研究会報告

Introduction to Super p-Branes

埼玉大・理　谷井 義彰

§1. 序論

一般に，p-brane とは d 次元時空の中を運動する p 次元的広がりを持った物体である．最近，この p-brane，特に，時空の超対称性を持った super p-brane が統一理論のモデルとなりうるかどうかが，多くの人々によって議論されている．ここでは，これらの簡単なレビューを行う．

Super p-brane を統一理論として考えるためには，いろいろの問題を解決しなければならない．まず，p としてどのような値を選ぶか，またそのとき，どのような作用を使うか．量子化を行う際に，発散やアノマリーなどが現れないかどうか．さらに，スペクトラムの中に零質量粒子が存在するかどうか，相互作用をどのように入れるか，時空の局所対称性をどのように導入するかなどである．以下では主に，作用とその対称性，世界体積上のアノマリー，零質量粒子の存在を考えていく．

２節では，super p-brane の作用とその対称性を議論する．古典論の段階で fermionic な局所対称性（κ 対称性）を要請すると，可能な (p,d) の値の組は１２個に制限される．３節では，そのハミルトニアン形式を議論する．$p\geq 2$ のときは，特別なゲージをとってもこれらの作用を線形にすることができないため，厳密な量子化は難しい．そこで，４節では，光円錐ゲージでの半古典的量子化を行い，５節で，そのときのアノマリーを調べる．そこで考えている特別な背景場上では，アノマリーがないのは $p=1,d=10$ と $p=2,d=11$ の場合だけであることがわかる．６節では非摂動論的方法によって，零質量粒子の存在を議論する．

§2. 作用とその対称性

Super p-brane を考える前に bosonic p-brane を考えよう．この場合の力学変数は，p-brane の $p+1$ 次元世界体積 (world-volume) から d 次元時空への写像 $X^{\mu}(\xi^{i})$ $(\mu=0,1,\cdots,d-1;i=0,1,\cdots,p)$ である．$p\geq 2$ のときは，世界体積の空間的座標 ξ^{a} $(a=1,\cdots,p)$ で決まる p-brane 多様体のトポロジーには無限個の種類がある．時空が Minkowski

時空の場合，この X^μ に対する最も簡単で自然な作用は[1]，

$$I[X] = -T\int d^{p+1}\xi\sqrt{-det\, h_{ij}}, \quad h_{ij} \equiv \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}. \tag{1}$$

ここで，T は p-brane tension である．以下では，簡単のため $T=1$ とする．この作用は，世界体積上の $p+1$ 次元の一般座標変換と時空の Poincaré 変換に対して不変である．String の場合と同じように，世界体積上の独立な計量 g_{ij} を使って，古典的には上の作用 (1) と同等な作用

$$I'[X,g] = T\int d^{p+1}\xi[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(p-1)\sqrt{-g}] \tag{2}$$

を考えることもできるが，以下では主に (1) の形の作用だけを使う．

次にこの p-brane の超対称性化を考える．String の場合には，Neveu-Schwarz-Ramond 形式と Green-Schwarz 形式の２つの方法があった．一般の p-brane の場合には，Neveu-Schwarz-Ramond 形式は今のところ知られていない．これは，時空の超対称性を得ることができるかどうかわからないことと，$p>1$ では，(2) の中の世界体積上の宇宙項 $\sqrt{-g}$ を局所超対称性化するときに Einstein 項 $\sqrt{-g}R$ が必要になり[2]，取扱いが難しくなるためである．一方，Green-Schwarz 形式の作用は，文献 3)-5) で構成された．以下この作用について議論していく．

Green-Schwarz 形式の p-brane の力学変数は，$p+1$ 次元世界体積から d 次元 N-extended 超空間への写像 $Z^M = (X^\mu(\xi), \theta^\alpha(\xi))$ $(M=(\mu,\alpha),\ \mu=0,1,\cdots,d-1;\ \alpha=1,2,\cdots,2^{[d/2]}N)$ である．Minkowski 時空上の作用は，

$$\begin{gathered} I = -\int d^{p+1}\xi[\sqrt{-det\, h_{ij}} + \frac{2}{(p+1)!}\epsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}\Pi_{i_1}^{A_1}\cdots\Pi_{i_{p+1}}^{A_{p+1}}B_{A_{p+1}\cdots A_1}], \\ \Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i\bar{\theta}\Gamma^\mu\partial_i\theta, \quad \Pi_i^\alpha = \partial_i\theta^\alpha, \quad h_{ij} = \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \eta_{\mu\nu} \end{gathered} \tag{3}$$

