

## 2つの1自由度系減衰比を用いた連成系減衰比の簡易推定\*

渡邊鉄也\*<sup>1</sup>, 柄田顕章\*<sup>2</sup>, 田中基八郎\*<sup>3</sup>Estimation of the Damping Ratio of the Coupled System  
Based on the Damping Ratios of Two 1-Dof SystemsTetsuya WATANABE\*<sup>4</sup>, Akinori TOMODA and Kihachiro TANAKA\*<sup>4</sup> Division of Mechanical Engineering and Science, Saitama University,  
255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

A number of different structures in industrial facilities are installed on supports. There is the case that the damage occurs by the coupled vibration. The response magnification is obtained from the modal natural frequency and the modal damping ratio of the coupled system in the seismic design. Therefore, the modal natural frequency and the modal damping ratio of the coupled system are required. The natural frequency and the damping ratio of the support and the structure are obtained during the initial design process or by a shaking test. However, the modal natural frequency and the modal damping ratio of the coupled system are not easily obtained. The modal natural frequency of the coupled system can be calculated from theoretical equation, but the modal damping ratio cannot be easily calculated. In the present study, an equation to calculate the modal damping ratio of the coupled system with classic damping is presented. In addition, a simple equation to calculate the modal damping ratio with a non-classic damping system is proposed. This equation is evaluated theoretically. The proposed equation is useful for obtaining the modal damping ratio without performing eigenvalue analysis or a shaking test.

**Key Words**: Structure, Support, Coupled System, Estimation of Dynamic Parameters, Seismic Design

## 1. 結 言

近年、兵庫県南部地震(1995)や新潟県中越地震(2004)などをはじめとする大規模な地震が多発しており、一般家屋もさることながら産業施設内建造物の被害も多く報告されている。産業施設内建造物は2次的な災害が懸念されるため、一般家屋とは異なる耐震設計基準が定められている。

著者は過去の研究<sup>(1)-(5)</sup>において摩擦を有する建造物の応答スペクトルを提案してきた。ここでは、1自由度摩擦系を対象としていたが、産業施設内では、支持構造物上に機器類を設置するケースが多く、これらの連成振動にともなう振幅増加により被害が生じる場合が

ある。耐震設計では、連成系のモード固有振動数、モード減衰比から応答倍率を求め、地表面の水平震度を乗じて設計水平震度を算出している。したがって、設計水平震度を算出するには、連成系のモード固有振動数およびモード減衰比が必要となる。支持構造物、機器類それぞれの固有振動数、減衰比は設計段階あるいは竣工後の振動実験により把握されるが、機器類が支持構造物上に設置された連成系のモード固有振動数、モード減衰比を求めるには機器類設置後に固有値解析あるいは振動実験を行う必要がある。また、機器類の変更、追加等があるたびに解析、実験をしなくてはならない。しかし、現場や簡易設計において、固有値解析や実験をするには時間を要する。連成系のモード固有振動数は支持構造物および機器類それぞれの固有振動数から理論式を用いて算出できるが、モード減衰比を求めるには固有値解析あるいは実験をする必要がある。したがって、モード減衰比を簡易式を用いて求め

\* 原稿受付 2008年6月12日, 英文誌: Journal of System Design and Dynamics, Vol.2, No.4 (2008), pp.1006-1014(原稿受付 2008年4月25日).

\*<sup>1</sup> 正員, 埼玉大学大学院理工学研究科(☎338-8570 さいたま市桜区下大久保255).

\*<sup>2</sup> 埼玉大学大学院理工学研究科.

\*<sup>3</sup> 正員, フェロー, 埼玉大学大学院理工学研究科.

E-mail: watanabe@mech.saitama-u.ac.jp

ることができれば、設計時間が短縮すると考えられる。そこで、本研究では2つの1自由度系が重なったときの連成系のモード減衰比を簡易的に推定する方法を提案する。

機器系と支持系の質量およびばね定数をそれぞれ  $m_c, m_p, k_c, k_p$  とすると、前報<sup>(6)</sup>では質量比を  $m_c/(m_c+m_p)$  とし、支持系の角固有振動数を  $\omega_p=(k_p/(m_c+m_p))^{0.5}$  としていた。しかし、実際には  $\omega_p=(k_p/m_p)^{0.5}$  とする方が多いため、本報では、質量比および角固有振動数を、それぞれ  $m_c/m_p, \omega_p=(k_p/m_p)^{0.5}$  とし、モード減衰比の簡易推定を行う。また、簡易推定法の適用範囲について検討する。

## 2. 比例減衰系の特性

図1に示す減衰が介在する連成系を考える。外力が作用しない場合の運動方程式は以下となる。

$$\begin{bmatrix} m_c & 0 \\ 0 & m_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{x}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_c & -c_c \\ -c_c & c_c+c_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_c & -k_c \\ -k_c & k_c+k_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ x_p \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

