべり面あるいは Potential sliding plane に沿って、すべり破壊を起こすと考えられる。粒状体のダイレイタンスー現象は、図-6.10 (b) に示すブロック (1) と (2) の間に新たに生じる間隙として説明される。また破壊後のせん断抵抗の減少は、接点角の変化によるものである。村山と松岡は、さらに、破壊前のせん断抵抗の増加

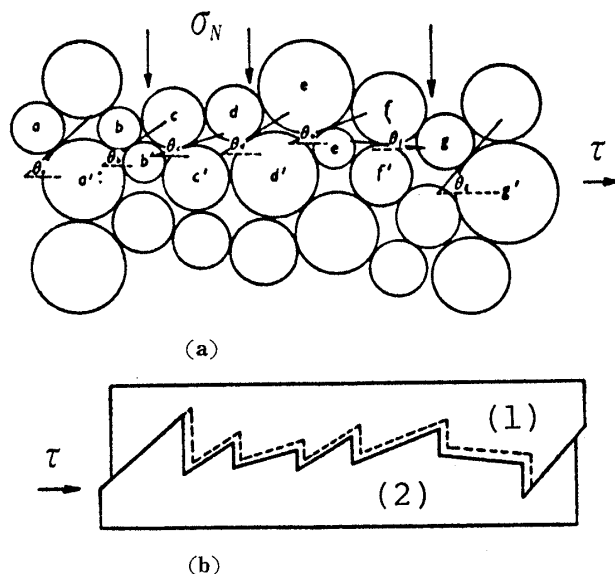


図-6.10 Newland と Allely による粒状体の変形モデル

(ひずみ硬化)を、変形による接点角の頻度分布の変化として説明した。すなわち、ひずみ硬化の現象は、すべりに対して抵抗の大きい接点の相対的な増加としてとらえることができる。Newland-Allely-松岡によるこの変形モデルは、実験的に検証されるとともに、更に肉付けされ、現実的な変形モデルとして、広く受け入れられている。また土質力学者の多くも、図-6.10 に示された変形モデルは、粒状体のダイレイタンスー現象をよく説明すると考えている。以下に、このモデルの妥当性について検討してみる。

(1) ある面(すべり面)に沿って粒子が最も活発に活動したとしても、その面はどのような性質を持つであろうか? 図-6.10 を支持する研究者の大多数は、作用している垂直応力 σ_N とせん断応力 τ との比 τ/σ_N がこの面上で最大になる、と考えている。しかし最近の研究では、すべり面あるいはせん断ひずみの最も卓越する面は Zero-extension 線(あるいはひずみ速度の特性線)と一致するとする実験結果も多く報告されている⁷¹⁾。すべり面の現代的解釈については、粒状体の力学の観点から、今後更に検討してみる価値のある問題である。砂の直接せん断あるいは単純せん断試験においては、従来、せん断応力 τ を加える面上で、 τ/σ_N が常に最大となると考えられてきた。この考えの正しくないことは、Cole⁷²⁾、小田と小西¹³⁾、落合^{73),74)} などによって指摘されている。いずれにしても、破壊前の粒状体に、すべり面あるいは Potential sliding plane を a priori に仮定することは、図-6.10 の変形モデルの一つの問題である。

(2) 巨視的すべり面の上にある接点は、図-6.10 の変形モデルに従う限り、すべりの条件 $\phi_\mu = |\delta|$ を満足しなければならない。また図-6.10 に示すような左から右へのせん断を考えると、すべっている接点の力の方向

注9) Rowe⁶³⁾ は、小田の論文に対する discussion の中で、彼の応力比-ダイレイタンスー式は、その変形機構として粒子回転をも考慮した一般的な関係式である、と主張した。しかし、その粒子間力の推定やひずみ増分の計算は、粒子の回転を無視することによって初めて可能なものである。

注10) この分類はあくまで便宜的なものであることを再度強調しておく。

注11) Potential sliding plane の定義や解釈は、研究者によって色々である。ここでは、微視的にみて粒子が最も活発に動く平均的な面と考えておく。(このような面は、一般に、 $(\tau/\sigma_N)_{\max}$ -面と一致するとみなされている。)例えば村山^{64)~66)}は、 $(\tau/\sigma_N)_{\max}$ -面を粒子状態や粒子挙動の確率量を測る基準面と考えており、ここでいう Potential sliding plane とは異なる。