で与えられる．ここで Γ^μ は d 次元時空のガンマ行列である．また，$B_{A_{p+1}\cdots A_1}$ $(A=(\mu,\alpha))$ は，超空間上の $p+1$ 形式であり，その場の強さ $H_{A_{p+2}\cdots A_1}$ の零でない成分は，C を荷電共役行列として

$$H_{\alpha\beta\mu_1\cdots\mu_p} = i\zeta^{-1}(C\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\alpha\beta}, \quad \zeta \equiv (-1)^{(p-2)(p-5)/4}. \tag{4}$$

作用 (3) は，世界体積上の $p+1$ 次元の一般座標変換と時空の超 Poincaré 変換に対して不変である．Superstring の場合には，さらに κ 対称性，または，Siegel 対称性と呼ばれる

fermionic な局所対称性があり，これによって fermionic な自由度が半分になった．今の場合にもこの対称性を要請する．変換の形は，$\kappa^{\alpha}(\xi)$ を変換のパラメータとして，

$$\delta\theta = (1+\Gamma)\kappa, \quad \delta X^{\mu} = i\bar{\theta}\Gamma^{\mu}\delta\theta,$$
$$\Gamma \equiv \frac{\zeta}{(p+1)!\sqrt{-h}}\epsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}\Pi_{i_1}^{\mu_1}\cdots\Pi_{i_{p+1}}^{\mu_{p+1}}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} \tag{5}$$

で与えられる．ここで定義した Γ は $\Gamma^2=1$ を満たし，したがって，$\frac{1}{2}(1\pm\Gamma)$ は射影演算子である．作用 (3) がこの局所変換に対して不変であるためには，ガンマ行列の恒等式

$$(C\Gamma_{\mu})_{(\alpha\beta}(C\Gamma^{\mu\nu_1\cdots\nu_{p-1}})_{\gamma\delta)} = 0 \tag{6}$$

が成り立たなければならない．この式は，d, p, N に対する式

$$d-p-1 = 2^{[d/2]-2}\,N \tag{7}$$

が成立するときのみ満たされる．式 (7) の両辺は，それぞれ，ゲージ自由度を除いた bosonic と fermionic な物理的自由度の数を表している．式 (7) を満たす (d,p) は次の 12 個である．

8=8：(10,1), (11,2)

4=4：(6,1), (7,2), (8,3), (9,4), (10,5)

2=2：(4,1), (5,2), (6,3)

1=1：(3,1), (4,2)

左はじの等式は (7) の自由度である．可能な N の値は，$d=10$, $p=1$ の場合は $\frac{1}{2}$ または 1，それ以外の場合は 1 である．このように，κ 対称性を持つ super p-brane は有限個しかない．

作用 (3) は，平らな時空上のものであったが，これに背景場を付け加えることができる．背景場は，超場である超多脚場 E_M^A と超 $(p+1)$ 形式 $B_{A_{p+1}\cdots A_1}$ で表され，作用の κ 不変性を要請すると，これらの背景場に対して条件がつく．$(d,p)=(10,1),(11,2)$ に対しては，この条件式はそれぞれ $d=10, 11$ の超重力理論の運動方程式と同等であることが示されている[4),6)]．他

の (d,p) の場合は，まだくわしく調べられていないが，それぞれの次元での超重力理論の運動方程式になると期待される．String $(p=1)$ の場合は，背景場とスペクトラムの間に対応があったが，$p \geq 2$ の場合にも同じような対応関係があるかどうかは興味深い問題である．

§3．ハミルトニアン形式

Super p-brane を量子化する第一歩として，そのハミルトニアン形式を考える[7),8)]．作用 (3) から力学変数 X^μ, θ^α に対する正準運動量 P_μ, P_α を定義し，ハミルトニアン形式に移ると，次のような3種類の拘束条件が現れる．

$$\begin{aligned} T &\equiv \frac{1}{2}(P-\Sigma)^\mu(P-\Sigma)_\mu + \frac{1}{2}deth_{ab} \approx 0, \\ T_a &\equiv \Pi_a^\mu (P-\Sigma)_\mu \approx 0, \\ F_\alpha &\equiv P_\alpha + i(\bar{\theta}\Gamma^\mu)_\alpha P_\mu + \Sigma_\alpha \approx 0. \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，

$$\Sigma_A \equiv (-1)^A \frac{2}{p!}\epsilon^{a_1\cdots a_p}\Pi_{a_1}^{B_1}\cdots\Pi_{a_p}^{B_p} B_{B_p\cdots B_1 A} \tag{9}$$