$m_c, m_p$  はそれぞれ機器系と支持系の質量。  $c_c, c_p$  は減衰係数。  $k_c, k_p$  はばね定数である。

ここで、

$$\omega_c = 2\pi f_c = \sqrt{\frac{k_c}{m_c}} \quad (2)$$

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}} \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{m_c}{m_p} \quad (4)$$

$$\zeta_c = \frac{c_c}{2\sqrt{m_c k_c}} \quad (5)$$

$$\zeta_p = \frac{c_p}{2\sqrt{m_p k_p}} \quad (6)$$

とする。  $f_c$  は機器系の固有振動数、  $f_p$  は支持系の固有振動数である。  $\zeta_c, \zeta_p$  はそれぞれ機器系と支持系の減衰比、  $\gamma$  は質量比である。

モード行列は

$$[\phi] = \begin{bmatrix} -f_c^2 & -f_c^2 \\ f_1^2 - f_c^2 & f_2^2 - f_c^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表すことができる。ここで、比例減衰を仮定すると、

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = [\phi]^T \begin{bmatrix} c_c & -c_c \\ -c_c & c_c+c_p \end{bmatrix} [\phi] \quad (8)$$

と表すことができる。ここで、  $c_1, c_2$  はそれぞれ1次、2次のモード減衰係数である。2行1列目に注目すると次式が得られる。

$$f_1^2 f_2^2 (c_c + c_p) - c_p f_c^2 (f_1^2 + f_2^2) + c_p f_c^4 = 0 \quad (9)$$

ここで、  $c_c = 0, c_p = 0$  の場合の図1のモード固有振動数は

$$\lambda = \sqrt{1 - \left( \frac{2f_c f_p}{(\gamma+1)f_c^2 + f_p^2} \right)^2} \quad (10)$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{2} f_c f_p}{\sqrt{(1+\lambda)((\gamma+1)f_c^2 + f_p^2)}} \quad (11)$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{2} f_c f_p}{\sqrt{(1-\lambda)((\gamma+1)f_c^2 + f_p^2)}} \quad (12)$$

と表すことができ、これらの式から次式が得られる。

$$f_1^2 f_2^2 = f_c^2 f_p^2 \quad (13)$$

$$f_1^2 + f_2^2 = (\gamma+1)f_c^2 + f_p^2 \quad (14)$$

式(13)、式(14)を式(9)に代入すると式(15)が得られる。

$$\frac{f_c}{f_p} = \frac{\zeta_c}{\zeta_p} \quad (15)$$

したがって、比例減衰系の場合には、固有振動数の比と減衰比の比は等しくなる。ここで、

$$\frac{f_c}{f_p} = R_f, \quad \frac{\zeta_c}{\zeta_p} = R_z \quad (16)$$

と表すことにする。次に比例減衰系の1次と2次のモード減衰比は以下のように表すことができる。これらは、式(7)を用いて式(1)を座標変換して得られたモード質量、モード減衰係数、モード剛性から求めることができる。

$$\zeta_{1(\text{classic})} = \frac{\sqrt{2}\zeta_c\zeta_p}{\sqrt{(1+\eta)((\gamma+1)\zeta_c^2 + \zeta_p^2)}} \quad (17)$$

$$\zeta_{2(\text{classic})} = \frac{\sqrt{2}\zeta_c\zeta_p}{\sqrt{(1-\eta)((\gamma+1)\zeta_c^2 + \zeta_p^2)}} \quad (18)$$

$$\eta = \sqrt{1 - \left( \frac{2\zeta_c\zeta_p}{(\gamma+1)\zeta_c^2 + \zeta_p^2} \right)^2} \quad (19)$$

図2、図3に式(17)および式(18)から算出されるモード減衰比を横軸を  $R_z$  にして示す。  $\zeta_p$  は0.01とし、  $\gamma$  を変化させて描いた。1次のモード減衰比は質量比  $\gamma$  が小さくなると増加し、  $\gamma=0$  では  $R_z \geq 1$  において  $\zeta_p$  と等しくなる。2次のモード減衰比は  $\gamma$  が小さくなると減少し、  $\gamma=0$  では、  $R_z \geq 1$  において  $\zeta_c$  と等しくなる。

また、 $R_2 \leq 1$ では、逆に1次のモード減衰比は $\zeta_c$ 、2次のモード減衰比は $\zeta_p$ と等しくなる。したがって、 $R_2 \leq 1$ では、1次のモード減衰比は $\zeta_c$ に依存し、2次のモード減衰比は $\zeta_p$ に依存する。逆に、 $R_2 \geq 1$ では1次は $\zeta_p$ 、2次は $\zeta_c$ に依存することがわかる。次に、図4に $\zeta_1$ と $\zeta_2$ の比を示す。 $\gamma=0$ では $R_2=1$ の場合が最小となることがわかる。