角 θ_i は、少なくとも接点の方向角 β_i よりもその絶対値において大きくなければならない。従って、次の不等式が成立する（ただし、時計方向に角度を測った場合を正とすることに注意（図-6.2））。

$$\delta_i = \theta_i - \beta_i < 0 \quad (6.4)$$

(6.4) 式が成立するとすれば、すべり線に沿った接点での δ_i は、著しく負に偏った値を取るはずである。小西による光弾性丸棒の積層体の単純せん断試験の解析によれば、 δ の頻度分布はほぼ左右対称をなし、また $\phi_\mu = |\delta|$ の条件を満たす接点の全体に占める割合は極めて小さい、ことなどが明らかにされている注12)。これらの事実は、図-6.10 の変形モデルの問題点として指摘できる。

6.3.2 Rowe-Horne による変形モデル

Rowe は球粒子の規則配列の粒状体について研究し、応力比 σ_1/σ_3 、ひずみ増分比 ϵ_3/ϵ_1 、粒子構造を表わすパラメーター $\tan \alpha$ 、の間に次の関係が成立することを示した。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} &= \tan \alpha \cdot \tan \left(\phi_\mu + \frac{\pi}{4} - \beta \right) \\ \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} &= \tan \alpha \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

ただし式中の β は、すべりの状態にある接点の方向角である。(6.5) 式は等しい球の規則配列の粒状体について導かれたものであるが、Rowe は不規則配列のものにも拡張して用いることができると考えた。しかしこの拡張は、(6.5) 式の β を $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \phi_\mu$ の方向に固定することによって、初めて可能なものである。Horne は、Rowe の変形モデルをさらに詳しく調べ、その力学モデルとしての妥当性を論じた。彼等による変形モデルは、次の3点にその特徴を読み取ることができる：(1) 粒状体の変形を接点における微視的なすべり変位によるものとし、粒子回転によるひずみ成分は考えない。(2) すべりの接点を $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \phi_\mu$ の方向を法線 N_i とする接点に限定する。(3) 粒状体の中で、すべりの状態にある接点の占める割合は小さい。

Rowe と Horne による変形モデルは、Newland と Alley のモデルのように、巨視的な Potential sliding plane を必要としない。しかし、すべりの状態にある接点の法線は、主応力軸とつねに $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \phi_\mu$ の角をなさねばならない。この点は、Rowe-Horne モデルの特徴であるとともに、基本的な限界ともみられる⁷⁵⁾。なぜならば、粒状体の変形モデルとしては、もっと自由度の大き

注12) 村山⁶⁴⁾⁻⁶⁶⁾の研究では、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって存在する粒子の中から $\phi_\mu = |\delta|$ の条件をみたす粒子の発生確率を求め、粒子のせん断に伴う動きを解析している。このことは、確率論的考察を進めることによって Newland-Allely-松岡モデルはさらに改良できることを示している。

い機構がよりふさわしい、と直感的には考えられるからである。小田³¹⁾や橋口⁷⁶⁾は、 $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \phi_\mu$ の関係を別の観点から誘導し得るとしているが、議論がつくさされているわけではない。Rowe-Horne モデルでは、 $\phi_\mu = |\delta|$ の条件は限られた少数の接点で満たされていればよい。この点は小西による実験結果とよく一致している。しかし $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \phi_\mu$ の接点にすべりを拘束する点には、実験的な検証はない。

6.4 粒状体の応力とひずみ

粒状体の力学といえども、その構成関係は、連続体の力学で使われる応力-ひずみによって記述される。しかし応力、ひずみの概念は、当然のことながら、連続体の力学と粒状体の力学とで若干異なる。以下では、この点を述べることによって、粒状体の力学の特徴を明らかにする。

6.4.1 応 力

点0を含む面を考え、その面積を δA とし、作用している力を $\delta \mathbf{F}$ とする。連続体の力学における応力は、

$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \delta \mathbf{F} / \delta A \quad (6.6)$$

で定義できる⁷⁷⁾。粒状体で $\delta A \rightarrow 0$ とすれば、点0が空隙内にあるか粒子内にあるかによって、応力の値は不連続的に変わる。(6.6) 式の定義に代わって、粒状体の応力はある有限な領域 (a-b) 上で定義される（図-6.11）。図-6.11 に斜線で示される粒子の重心は、面 (a-b) の下方にあり、他の粒子の重心は、上方にあるものとする。面 (a-b) の有効垂直応力 σ とせん断応力 τ とは、次式で与えられる。

$$\sigma = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n F_{1i}, \quad \tau = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n F_{3i} \quad (6.7)$$