である．これらの拘束の間の Poisson 括弧を調べると，初めの2つは世界体積上の座標変換に対応する第1種の拘束で，3番目のものは κ 変換に対応する第1種の拘束と θ の運動方程式が時間パラメータについて1階であるために現れる第2種の拘束の混合であることがわかる．Superstring の場合と同じように，3番目の拘束を第1種と第2種に共変的に分離することは難しく，そのため共変的量子化はできていない．

第1種の拘束に対するゲージ固定を考えよう．ここでは，光円錐ゲージ

$$X^+ = p^+\tau, \quad P^+ = p^+, \quad \Gamma^+\theta = 0 \tag{10}$$

をとる．ここで，p^+ は P^+ の零モード，$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{d-1})$ などである．これは共変な条件ではないため，Lorentz 対称性 SO(d-1,1) のうち明白な形で残るのは SO(d-2) だけである．3番目の条件から θ をその半分の成分を持った SO(d-2) スピノール S で表すことができる．このゲージ固定条件により独立な自由度は $x^-, p^+, X^I(\xi), P_I(\xi), S^\alpha(\xi)$ $(I=1,\cdots,d-2;\ \alpha=1,\cdots,2(d-3))$ となる．他の変数は，これらを使って表すことができる．残っている自由度を

数えてみるとわかるように，条件 (10) はゲージを完全には固定していない．残っている対称性は，体積を不変に保つ座標変換 (Volume-preserving Diffeomorphism, VDiff)

$$\delta X^I = \varepsilon^a \partial_a X^I, \quad \delta S = \varepsilon^a \partial_a S, \quad \nabla_a \varepsilon^a = 0 \tag{11}$$

であり，この変換に対応する拘束は

$$\nabla_{[a} T_{b]} \approx 0, \quad \oint_{C_i} dl^a T_a \approx 0. \tag{12}$$

ここで，C_i は p-brane 多様体上のコサイクルである．２番目の条件は p-brane 多様体上の大局的条件で，closed string での $L_0 = \tilde{L}_0$ の拡張である．

この光円錐ゲージでの運動方程式は，作用[4),8)]

$$\begin{aligned} I_{LC} = &- V_p \int d\tau \dot{x}^+ \dot{x}^- \\ &+ \frac{1}{2} \int d^{p+1}\xi [(\dot{X}^I)^2 - det h_{ab} + i\bar{S}\dot{S} + (-i)^p \bar{S}\gamma^a \gamma \partial_a S] \end{aligned} \tag{13}$$

から導くことができる．ただし，V_p は p-brane 多様体の体積，また，γ^I を SO(d-2) ガンマ行列として，

$$\gamma \equiv \frac{\eta}{p!} \epsilon^{a_1 \cdots a_p} \partial_{a_1} X^{I_1} \cdots \partial_{a_p} X^{I_p} \gamma^{I_1 \cdots I_p}, \quad \gamma^a \equiv h^{ab} \partial_b X^I \gamma^I, \quad \bar{S} \equiv S^\dagger. \tag{14}$$

この作用は，ゲージ固定する前の作用 (3) と違い，力学変数についての多項式になっている．作用 (13) は，２つの定数スピノール α, β をパラメータとする時空の超対称性変換

$$\delta X^I = -2i\bar{S}\gamma^I \alpha, \quad \delta S = -2\dot{X}^I \gamma^I \alpha + 2(-i)^{p+1} \gamma\alpha + \beta \tag{15}$$

に対して不変である．α 変換は世界体積上の超対称性変換とよく似た形をしている．

§4．半古典的量子化

作用 (13) を見るとわかるように，一般の p-brane では，光円錐ゲージをとっても運動方程式は線形でなく，厳密な量子化は難しい．そのため，この節では半古典的な量子化を考える．まず p-brane 方程式の安定な古典解を１つ選び，その解のまわりの微小振動を線形化し，それを量子化する．ここでは，2次元トーラスのトポロジーをした supermembrane ($d=11$, $p=2$) の場合[9)]を考える．時空は，9次元 Minkowski 時空 × 2次元トーラスであり，p-brane 方程式の古典解として，

$$\begin{aligned} &X_{cl}^1 = l_1 R_1 \sigma, \quad X_{cl}^2 = l_2 R_2 \rho, \quad (0 \le \sigma, \rho \le 2\pi), \\ &X_{cl}^I = 0 \ (I = 3, 4, \cdots, 9), \quad S_{cl} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