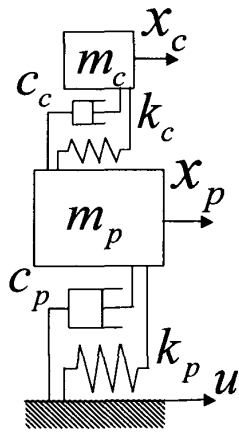


Fig.1 Coupled system

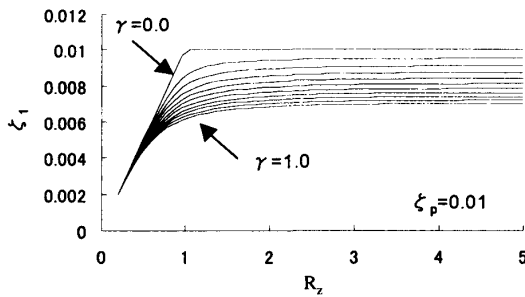


Fig.2 First modal damping ratio with respect to  $R_2$

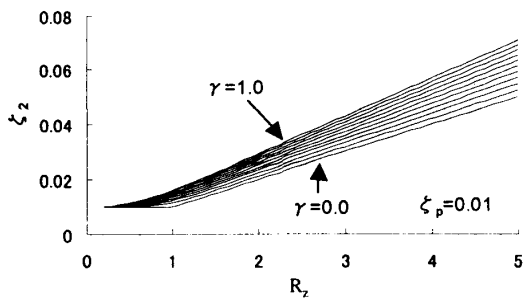


Fig.3 Second modal damping ratio with respect to  $R_2$

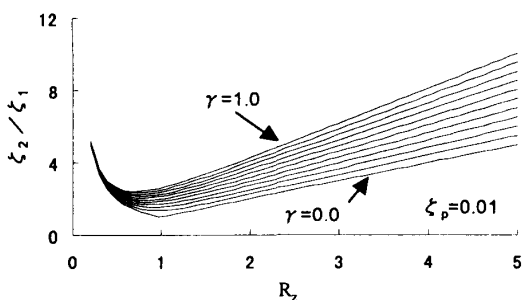


Fig.4 The ratio of modal damping ratio with respect to  $R_2$

### 3. 連成系減衰比の推定

支持系および機器系それぞれの減衰比から連成系のモード減衰比を求める場合、比例減衰系では式(17)~式(19)を用いれば良い。ただし、比例減衰系は式(15)が成り立つ場合である。しかし、実際の系では必ずしも式(15)は成り立たない。そこで、非比例減衰系におけるモード減衰比の簡易推定方法を提案する。

非比例減衰系では、式(1)を式(20)のように変形し、1階の微分方程式の形とする<sup>(7)</sup>。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ x_p \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_c & 0 \\ 0 & m_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_c & -c_c \\ -c_c & c_c + c_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_c & -k_c \\ -k_c & k_c + k_p \end{bmatrix}$$

ここで、調和振動を考え、

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c \\ x_p \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (21)$$

とすると、次式のように表される。

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} x_c \\ x_p \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (22)$$

ここで、左辺の行列には逆行列が存在しない条件から、行列式が零となる $\lambda$ が求まる。これが、複素固有値となる。しかし、行列式は $\lambda$ の4次式となるため、解を数式で表すのは困難である。そこで、式(22)を変形し、

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ x_p \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{Bmatrix} x_c \\ x_p \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} \quad (23)$$

のようにする、そして、左辺の行列を固有値解析して、数値として複素固有値を算出する。得られた複素固有値を $\lambda = a + bi$  ( $i$ は虚数) とする。 $a = -\zeta\omega$ 、

$b = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$  とすると、モード減衰比およびモード固有振動数は次のように表される。

$$\zeta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad f = -\frac{1}{2\pi} \frac{a}{\zeta} \quad (24)$$

図5に1次および2次のモード固有振動数を示す。横軸は $R_2$ であり、図5(a)は1次モード、図5(b)は2次モードである。図の直線は減衰が無い系におけるモード固有振動数であり、式(11)、式(12)から算出されたもの

である。図の曲線は式(24)から算出されたモード固有振動数である。ただし、式(20)の  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  は式(2)～式(6)を用いて無次元化した。算出されたモード固有振動数は減衰が無い系におけるモード固有振動数のように直線にはなっていない。そこで、系のモード固有振動数は式(11)、式(12)から算出し、モード減衰比は式(24)より、次式を用いて算出する。

$$\zeta = -\frac{a}{2\pi f} \tag{25}$$

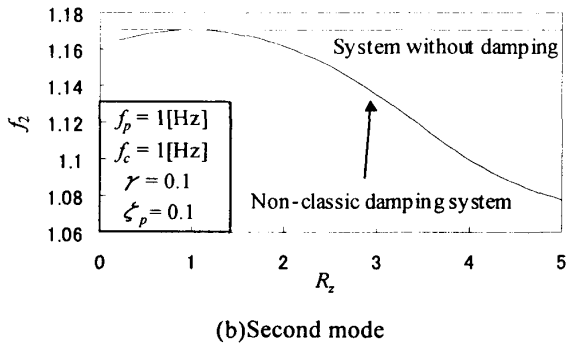
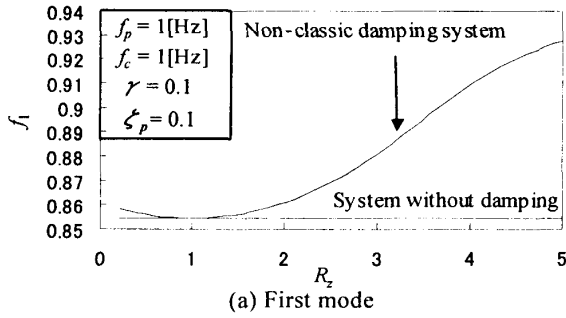