ただし F_{1i} と F_{3i} は、それぞれ上方の粒子から下方の粒子へ伝達される粒子間力の面への垂直成分と平行成分である。また、 A は面 (a-b) の面積で、 n は接点数である注13)。Marsal^{78),79)}による研究を除けば、多くの研究者は、(6.7) 式で与えられる概念で粒状体の応力をとらえている。(6.7) 式中の F_{1i} と F_{3i} をどのように考えるかによって、色々な形式の具体的な応力値が得られる。例をあげよう。

Rowe の場合²⁸⁾：Rowe によれば、せん断変形を受け

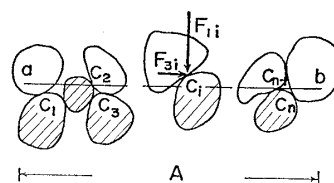


図-6.11 粒状体の応力

注13) この際 n の大きさが問題となるが、ここでは十分に大きいある数と考えておく。

る粒状体の応力は、すべりの状態にある接点で定義される。すなわち、粒状体を実際にすべっている接点で接する仮想的な粒子の集合体と考え、応力成分を次式で与える。

$$\sigma = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n_s} F_{1i}^s \quad \tau = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n_s} F_{3i}^s \quad (6.8)$$

ただし、 n_s は面 (a-b) 上のすべりの状態にある接点数であり、 F_{1i}^s と F_{3i}^s はそれらの接点での粒子間力を意味している。(6.7) 式はすべりの状態の有無にかかわらずすべての接点を含むのに対し、(6.8) 式はすべりの状態にある接点に限定している。

村山・松岡の場合⁸⁾: 面 (a-b) を一つの Potential sliding plane とし、接点はすべてすべりの状態にあると考える。従って、

$$\sigma = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n F_i \cos(\beta_i + \phi_\mu), \quad \tau = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n F_i \sin(\beta_i + \phi_\mu) \quad (6.9)$$

F_i が β_i に依存せず、一つの平均値 \bar{F} で表わせるとすれば、(6.9) 式は次式となる。

$$\sigma = \frac{\bar{F}}{A} \sum_{i=1}^n \cos(\beta_i + \phi_\mu) \quad \tau = \frac{\bar{F}}{A} \sum_{i=1}^n \sin(\beta_i + \phi_\mu) \quad (6.10)$$

応力 σ と τ は、Potential sliding plane 上での接点角 β_i の頻度分布を与えれば計算できる。しかし (6.10) 式は、Potential sliding plane の特殊な面の上でのみ成立する。

その他の例: 村山⁶⁴⁾⁻⁶⁶⁾ や小田³¹⁾ の研究にみられるように、粒子間力 F_i は決定論的に求め得るものではなく、一つの統計量である。このことを考慮した研究には、Marsal^{78),79)} のものをあげることができる。また北村^{80),81)} は、粒状体の運動をマルコフ過程としての確率過程としてとらえ、巨視的応力(あるいはひずみ)を粒子運動の平均化であるとして、応力の概念に新しい展開をもたらした。

いずれにしても、応力は、有限な領域内での平均値としての意味を持つことが明らかになった。応力の定義がどのようなものであっても、平均値としての応力成分 σ_{ij} は、当然のことながら、テンソルとしての性質を持たねばならない。

6.4.2 ひずみ

粒状体のひずみの概念を微視的観点から導いた研究は多く、また、それらは極めて混乱した状態にある。慣用ひずみと自然ひずみとの混乱⁸²⁾、あるいは、本来の意味からはひずみと呼べないものまでひずみと呼ぶことから生じる混乱、などが指摘できる。ある方向の伸びひずみをダイレイタンスーと考えたり、ある方向のせん断に伴う回転をせん断ひずみそのものとするなどの誤解は、1, 2 の例に止まらない。