を選ぶ．この解は，トーラスのトポロジーをした membrane が時空のトーラスに巻きついているものである．R_1, R_2 と l_1, l_2 は，それぞれ，時空のトーラスの２つの円の半径とそのまわりの巻きつき数である．また，σ, ρ は p-brane 多様体の２つの座標である．この解は，式 (15) の α 変換と β 変換の適当な線形結合に対して不変である．巻きつき数が零でない場合は，式 (3) に与えられた計量 h_{ij} にこの古典解を代入したものは

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} -(l_1 R_1 l_2 R_2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (l_1 R_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (l_2 R_2)^2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

の様に非退化で，この解は安定になっている．

この古典解のまわりの微小振動は $Z^I \equiv X^I - X_{cl}^I (I = 1, \cdots, 9)$, S^α で表される．光円錐ゲージで残っていた拘束 (12) のうち初めのものに対するゲージ変換は，ゲージ条件

$$\partial_1 Z^2 - \partial_2 Z^1 = 0 \tag{18}$$

によって固定することができる．残った拘束は，トーラス上の２つのコサイクルに対する２つの大局的拘束だけである．これらの拘束は，物理的状態に対する補助条件として課す．ゲージ条件 (18) を使うと，線型化した運動方程式は

$$\ddot{Z}^I - h h^{ab} \partial_a \partial_b Z^I = 0, \quad \dot{S} + i \gamma^a \gamma \partial_a S = 0 \tag{19}$$

となる．この解は

$$
\begin{aligned}
&Z^1 = x^1 + p^1\tau + \partial_1\phi, \quad Z^2 = x^2 + p^2\tau + \partial_2\phi, \\
&\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m^2+n^2\neq 0} \frac{1}{(\omega_{mn})^2} e^{i(m\sigma+n\rho)} [\alpha_{-m-n} e^{-i\omega_{mn}\tau} + h.c.], \\
&Z^I = x^I + p^I\tau + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m^2+n^2\neq 0} \frac{1}{\omega_{mn}} e^{i(m\sigma+n\rho)} [\alpha^I_{-m-n} e^{-i\omega_{mn}\tau} + h.c.], \\
&\chi = S_{00} + \sum_{m^2+n^2\neq 0} e^{i(m\sigma+n\rho)} [S_{-m-n} e^{-i\omega_{mn}\tau} + \frac{m-in}{\omega_{mn}} S^\dagger_{mn} e^{i\omega_{mn}\tau}], \\
&\qquad \omega_{mn} = \sqrt{(ml_2R_2)^2 + (nl_1R_1)^2},
\end{aligned} \tag{20}
$$

$(I = 3, \cdots, 9)$ で与えられる．ここで，σ, ρ, τ を適当に rescale した．χ は S から作られる８成分の複素スピノールである．展開係数 $\alpha_{mn}, \alpha^I_{mn}, S^A_{mn}$ は，今の場合の Lorentz 対称性 SO(8,1) のうち光円錐ゲージで明白に実現されている SO(7) の表現 **1, 7, 8** に属している．

量子化は上の展開係数に対して正準交換関係

$$
\begin{aligned}
&[\alpha^I_{mn},\, \alpha^{J\dagger}_{m'n'}] = \omega_{mn}\delta^{IJ}\delta_{mm'}\delta_{nn'}, \quad [\alpha_{mn},\, \alpha^\dagger_{m'n'}] = \omega_{mn}\delta_{mm'}\delta_{nn'}, \\
&\{S^A_{mn},\, S^{B\dagger}_{m'n'}\} = \delta^{AB}\delta_{mm'}\delta_{nn'}, \quad \{S^A_{00},\, S^{B\dagger}_{00}\} = 2\delta^{AB}
\end{aligned} \tag{21}
$$

を要請することによって行われる．スペクトラムに現れる粒子の質量オペレーターは

$$
m^2 = (l_1R_1l_2R_2)^2 + 2\sum_{m^2+n^2\neq 0} [\sum_{I=3}^{9} \alpha^{I\dagger}_{mn}\alpha^I_{mn} + \alpha^\dagger_{mn}\alpha_{mn} + \sum_A \omega_{mn} S^{A\dagger}_{mn} S^A_{mn}] + c. \tag{22}
$$