Fig.5 Modal frequency with respect to  $R_2$

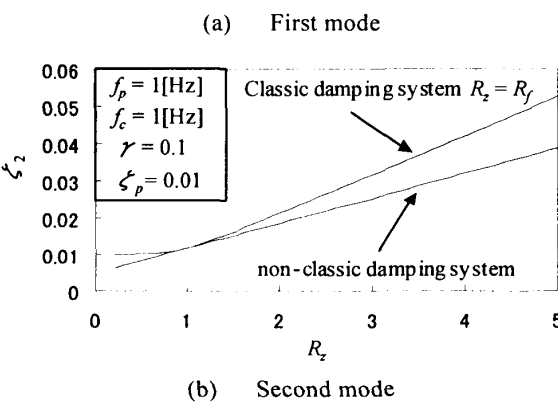
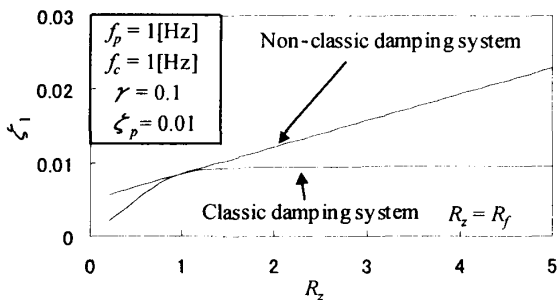


Fig.6 First modal damping ratio respected to  $R_f$

次に、図6に横軸を  $R_2$ 、縦軸を1次のモード減衰比として描いた図を示す。図6(a)は1次のモード減衰比で図6(b)は2次のモード減衰比である。これらの図は非比例減衰系のモード減衰比と式(17)、式(18)から得られた比例減衰系のモード減衰比を示したものである。これらの図から、非比例減衰系のモード減衰比はほぼ直線で表されることがわかる。また、 $R_2 = R_f$  となる、すなわち  $R_2 = f_c / f_p$  の点において、2つの曲線は接していることがわかる。

次に、 $R_f$  が一定の場合、 $f_p$  によるモード減衰比の違いを調べた。図7に縦軸がモード減衰比、横軸が  $R_2$  で  $f_p = 0.2 \sim 5$  [Hz] と変化させたときの図を示す。図7(a)は1次モード、図7(b)は2次モードである。これらの図から、モード減衰比は  $f_p$  によらず同じ曲線になることがわかる。したがって、減衰比は  $f_c$  と  $f_p$  の比である  $R_f$  に依存していることがわかる。

図6において、モード減衰比はほぼ直線で表され、比例減衰系の曲線に  $R_2 = R_f$  の点で接することがわかった。そこで、この接線を数式で表すことを試みる。式(17)より比例減衰系の1次のモード減衰比は次のように表される。

$$\zeta_{1(\text{classic})} = \frac{\sqrt{2}R_2\zeta_p}{\sqrt{(1+\eta)(1+(1+\gamma)R_2^2)}} \tag{26}$$

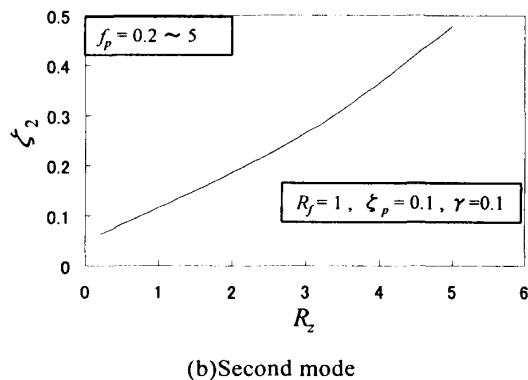
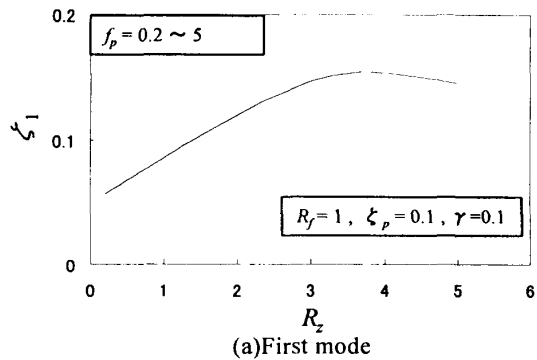