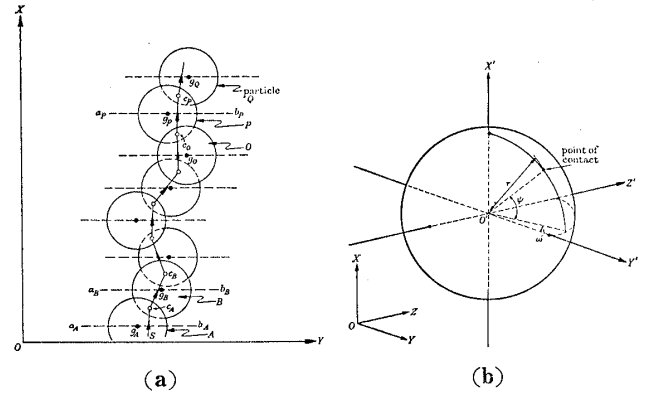


図-6.12 Horne による粒状体のひずみの定義

Horne²⁹⁾ による粒状体のひずみ増分の定義は、筆者の知る限りにおいて、最も明解かつ厳密であり、ここではその概略を紹介する。

Horne によるひずみの概念: 一つの粒子 A を選び、その重心 g_A を通りかつ軸 X に垂直な面 (a_A-b_A) を考えよう (図-6.12)。面 (a_A-b_A) より上にある複数の接点の中から、粒子 B との接点 c_A を無作為に抽出する。粒子 B の重心 g_B を通りかつ軸 X に垂直な平面 (a_B-b_B) を考え、同様な無作為抽出から、面 (a_B-b_B) より上にある接点の中から、粒子 C との接点 c_B を選ぶ。接点 $c_A, c_B, c_C, \dots, c_0, c_P, \dots$ を連結してつくる折れ線を Solid path と呼ぶ。Solid path に沿って X 軸方向へ L_x の距離を進むのに必要な粒子数を N_x とする。今、 N_x に対する L_x の比を Mean projected solid path (m. p. s. p) と呼び、次式で与えられる。

$$m_1 = \lim \frac{L_x}{N_x} = 2r \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E(\omega, \psi) \sin 2\psi \, d\omega d\psi \quad (6.11)$$

Y, Z 軸方向にも同様の Solid path が定義でき、それぞれの m. p. s. p は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= \lim \frac{L_y}{N_y} = 2r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\omega, \psi) \\ &\quad \times (1 + \cos 2\psi) \cos \omega \, d\omega d\psi \\ m_3 &= \lim \frac{L_z}{N_z} = 2r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} E(\omega, \psi) \\ &\quad \times (1 + \cos 2\psi) \sin \omega \, d\omega d\psi \end{aligned} \right\} (6.12)$$

ただし、 r は粒子の半径であり、角 ω, ψ は 図-6.12 (b) に定義されている。 $E(\omega, \psi)$ は、接点角の確率密度を与えるものであり、先に定義した $E(\alpha, \beta)$ と一致する。定義から知られるように、 $1/m_1, 1/m_2, 1/m_3$ は、それぞれ X, Y, Z 軸方向に単位の長さ進む時に遭遇する平均的な接点数を与え、粒子の配列構造 $E(\omega, \psi)$ (あるいは $E(\alpha, \beta)$) に依存している。

今、X 軸方向の Solid path が、各粒子接点でのすべり変位 \dot{u} のために縮んだとする。ただし、X 軸を対称軸とする軸対称問題を考え、すべり変位 \dot{u} の方向は、X 軸

を含む面内に限られるものとする。接点でのすべりの確率密度関数 $H(\omega, \psi, \dot{u})$ を導入すれば、X軸に沿う Solid path の $1/m_1$ 個の接点の中で、接点の方向角が ω と $\omega+d\omega$ かつ ψ と $\psi+d\psi$ の間にあり、すべり変位の大きさが \dot{u} と $\dot{u}+d\dot{u}$ の範囲にある接点数は、 $1/m_1 H(\omega, \psi, \dot{u}) \cos \psi d\omega d\psi d\dot{u}$ で与えられる。各接点での \dot{u} の X 軸成分を合計したものが、X 軸方向の主ひずみ増分（圧縮） ϵ_1 をもたらすと考えれば、次式を得る。

$$\epsilon_1 = + \frac{1}{2m_1} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} H(\omega, \psi, \dot{u}) \times \dot{u} (1 + \cos 2\psi) d\omega d\psi d\dot{u} \quad (6.13)$$

同様に Y, Z 軸方向の Solid path の伸びひずみ増分を考慮ことができ、 ϵ_2 と ϵ_3 はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_2 &= - \frac{1}{2m_2} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H(\omega, \psi, \dot{u}) \\ &\quad \times \dot{u} \sin 2\psi \cos \omega d\omega d\psi d\dot{u} \\ \epsilon_3 &= - \frac{1}{2m_3} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi H(\omega, \psi, \dot{u}) \\ &\quad \times \dot{u} \sin 2\psi \sin \omega d\omega d\psi d\dot{u} \end{aligned} \right\} (6.14)$$