ただし，c は各モードの零点エネルギーの和で，今の場合は式(15)の超対称性があるため bosonic な寄与と fermionic な寄与が相殺して零になる．これは，bosonic membrane[10) や超対称性を持たない古典解のまわりで半古典的量子化を行った supermembrane[11) と異なる点である．それらの場合には，c は，時空の次元が自然数のときには零質量粒子がスペクトラムに存在しないような値になっていた．物理的状態に課すべき式(12)の大局的拘束条件は，

$$
\begin{aligned}
&l_1R_1p_1 + \sum_{m^2+n^2\neq 0} [\frac{m}{\omega_{mn}} (\alpha^{I\dagger}_{mn}\alpha^I_{mn} + \alpha^\dagger_{mn}\alpha_{mn}) + mS^\dagger_{mn}S_{mn}] = 0, \\
&l_2R_2p_2 + \sum_{m^2+n^2\neq 0} [\frac{n}{\omega_{mn}} (\alpha^{I\dagger}_{mn}\alpha^I_{mn} + \alpha^\dagger_{mn}\alpha_{mn}) + nS^\dagger_{mn}S_{mn}] = 0.
\end{aligned} \tag{23}
$$

物理的状態の空間は，基底状態に生成演算子 $\alpha^{\dagger}_{mn}, \alpha^{I\dagger}_{mn}, S^{\dagger}_{mn}$ を掛けて得られる状態のうち，条件 (23) を満たすもので張られる．基底状態は，

$$|vac\rangle = \left|l_a, p_a, p_I, p^+; R\right\rangle \quad (a = 1, 2; I = 3, 4, \cdots, 9) \tag{24}$$

で表される．R は S_{00} のつくる Clifford 代数の表現空間であり，SO(7) の表現になっている．この R は超 Poincaré 対称性の無矛盾性から決めるべきものである．物理的な基底状態に対しては条件 (23) から $p_a = 0$ で，その状態の表す粒子の質量は，式 (22) から $m^2 = (l_1 R_1 l_2 R_2)^2$ である．したがって，R は質量のあるときの little group SO(8) の表現になっているべきである．このような R として最も簡単なものは[12)]

$$\begin{aligned} R &= (2^7)_B + (2^7)_F \\ &= (\mathbf{1} + \mathbf{8} + \mathbf{28} + \mathbf{35} + \mathbf{56})_B + (\mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{56} + \mathbf{56})_F \end{aligned} \tag{25}$$

である．B, F はボソンとフェルミオンを表し，2 行目の数字は SO(8) の表現を表している．これは，9 次元の質量を持った超多重項の 1 つである．

§5．アノマリー

世界体積上の局所対称性に対するアノマリーを調べる．String の場合には，世界面上のアノマリーがない条件からその臨界次元が決まった．Bosonic string や Neveu-Schwarz-Ramond 形式での superstring では，世界面上の局所対称性のアノマリーを直接調べることができたが，Green-Schwarz 形式の superstring ではそれができず，光円錐ゲージでの時空の Lorentz 対称性のアノマリーを調べた．具体的には，Lorentz 変換の生成子の交換関係を量子論的に計算し，代数が閉じるかどうかを調べた．これにより，古典的に可能な 4 つの superstring のうち $d = 10$ のものに対してだけがアノマリーが無いことがわかった．

一般の super p-brane の場合も，上と同様に Lorentz 生成子の量子論的な交換関係を計算することによってアノマリーを調べることができる．しかし，理論が非線形のため計算が複雑である．ここでは，この方法ではなく，p-brane の基底状態と第 1 励起状態が，それらの表す粒子の little group の正しい表現になっているかどうかを調べることによりアノマリーの存在をみる[13)]．これは上の方法ほど完全ではないが，より簡単である．

まず，例として平らな Minkowski 時空での Type II superstring の場合を考えよう．光円錐ゲージでは，Lorentz 群 SO(d-1,1) のうち SO(d-2) だけが明白に実現されている．したがって，基底状態 $|p^\mu, R\rangle$ と振動子 $\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i, S_n^a, \tilde{S}_n^a$ は SO(d-2) の表現に属している．今の場合，基底状態は零質量であるから，その little group は SO(d-2) で，明らかにその表現に属している．ところが，第１励起状態

$$(\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j,\ S_{-1}^a \tilde{S}_{-1}^{\dot{a}},\ \alpha_{-1}^i \tilde{S}_{-1}^{\dot{a}},\ S_{-1}^a \tilde{\alpha}_{-1}^i)\,|p^\mu, R\rangle \tag{26}$$