Fig.7 Damping ratio respected to  $f_p$

ここで、式(26)を  $R_z$  で微分して  $R_z = R_f$  における勾配を求めると、

$$\left( \frac{d\zeta_1(\text{classic})}{dR_z} \right)_{R_z=R_f} = \frac{\eta+1+(\eta-1)(1+\gamma)R_f^2}{\sqrt{2\eta}\sqrt{(1+\eta)(1+(1+\gamma)R_f^2)^3}} \zeta_p \quad (27)$$

接線は  $R_z = R_f$  となる点を通るため、接線の式は、

$$\zeta_1 = \left( \frac{d\zeta_1(\text{classic})}{dR_z} \right)_{R_z=R_f} R_z + c \quad (28)$$

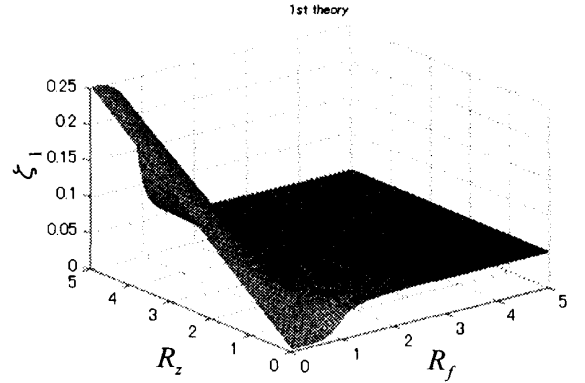
のように表される。したがって、切片  $c$  は

$$c = \frac{\eta-1+(\eta+1)(1+\gamma)R_f^2}{\sqrt{2\eta}\sqrt{(1+\eta)(1+(1+\gamma)R_f^2)^3}} R_f \zeta_p \quad (29)$$

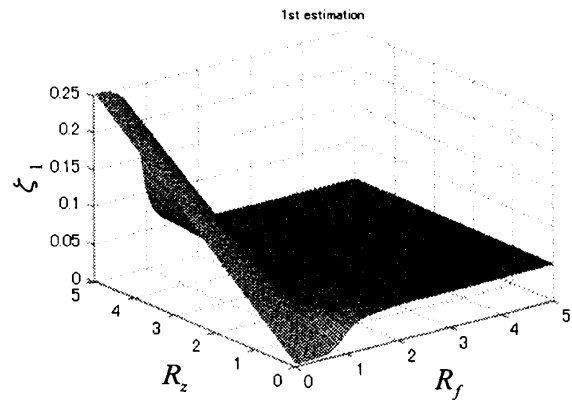
のようになる。よって、接線は式(30)のように表される。同様に、2次の減衰比は式(31)で表される。ゆえに、式(30)、式(31)、式(32)を用いれば、非比例減衰系のモード減衰比を簡便に推定することができる。簡易式は、 $\gamma$ 、 $\zeta_p$ 、 $R_z$ 、 $R_f$  の関数となっており、 $f_p$  は含まれていないことから、 $R_f$  が一定値の場合、 $f_p$  にかかわらず、モード減衰比は一定の値となる。これは、図7の結果と一致している。

次に、複素固有値から得られたモード減衰比（理論値）と簡易式から得られたモード減衰比（推定値）を比較する。図8は、 $\zeta_p = 0.05$ 、 $\gamma = 0.1$  の場合の1次の減衰比である。(a)が理論値であり(b)が推定値である。また、図9は2次のモード減衰比である。1次のモード減衰比に注目すると、 $R_f (= f_c / f_p)$  が1を超えるとモード減衰比は約0.05となっている。これは、機器系の固有振動数  $f_c$  が支持系の固有振動数  $f_p$  より大きくなるため、1次のモード減衰比が  $\zeta_p$  に近くなるためである。一方、 $R_f$  が1より小さい場合には、支持系の固有振動数の方が高くなるため、1次のモード減衰比は機器系の減衰比  $\zeta_p$  に近くなる。図8(a)において、 $R_f$  が0付近に注目すると、 $\zeta_p = 0.05$  であるため、 $R_z (= \zeta_c / \zeta_p)$  が5のときに、モード減衰比は0.25となっている。

次に2次のモード減衰比に注目すると、 $R_f$  が1より大きくなるとモード減衰比は  $\zeta_c$  に近くなり、1より小さい場合には  $\zeta_p$  に近くなる。図8、図9から、理論値と推定値の傾向は似ていることがわかる。