確率密度関数 $H(\omega, \psi, \dot{u})$ に関しては、具体的には何も知られておらず、(6.13), (6.14) 式は、一般的ではあるが、抽象的である。例えば、Rowe の Stress-dilatancy 式のように、すべり変位の起こる接点角 ψ を $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi_\mu$ に限定し（ただし ω は任意）、 \dot{u} を定数とみなせば、(6.13), (6.14) 式は積分できる。

(6.13), (6.14) 式について、次の3点を特に強調しておく。

(1) \dot{u} = 定数として (6.13), (6.14) 式を積分し得たとしても、ひずみ増分の絶対値は、 \dot{u} の定数が何らかの形で示されない限り、不定である。 \dot{u} は、間隙比、土粒子配列、応力状態などの諸量によって定義でき、(6.13), (6.14) 式の厳密な意味での積分は、現状では不可能である。

(2) 与えられたひずみ増分式は、粒状体の微視的変形機構として、接点でのすべり変位のみに基づいて導かれた。粒子のころがりや回転を含む (6.13), (6.14) 式に代わるより一般的な定義式は、まだ発表されていないようである。

(3) (6.13), (6.14) 式では、三軸圧縮のような軸対称問題について解かれており、ひずみ増分の主軸が主応力軸と一致することを前提としている。主応力軸がせん断変形と共に回転するような、より一般的な場合には、式中の確率密度関数 $H(\omega, \psi, \dot{u})$ は、主応力軸に対して非対称となり³⁵⁾、このために、主ひずみ増分軸が主応力軸と一致しないことも起こり得る。de Jong^{82), 83)} は、全く別の観点から、両主軸の不一致を理論的に予測し、Drescher と de Jong¹⁴⁾、小田と小西¹⁸⁾、Drescher¹⁵⁾、

八木と de Jong⁸⁴⁾ らによって実験的に確かめられた粒状体の力学に新しい問題を提起している。

粒状体の構成方程式を微視的観点から誘導しようとする時、応力、ひずみの諸量は前提となる基礎的なものである。このような基礎的な量の定義においてすら、多くの混乱とあいまいさを残している現状を考えると、微視的観点からの粒状体の構成式の確立がいかにか困難なものであるかが、容易に理解されよう。

6.5 おわりに

「粒状体の研究は新しい段階に入った」といっても、今後に残された課題の多いのがく然とする。粒状体の構成式の研究には、従来、(1) 既往の理論体系を基礎として導く方法と、(2) 微視的観点からその構造や変形機構を考慮して導く方法、とがあるといわれている。両手法による理論・実験の両面からの成果が、相互の欠点を補いつつ体系的に構成されていくなれば、現在の困難を打破する新しい道が開かれるように思える。

最後に、この報告を書くチャンスを与えられ、また、具体的に有益な示唆をいただいた摂南大学教授・村山朔郎先生に感謝いたします。また、名古屋工業大学助教授・松岡元先生には、有益な討論をしていただいた。信州大学助教授・小西純一先生には、図-6.3 を提供していただいた。記して感謝の意を表わす。

記号説明

- c_i = 任意の接点
- $E(\beta)$ = 法線 N_i の確率密度関数 (= $E(\omega, \psi)$)
- E_{50} = 50% 強度での変形係数
- F_i = 接点 c_i での粒子間力
- $H(\omega, \psi, \dot{u})$ = すべりを表わす確率密度関数
- N_i = 接点 c_i の法線
- \dot{u} = すべり変位増分
- dv = 体積ひずみ増分
- X, Y, Z = 座標軸
- (l_i, m_i, n_i) = 法線 N_i の主応力軸に対する方向余弦
- γ = 巨視的すべり面と水平面とのなす角度
- β_i = 法線 N_i の方向角
- $\delta_i = \theta_i - \beta_i$ で定義される Mobilized angle
- ϵ_a = 軸ひずみ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$)
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ = 有効主応力
- θ_i = 粒子間力の方向角
- ϕ_μ = 物理摩擦角
- $\tan \alpha$ = Rowe の構造を表わすパラメーター

参考文献

- 1) Reynolds, O. (1885): "On the dilatancy of media composed of rigid particle in contact," Phil. Mag., Vol. 20, pp. 469-481.
- 2) Rowe, P.W. (1969): "Osborne Reynolds and dilatancy," Geotechnique, Vol. 19, No. 1, pp. 1-5.
- 3) 小田匡寛(1977): 粒状体の配列構造と強度, 「土と基礎」, Vol. 25, No. 8, pp. 88-89.
- 4) Biarez, J. and Wiendieck, K. (1963): "La comparaison qualitative entre l'anisotropie mécanique et l'