は零でない質量を持っているから，その little group は SO(d-1) である．SO(d-2) の表現に属している基底状態と振動子の積からなるこれらの状態が，正しい SO(d-1) の表現を作っているかどうかは明らかではない．実際，SO(d-2) の表現のテンソル積を計算して，それを SO(d-1) の表現にまとめあげることができるかどうか調べてみると，d=10 のときだけ可能で，それ以外の場合はできないことがわかる．このようにして，$d \neq 10$ のときに Lorentz 対称性にアノマリーがあることがわかる．$d = 10$ の場合にアノマリーがないことをこの方法で完全に示すには，すべての励起状態についての表現を調べなければならないが，それよりも量子論的代数が閉じていることを示す方が簡単である．

さて，この方法で super p-brane の場合のアノマリーを調べよう．前節で supermembrane に対して考えた半古典的量子化を，一般の super p-brane に対して行う．時空は，$d-p$ 次元 Minkowski 時空 × p 次元トーラスで，この時空のトーラスに p 次元トーラスのトポロジーをした p-brane が巻きついている古典解 $X_{cl}^a = l_a R_a \xi_a \quad (a = 1, \cdots, p)$ を考える．前節と同様に光円錐ゲージで量子化を行うと，今の場合の Lorentz 群 SO($d-p-1$,1) の中で明白に実現されているのは SO($d-p-2$) である．基底状態と振動子はこの SO($d-p-2$) の表現に属している．式 (22) のように粒子の質量オペレーターに古典解からの寄与があるため，基底状態と第１励起状態は両方とも質量を持った状態である．したがって，これらの状態はその場合の little group SO($d-p-1$) の表現に属していなければならない．実際にこれらの表現を調べてみると，２節にあげた古典的に可能な１２個の super p-brane のうち，正しく SO($d-p-1$) の表現に属しているのは $d = 10, p = 1$ (superstring) と $d = 11, p = 2$ (supermembrane) の場合だけであることがわかる．したがって，今考えている背景場に対しては，この２つの場合以外はアノマリーがあることがわかった．１１次元の supermembrane にアノマリーが無いことを完全に示すには量子論的な Lorentz 代数が閉じていることを示さなければならない．これは残されている問題である．

§6．非摂動論的方法

4節では，p-brane 方程式の古典解を1つ選び，そのまわりでの半古典的量子化を行った．しかし，零質量粒子の存在などを厳密に示すためには非摂動論的な効果も取り入れた方法を使わなければならない．ここでは，Schrödinger 表示を使って，光円錐ゲージでの零質量状態の満たすべき条件式を求め，それから零質量粒子の存在を厳密に示すことを考える[14)]．以下では11次元の supermembrane の場合を考える．

まず，p-brane 多様体上の任意の関数 A, B に対してリー括弧

$$\{A, B\}_{LB} \equiv \epsilon^{ab}\partial_a A \partial_b B \tag{27}$$

を定義する．式(11)の VDiff のうち，(12)の初めの拘束に対応する変換に対しては，そのパラメーターは $\varepsilon^a = \epsilon^{ab}\partial_b \varepsilon$ と書ける．このとき，変換は

$$\delta X^I = \{\varepsilon, X^I\}_{LB}, \quad \delta S = \{\varepsilon, S\}_{LB} \tag{28}$$

となる．下で考えるような球面トポロジーの supermembrane に対しては，変換パラメーターはいつも上のように書ける．他のトポロジーに対しては，そのように書けないパラメーターがあり，それに対応する大局的拘束を考慮する必要がある．また，光円錐ゲージの supermembrane のハミルトニアン，(15)の超対称性変換に対する超電荷，(12)の局所的な拘束は，

$$\begin{aligned} H &= \int d^2\xi [\frac{1}{2}P_I^2 + \frac{1}{4}(\{X^I, X^J\}_{LB})^2 - \frac{i}{2}\bar{S}\gamma^I\{X^I, S\}_{LB}], \\ Q &= \int d^2\xi [P^I\gamma^I + \frac{1}{2}\{X^I, X^J\}_{LB}\gamma^{IJ}]S, \\ \Phi &\equiv \{P^I, X^I\}_{LB} + \frac{i}{2}\{\bar{S}, S\}_{LB} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