(a) Theory



(b) Estimation

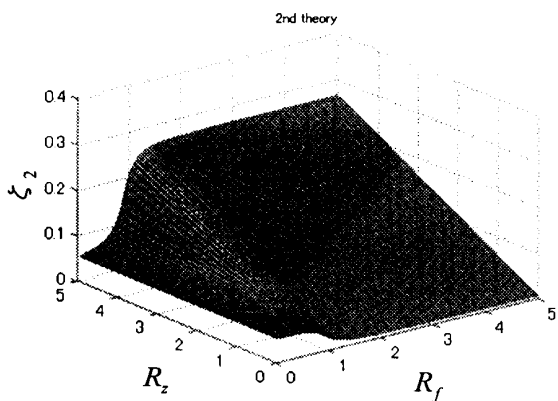
Fig.8 Damping ratio (First mode)

$$\zeta_1 = \frac{\zeta_p}{\sqrt{2\eta}\sqrt{(1+\eta)(1+(1+\gamma)R_f^2)^3}} \left[ \{\eta+1+(\eta-1)(1+\gamma)R_f^2\} R_z + \{\eta-1+(\eta+1)(1+\gamma)R_f^2\} R_f \right] \quad (30)$$

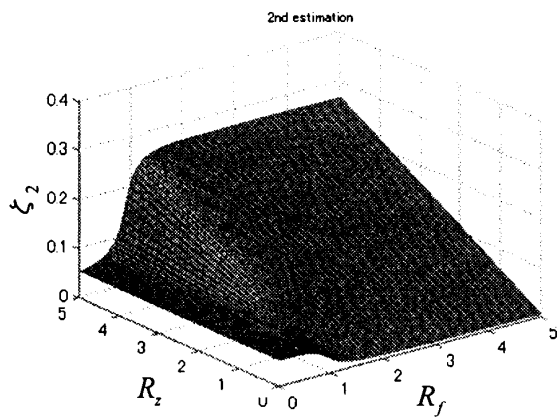
$$\zeta_2 = \frac{\zeta_p}{\sqrt{2\eta}\sqrt{(1-\eta)(1+(1+\gamma)R_f^2)^3}} \left[ \{\eta-1+(\eta+1)(1+\gamma)R_f^2\} R_z + \{\eta+1+(\eta-1)(1+\gamma)R_f^2\} R_f \right] \quad (31)$$

$$\eta = \sqrt{1 - \left( \frac{2R_f}{1+(1+\gamma)R_f^2} \right)^2} \quad (32)$$

次に、理論値と推定値の誤差について検討する。図10、図11にそれぞれ、 $(\zeta_p = 0.01, \gamma = 0.1)$ 、 $(\zeta_p = 0.05, \gamma = 0.1)$ の場合の理論値と推定値の誤差を示す。 $R_f$  および  $R_z$  はともに、0.05~5とした。(a)は1次のモード減衰比で(b)は2次のモード減衰比である。これらの図から、 $R_f$  が1付近で誤差が大きくなっていることがわかる。これは、図8、図9からもわかるように、 $R_f$  が1付近を境にモード減衰比の特徴が変化していることから、 $R_f$  が1付近では誤差が大きくなっている。しかし、 $R_f$  が2を超えると誤差は非常に小さいことから、簡易式は  $R_f \geq 2$  において、モード減衰比を良好に推定可能であることがわかる。

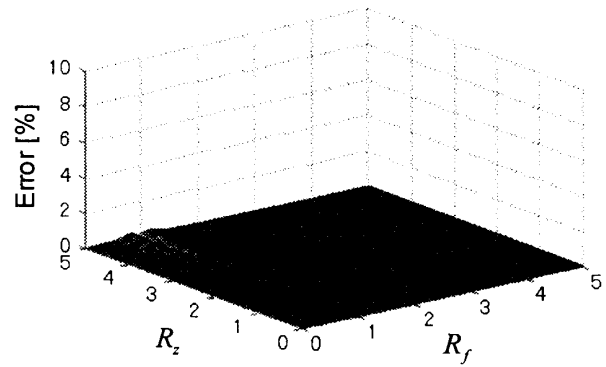


(a) Theory

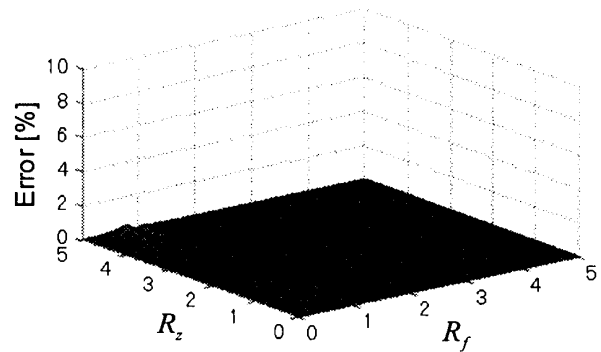


(b) Estimation

Fig.9 Damping ratio (Second mode)