- anisotropie de structure de milieux pulvérulents," C.R. Acad. Sci., Vol. 256, pp.1217-1220.
- 5) Wiendieck, K. (1967): "Zur Struktur körniger Medien," Die Bautechnik, 6, pp.196-199.
 - 6) Dantu, P. (1957): "Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents," Proc., 4th ICSMFE, London, pp.144-148.
 - 7) Wakabayashi, T. (1959): "Photoelastic method for determination of stress in powder mass," Proc., 9th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., pp.133-140.
 - 8) 村山朔郎・松岡元 (1971): 2次元モデルによる粒状体のせん断現象の微視的考察, 「京都大学防災研究所年報」, 第13号, pp.505~523.
 - 9) Murayama, S. and Matsuoka, H. (1973): "A microscopic study on shearing mechanism of soils," Proc., 8th ICSMFE, pp.293-298.
 - 10) Matsuoka, H. (1973): "Deformation characteristics of soil," Doctor Thesis at Kyoto University.
 - 11) 小西純一(1973): 微視的にみた粒状体のせん断過程, 「信州大学工学部紀要」, 第34号, pp.179~194.
 - 12) Konishi, J. (1975): Discussion, Soils and Foundations, Vol. 15, No. 1, pp.98-102.
 - 13) Oda, M. and Konishi, J. (1974): "Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear," Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, pp.25-38.
 - 14) Drescher, A. and G. de Josselin de Jong (1972): "Photoelastic verification of mechanical model for the flow of a granular material," Jnl. Mech. Phys. Solids, 20, pp.337-351.
 - 15) Drescher, A. (1976): "An experimental investigation of flow rules for granular materials using optically sensitive glass particles," Geotechnique, Vol. 26, No. 4, pp.591-601.
 - 16) 梅屋 薫 (1975): 粉体材料工学におけるレオロジーの役割(その2), 「材料」, Vol. 24, No. 259, pp.283~290.
 - 17) Umeya, K., Hara, R. and Kikuta, J. (1975): "On two-dimensional shear tests by model powders," Jour. Chem. Engrg. Japan, Vol. 8, No. 1, pp.56-62.
 - 18) 大槻正紀(1974): 粒状体の2次元変形について, 「第9回土質工学研究発表会講演概要集」, pp.199~201.
 - 19) 竹田一夫・中井照夫・阪上最一 (1977): 緩い構造のせん断に関する微視的考察, 「土木学会第32回年次学術講演会講演概要集」, 第3部, pp.76~77.
 - 20) Field, W.G. (1963): "Towards the statistical definition of a granular mass," Proc., 4th A. and N.Z. Conf. Soil Mech., pp.143-148.
 - 21) Oda, M. (1972a): "Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material," Soils and Foundations, Vol. 12, No. 1, pp.17-36.
 - 22) Oda, M. (1972b): "The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand," Soils and Foundations, Vol. 12, No. 2, pp.1-18.
 - 23) Oda, M. (1972c): "Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests," Soils and Foundations, Vol. 12, No. 4, pp.45-63.
 - 24) Oda, M. (1976): "Fabrics and their effects on the deformation behaviours of sand," Depart. Found. Engrg. Fac. Engrg., Saitama University, Special Issue, pp.1-59.
 - 25) Borowicka, H. (1973): "Rearrangement of grain by shear tests with sand," Proc., 8th ICSMFE, Vol. 1, pp.71-77.