次に，光円錐ゲージでの独立な変数 $x^-, p^+, X^I(\xi), P_I(\xi), S^\alpha(\xi)\ (I = 1, \cdots, d-2;\ \alpha = 1, \cdots, 2(d-3))$ のうち局所的なものを零モードとそれ以外の部分に分ける：$X^I(\xi) = x^I + \tilde{X}^I(\xi)$, $P_I(\xi) = p_I + \tilde{P}_I(\xi)$, $S^\alpha(\xi) = S_0^\alpha + \tilde{S}^\alpha(\xi)$．すると，式(29)の拘束 Φ は零モードを含まず，また，ハミルトニアンと超電荷は，$H = H_0 + \tilde{H}$, $\quad Q = Q_0 + \tilde{Q}$ のように零モー

ドだけを含む部分と零モードを含まない部分に分離でき，さらにそれぞれの部分が独立に保存している．零モードを含まない部分 $\tilde{H}, \Phi, \tilde{Q}$ は，閉じた代数をつくり，特に，

$$\{\tilde{Q}^\alpha, \tilde{Q}^\beta\} = 2\tilde{H}\delta^{\alpha\beta} + (\gamma^I)^{\alpha\beta}\int d^2\xi \tilde{X}^I\Phi \tag{30}$$

が成り立つ．$\tilde{Q}$ は，時空の超対称性変換の生成子であるが，この式から，世界体積上の超電荷とみることもできる．

さて，零質量粒子の状態の満たすべき条件式を考えよう．粒子の質量オペレーターは $2\tilde{H}$ である．したがって，条件式は，

$$\tilde{H}\,|\Psi\rangle = 0, \quad \Phi\,|\Psi\rangle = 0 \tag{31}$$

となる．4節の半古典的量子化の議論では，拘束 Φ に対するゲージを条件 (18) によって固定して考えたが，今の場合は拘束を物理的状態に対する補助条件として課した．大局的な拘束のある場合にはそれも課す必要がある．零質量粒子の存在を示すには，これらの式に解が存在することを示せばよい．式 (30) を使うと，式 (31) から

$$\tilde{Q}^\alpha\,|\Psi\rangle = 0 \tag{32}$$

が得られる．この式は，零モードを含まないセクターだけを考えた場合，破れていない超対称な真空が存在することを示している．実際に解を求める場合には式 (31) よりも式 (32) のほうが簡単である．

式 (31) や (32) を扱うにはなんらかの正則化が必要である．球面トポロジーの membrane に対しては，次のような正則化が可能である．まず零モードを含まない変数 X^I, P_I, S を球面調和関数 $Y_A(\sigma,\rho)$ $(A=(l,m))$ を使って $\tilde{X}^I(\tau,\sigma,\rho) = \sum_A X^I_A(\tau)Y_A(\sigma,\rho)$ $(A \neq (0,0))$ などのように展開する．球面調和関数は，リー括弧 (27) に関して閉じた代数をつくっている：

$$\{Y_A, Y_B\}_{LB} = g_{ABC}Y_C. \tag{33}$$

ここに現れる構造定数 g_{ABC} は，SU(N) の構造定数 f^N_{ABC} の $N\to\infty$ 極限と一致することが知られている[15)]．実際，(l,m) のとりうる値の数は $1 \le l \le L$ のとき $\sum_{l=1}^{L}(2l+1) =$

$(L+1)^2-1$ で，これは $N=L+1$ のときの $\mathrm{SU}(N)$ の次元である．したがって，球面調和関数による展開を $l\leq L$ で止めてしまうこととことによって理論を正則化することができる．この正則化の長所は，$\tilde{H},\tilde{Q},\Phi$ のつくる式 (30) などの代数関係が保たれることである．VDiff は，式 (28) のようにリー括弧によって生成されるから，この正則化によって $\mathrm{SU}(N)$ のゲージ変換になったことがわかる．理論全体は，次のような対応によって，$A_0=0$ ゲージの $9+1$ 次元の $\mathrm{SU}(N)$ 超 Yang-Mills 理論を $0+1$ 次元に dimensional reduction したものになる．