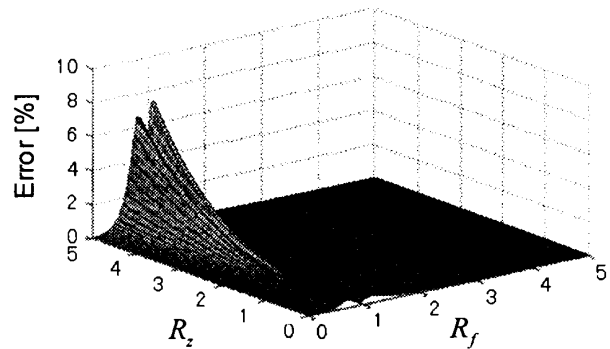


(a) First mode

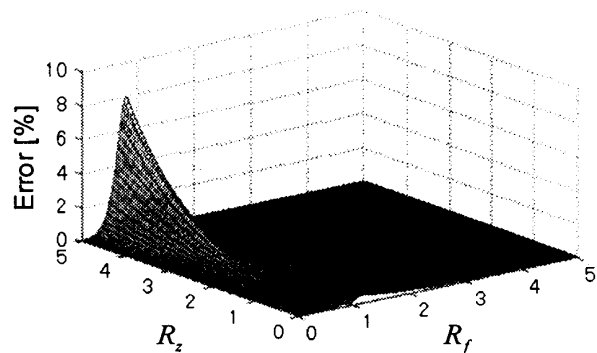


(b) Second mode

Fig. 10 Error ( $\zeta_p = 0.01, \gamma = 0.1$ )



(a) First mode



(b) Second mode

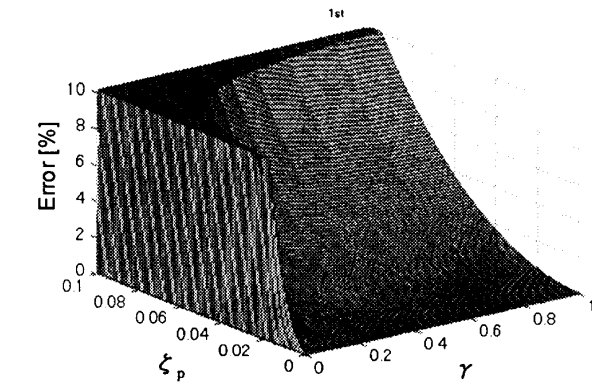
Fig. 11 Error ( $\zeta_p = 0.05, \gamma = 0.1$ )

4. 連成系減衰比推定の適用範囲

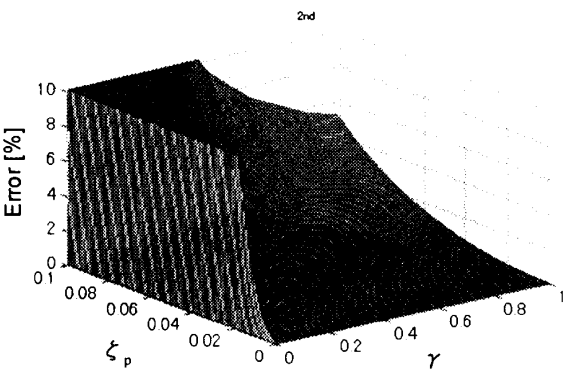
前章で示した理論値と推定値の誤差は減衰比  $\zeta_p$  と質量比  $\gamma$  を一定にした場合の  $R_j$  と  $R_i$  による誤差である。したがって、簡易推定法の適用範囲が不明である。そこで、減衰比  $\zeta_p$  と質量比  $\gamma$  を一定にした場合の誤差の最大値、すなわち、図 10 や図 11 の最大値を求めた。そして、 $\zeta_p$  と  $\gamma$  による誤差の最大値を図 12 に示す。

図 12(a) は 1 次モード、図 12(b) は 2 次モードの場合である。ここでは、誤差が 10% 以下になる範囲を求めるために、誤差が 10% を超えた場合には誤差を 10% とした。図 12 から、 $\zeta_p$  は小さく、 $\gamma$  は大きいほど誤差が小さいことがわかる。次に図 13 に  $\zeta_p$  と  $\gamma$  による誤差の平均値を示す。図 10、図 11 からわかるように、 $R_j$  が 1 付近で誤差が極端に大きくなるため、誤差の最大値は図 12 のように大きな値となっているが、平均にすると図 13 のように 1% 以下であることがわかる。

次に、図 12 において、最大誤差が 10% 以下になる範囲を図 14 に示す。(a) は 1 次で (b) は 2 次である。これらの図から、最大誤差が 10% 以下となるパラメータの範囲がわかり、適切なパラメータを用いて、簡易設計を行うことが可能となる。