 - 26) Newland, P.L. and Allely, B.H. (1957): "Volume changes in drained triaxial tests on granular materials," Geotechnique, Vol. 7, No. 1, pp.17-34.
 - 27) Rowe, P.W. (1962): "The stress-dilatation relation for static equilibrium of an assembly of particles in contacts, Proc., Roy. Soc. A., Vol. 269, pp.500-527.
 - 28) Rowe, P.W. (1971): "Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil," Roscoe Memorial Symp., Camb. G. T. Foulis, Hengley-on-Thames, pp.143-205.
 - 29) Horne, M.R. (1965): "The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles, I and II," Proc., Roy. Soc. A., Vol. 286, pp.62-97.
 - 30) Horne, M.R. (1966): "The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles, III," Proc., Roy. Soc. A., Vol. 310, pp.21-34.
 - 31) Oda, M. (1974): "A mechanical and statistical model of granular material," Soils and Foundations, Vol. 14, No. 1, pp.13-27.
 - 32) Oda, M. (1975): "On stress-dilatancy relation of sand in simple shear test," Soils and Foundations, Vol. 15, No. 2, pp.17-29.
 - 33) Tokue, T. (1977): "Deformation of dry sand under cyclic loading," Proc., Speciality Session 9, 9th ICSMFE, pp.263-270.
 - 34) 伯野元彦・平尾寿雄 (1973): 粒状体のランダム・パッキングに関する一つの試み, 「土木学会論文報告集」, 第219号, pp.55~63.
 - 35) Oda, M. and Konishi, J. (1974): "Rotation of principal stresses in granular material during simple shear," Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, pp.39-53.
 - 36) Mogami, T. (1965): "A statistical approach to the mechanics of granular materials," Soils and Foundations, Vol. 5, No. 2, pp.26-36.
 - 37) Mogami, T. (1967): "Mechanics of granular material composed of particles of various sizes," Transaction of JSCE, No. 137, pp.43-47.
 - 38) 最上武雄 (1969): 粒状体の力学, 「土質力学(最上武雄編)」, 技報堂, pp.893~1048.
 - 39) Cowin, S.C. (1974): "A theory for the flow of granular materials," Powder Technol., Vol. 9, pp.61-69.
 - 40) Mogami, T. and Imai, G. (1968): "On the failure of granular material," Soils and Foundations, Vol. 13, No. 3, pp.1-19.
 - 41) 落合英俊・山内豊聡・棚橋由彦 (1971): 二次元積層体によるせん断中の粒子移動特性, 「土木学会第26回年次学術講演会講演概要集」, 第3部, pp.41~43.
 - 42) 落合英俊・山内豊聡 (1972): 二次元積層体によるせん断中の間ゲキ比の変化について, 「土木学会第27回年次学術講演会講演概要集」, 第3部, pp.113~114.
 - 43) 松尾 稔 (1970): 間げきの大きさの分布について, 八王子ゼミナールにて講演。
 - 44) Coumoulos, D.G. (1968): "A radiographic study of soil," Ph. D. Thesis, University of Cambridge (Roscoe, Tenth Rankin Lecture による)。
 - 45) Kézdi, A. (1974): Handbook of Soil Mechanics, Soil Physics, Elsevier Scientific Publishing Company.
 - 46) Sridharan, A., Altschaeffle, A.G. and Diamond, S. (1971): "Pore size distribution studies," Jour. Soil Mech. Found. Divi. ASCE, Vol. 97, No. SM 5, pp.