$\{\ ,\ \}$	$\rightarrow$	$\mathrm{SU}(N)$ 行列の交換関係
$\int d^2\xi$	$\rightarrow$	$\mathrm{SU}(N)$ 行列のトレース
X^I	$\rightarrow$	A_I：ゲージ場の空間成分
S	$\rightarrow$	χ：ゲージ・フェルミオン
$\Phi=0$	$\rightarrow$	Gauss の法則の拘束

A_0 に対応したゲージ場を導入して，拘束 $\Phi=0$ を作用から導くこともできるが[14)]，ここでは考えない．（他の super p-brane に対するそのようなゲージ理論については，文献 8) を見よ．）

この正則化の方法を使って，文献 14) では条件式 (32) の解を具体的に求めようとしている．しかし，方程式 (32) が複雑なため解を求めることができず，零質量粒子の存在についてのはっきりした結論を出していない．

上のような正則化を使って考えた場合，式 (32) の解が存在するかどうかは，$0+1$ 次元の超 Yang-Mills 理論の超対称性が破れているかどうかという問題になる．このような問題を扱うときには，超対称な場の理論の Witten 指数を考えると便利であり，文献 16) ではそれを使って式 (32) の解の存在が調べられた．この指数は，場の理論の位相不変量であり，そのことを利用するとその値を厳密に計算できる場合がある．もしこの指数が零でないならば，超対称性は破れておらず，超対称な真空状態が存在することを示している．力学変数の零モードまで含めて考えた場合，S_0 のため基底状態は時空の超対称性の超多重項をつくり縮退している．したがって，そのときの Witten 指数 $I_W=tr(-1)^F$ は，式 (32) の解が存在していたとしても零になる．そこで新しい指数

$$I_C=tr[(-1)^F\frac{1}{2}(1+C)]=128\tilde{tr}(-1)^F \tag{34}$$

を考える．ここで，C は変換

$$(X^I,P_I,S)(\sigma,\rho)\rightarrow-(X^I,P_I,S)(-\sigma,\rho) \tag{35}$$

の生成子で超電荷 Q と交換する．また，$\tilde{tr}$ は零モード以外のモードに対する状態のトレースである．前の係数 128 は，S_0 によって 256 重に縮退している基底状態のうち，射影演算子 $\frac{1}{2}(1+C)$ によって選び出された半分の状態の数を表している．文献 16) ではこの指数 I_C を計算し，値そのものは求めていないが，それが零でないことを示している．このことから，零質量状態が存在していることを結論している．しかし，これらの状態がどのような零質量粒子を含んでいるかはわかっていない．

文献

1) P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. **A268** (1962) 57.

2) P.S. Howe and R.W. Tucker, J. Phys. **A10** (1977) L155; T. Uematsu, Z. Phys. **C29** (1985) 143; E. Bergshoeff, E. Sezgin and P.K. Townsend, Phys. Lett. **209B** (1988) 451.

3) J. Hughes, J. Liu and J. Polchinski, Phys. Lett. **180B** (1986) 370.

4) E. Bergshoeff, E. Sezgin and P.K. Townsend, Phys. Lett. **189B** (1987) 75; Ann. Phys. **185** (1988) 330.

5) A. Achúcarro, J.M. Evans, P.K. Townsend and D.L. Wiltshire, Phys. Lett. **198B** (1987) 441.

6) M.J. Duff, P.S. Howe, T. Inami and K.S. Stelle, Phys. Lett. **191B** (1987) 70.

7) E. Bergshoeff, E. Sezgin and Y. Tanii, Nucl. Phys. **B298** (1988) 187.

8) E. Bergshoeff, E. Sezgin, Y. Tanii and P.K. Townsend, ICTP preprint to appear.

9) M.J. Duff, T. Inami, C.N. Pope, E. Sezgin and K.S. Stelle, Nucl. Phys. **B297** (1988) 515.

10) K. Kikkawa and M. Yamasaki, Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 1379.

11) L. Mezincescu, R.I. Nepomechie and P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. **B309** (1988) 317.

12) I. Bars, C.N. Pope and E. Sezgin, Phys. Lett. **198B** (1987) 455.

13) I. Bars, Nucl. Phys. **B308** (1988) 462; I. Bars and C.N. Pope, Class. Quantum Grav. **5** (1988) 1157.

14) B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, Karlsruhe-Utrecht preprint KA-THEP 6/88, THU-88-15.

15) J. Hoppe, Ph.D. Thesis, MIT (1982); Aachen preprint PITHA 86/24.

16) C.N. Pope and K.S. Stelle, Class. Quantum Grav. **5** (1988) L161.