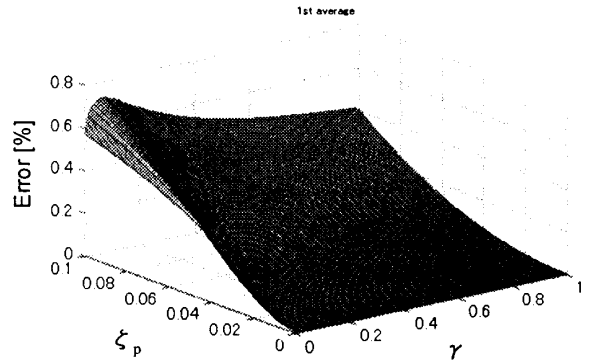


(a) First mode

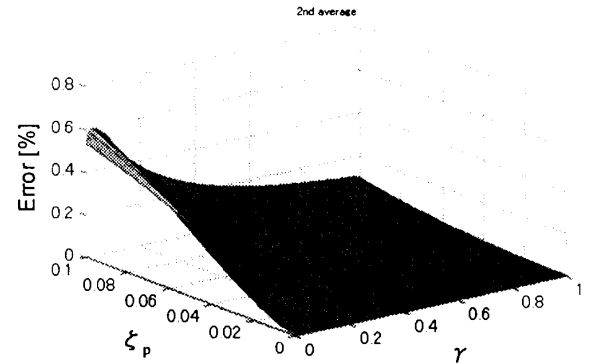


(b) Second mode

Fig.12 Maximum error of  $R_j - R_i$  plane

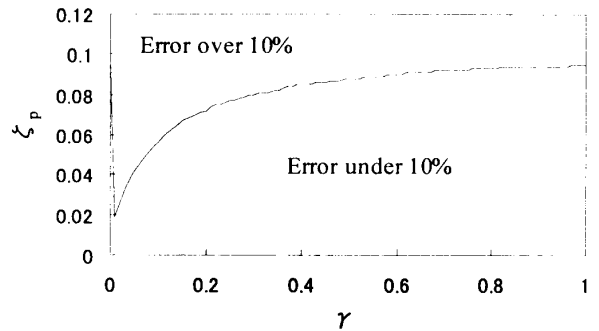


(a) First mode

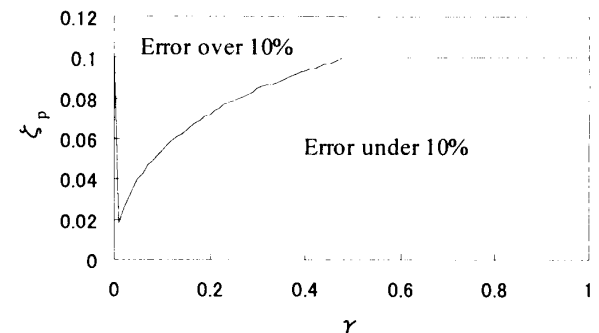


(b) Second mode

Fig.13 Average error of  $R_j - R_i$  plane



(a) First mode



(b) Second mode

Fig.14  $\zeta_p$  and  $\gamma$  when the error is under 10%

## 5. 結 言

本研究では、支持系および機器系それぞれの減衰比から連成系のモード減衰比を推定する方法について検討し、以下の結果が得られた。

- (1) 複素固有値から算出されるモード減衰比を横軸を減衰比の比  $R_2$  にして描くと直線で近似することがわかった。また、比例減衰系の曲線の接線として近似することができた。
- (2) モード減衰比を簡便に算出する式を提案した。
- (3) 固有振動数比  $R_f$ 、減衰比の比  $R_2$  によるモード減衰比の特徴を示した。
- (4) 複素固有値から得られるモード減衰比と簡易式から得られるモード減衰比を比較し、簡易式の妥当性を検証した。
- (5) 固有振動数比  $R_f$  が2以上では簡易式を用いた推定が可能である。
- (6)  $0.05 \leq R_f \leq 5$ 、 $0.05 \leq R_2 \leq 5$ において、最大誤差が10%以下になる  $\zeta_p$  と  $\gamma$  範囲を示した。これにより、モード減衰比の簡易推定が可能である。

## 参 考 文 献

- (1) Watanabe, T., et al, Vibration Test of Plant Piping System Having Friction Support, *Trans. of JSME, Series C*, Vol.58, No.552(1992), pp.17-23.
- (2) Watanabe, T., et al, Seismic Responses of Plant Piping System Having Friction and Vibro-impact Characteristics, *Trans. of JSME, Series C*, Vol.62, No.595(1996), pp.63-68.
- (3) Watanabe, T., Suzuki, K., Seismic Responses of Piping System with Friction Sliding on a Plane, *Trans. of JSME, Series C*, Vol.64, No.617(1998), pp.64-69.
- (4) Watanabe, T., Suzuki, K., Seismic Response Analysis of Piping System with Friction Support (Maximum Response Estimation Using Frictional Response Spectrum), *Trans. of JSME, Series C*, Vol.64, No.619(1998), pp.87-92.
- (5) Watanabe, T., Suzuki, K., Estimation of Equivalent Damping Ratio using Friction Response Spectrum, *Trans. of JSME, Series C*, Vol.66, No.642(2000), pp.87-92.
- (6) Watanabe, T., Tomoda, A., Tanaka, K., Estimation of the damping ratio of the coupled system based on the damping ratios of two 1-dof systems, *Trans. of JSME, Journal of System Design and Dynamics*, vol.2, No.4.
- (7) Nagamatsu, A., Modal Analysis, Baifukan, pp.76-79.