- 771-787.
- 47) Smith, W.O., Foote, P.O. and Busang, P.F. (1929): "Packing of homogeneous spheres," *Phys. Rev.*, Vol. 34, pp.1271-1274.
- 48) Gray, W.A. (1968): *The Packing of Solid Particles*, Chapman and Hall Ltd.
- 49) Bernal, J.D. and Mason, J. (1960): "Co-ordination of randomly packed spheres," *Nature*, Vol. 188, pp. 910-911.
- 50) 諸戸靖史 (1975): 私信.
- 51) Oda, M. (1977): "Co-ordination number and its relation to shear strength of granular material," *Soils and Foundations*, Vol. 17, No. 2, pp.29-42.
- 52) 宇野尚雄・西 好一 (1973): 2次元粒状体モデルの構造とその変化, 「第8回土質工学研究発表会講演概要集」, pp.239~241.
- 53) Wilkins, J.K. (1970): "A theory for shear strength of rockfill," *Rock Mechanics*, Vol. 2, pp.205-222.
- 54) Sadasivan, S.K. and Raju, V.S. (1977): "Theory for shear strength of granular materials," *Jour. Geotechnical Engineering Division, Proc. ASCE*, Vol. 103, No. GT 8, pp.837-861.
- 55) Arthur, J.R.F. and Dunstan, T. (1969): "Radiography measurements of particle packing," *Nature*, Vol. 223, No. 505, pp.464-468.
- 56) Arthur, J.R.F. and Dunstan, T. (1970): "Radiological technique developed to describe particle packing," *Powder Technology*, Vol. 3, pp.195-207.
- 57) Oda, M. and Koishikawa, I. (1977): "Anisotropic fabric of Sand," *Proc.*, 9th ICSMFE, Vol. 1, pp.235-238.
- 58) Arthur, J.R.F. and Menzies, B.K. (1972): "Inherent anisotropy in a sand," *Geotechnique*, Vol. 22, No. 1, pp.115-128.
- 59) Arthur, J.R.F. and Phillips, A.B. (1975): "Homogeneous and layered sand in triaxial compression," *Geotechnique*, Vol. 25, No. 4, pp.799-815.
- 60) Tatsuoka, F. (1975): Discussion, *Soils and Foundations*, Vol. 15, No. 2, pp.73-78.
- 61) Tatsuoka, F. (1976): "Stress-dilatancy relations of anisotropic sand in three dimensional stress condition," *Soils and Foundations*, Vol. 16, No. 2, pp.1-18.
- 62) Roscoe, K.H. and Schofield, A.N. (1964): Discussion, *Jour Soil Mech. Found. Engrg.*, ASCE, Vol. 90, SM.1, pp.136-150.
- 63) Rowe, P.W. (1973): Discussion, *Soils and Foundations*, Vol. 13, No. 2, pp.94.
- 64) Murayama, S. (1969): "Stress strain-time behavior of soils subjected to deviatoric stress," *Proc. 7th ICSMFE*, Vol. 1, pp.297-305.
- 65) Murayama, S. (1977): "Constitutive equation of particulate material in the elastic state," *Proc. Specialty Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo*, pp.167-174.
- 66) Murayama, S. (1977): "Constitutive equation of particulate material in the plastic state," *Proc. Specialty Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo*, pp.175-182.
- 67) Matsuoka, H. (1974): "Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 2, pp.47-61.
- 68) 松岡 元・中井照夫 (1974): 多軸応力下の土の変形・強度特性, 「京都大学防災研究所年報」, 第17号B, pp.319~333.
- 69) Matsuoka, H. (1976): "On the significance of the 'Spacial Mobilized Plane'," *Soils and Foundations*, Vol. 16, No. 1, pp.91-100.
- 70) Matsuoka, H. and Nakai, T. (1977): "Stress-strain relationship of soil based on the 'SMP'," *Constitutive Equation of Soil, Proc., Specialty Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo*, pp.153-162.
- 71) 例えば, Roscoe, K. H. (1970): "The influence of strains in soil mechanics," *Geotechnique*, Vol. 20, No. 2, pp.129-170.
- 72) Cole, E.R.L. (1967): "The behaviour of soils in the simple shear apparatus," *Ph. D. Thesis, University of Cambridge*.
- 73) 落合英俊 (1975): 直接せん断試験と平面ヒズミ試験における砂のせん断強度の関係, 「土質工学会論文報告集」, Vol. 15, No. 4, pp.113~118.
- 74) 落合英俊 (1975): 直接せん断試験における砂の挙動, 「土質工学会論文報告集」, Vol. 15, No. 4, pp.93~100.
- 75) 龍岡文夫 (1978): 粒状体力学の現状とその応用 (2粒状体の変形に関する理論的研究についてII), 「土と基礎」, Vol. 26, No. 7, No. 245, pp.55~63.
- 76) 橋口公一 (1975): 粒状体の応力比-構造式に関する省察, 「土質工学会論文報告集」, Vol. 15, No. 3, pp.83~91.
- 77) 例えば, Jaeger, J.C. (1956): *Elasticity, Fracture and Flow*, Methuen & Co., Ltd.
- 78) Marsal, R.J. (1969): "Frictional resistance of granular soils," *7th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engrg. Speciality Session No. 13*, pp.67-86.
- 79) Marsal, R.J. (1973): *Mechanical properties of rock-fill, Embankment Dam Engrg.*, Casagrande Volume, pp.109-200.
- 80) Kitamura, R. (1978): "Deformation of granular soil as a Markov process," *US-Japan Seminar on Continuum Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Material, Sendai*, pp. 78-84.
- 81) 北村良介 (1978): マルコフ過程を用いた粒状体の力学モデル (I), 「京都大学防災研究所年報」(印刷中).
- 82) de Josselin de Jong (1977): "Constitutive relations for the flow of a granular assembly in the limit state of stress," *9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engrg., Specialty Session No. 9*, pp.87-95.
- 83) de Josselin de Jong (1977): "Mathematical elaboration of the double sliding, free rotating model," *Archives of Mechanics*, Vol. 29, No. 4, pp.561-591.
- 84) 八木則男・de Josselin de Jong (1978): 粒状土の流れ則に関する実験的研究, 「第13回土質工学研究発表会講演集」, pp.401~404.

(原稿受付, 1978.2.8)