

## 偏心円孔を有する帯板の引張り\*

(調和変位関数に基づく解析)

堀 辺 忠 志<sup>\*1</sup>, 土 田 栄 一 郎<sup>\*2</sup>, 草 野 宣 幸<sup>\*3</sup>

### Stresses in an Elastic Strip Having an Eccentric Circular Hole under Tension (An Analysis Using the Displacement Potential)

Tadashi HORIBE<sup>\*4</sup>, Eiichiro TSUCHIDA and Nobuyuki KUSANO

<sup>\*4</sup> Department of Mechanical Engineering, Ibaraki University,  
4-12-1 Nakanarusawa-cho, Hitachi-shi, Ibaraki, 316-8511 Japan

This paper presents an analytical solution for an infinite strip having an eccentric circular hole when the strip is subjected to tension at infinity. The analysis is based on the Papcovich-Neuber potential approach and the solution is obtained by the proper combination of harmonic function in integral forms and infinite series. The boundary conditions both on edge of the strip and on the hole are satisfied using the relations between the polar and Cartesian harmonics. The numerical results obtained are compared with those of existing solutions. A detailed stresses around the hole are illustrated for various sizes of the eccentricity and the hole.

**Key Words:** Elasticity, Stress Concentration, Infinite Strip, Eccentric Circular Hole, Tension

#### 1. 結 論

円孔を有する帯板の引張りは、典型的な応力集中問題の一つである。円孔が帯板中央にある場合は Howland<sup>(1)</sup>, また、円孔が偏心している場合は Ling<sup>(2)</sup>, 石田<sup>(3)</sup>らにより Airy の応力関数に基づいて解が求められている。そして、それらの重要な結果はハンドブックなどに記載されており、強度設計の重要な指針となっている<sup>(4)(5)</sup>。

一方、著者の一人(土田)は、三次元弾性理論に基づき Boussinesq, Neuber および Dougall の応力関数を組み合わせることにより、半無限体、厚板、円柱などに球かや楕円体状空かが存在する場合の種々の厳密解を導いて、応力集中現象を明らかにしてきた<sup>(6)~(9)</sup>。同時に、この解法の基本的な考え方を二次元弾性問題にも適用し、Papcovich-Neuber<sup>(10)</sup>の調和変位関数に基づいて数々の平面弾性問題を解析した<sup>(11)~(13)</sup>。

そこで、本研究では、偏心円孔を有する帯板が引張

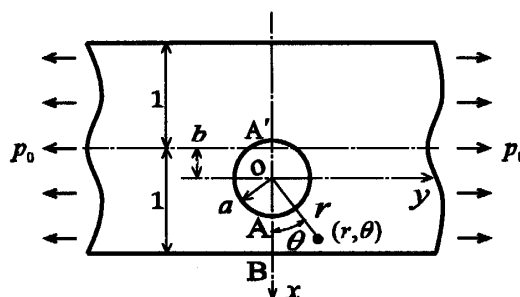


Fig. 1 Coordinate system

り荷重を受ける場合の厳密解を Papcovich-Neuber の調和変位関数に基づいて求め、従来の解や FEM による結果との比較を行うとともに、円孔周りの応力を詳細に解析して強度計算のための基礎資料を提示する。

#### 2. 解 析 法

図 1 に示すように、円孔の偏心量を  $b$ 、帯板の幅を 2 として、帯板の半分の幅 ( $= 1$ ) を全ての長さの基準として測るものとする。また、円孔の中心  $O$  を座標原点とする直角座標  $(x, y)$  と極座標  $(r, \theta)$  を使用する。したがって、帯板側面は  $x = 1 - b$ ,  $x = -1 - b$ , 円孔

\* 原稿受付 2006年6月1日。

<sup>\*1</sup> 正員、茨城大学工学部(☎316-8511 日立市中成沢町4-12-1)。

<sup>\*2</sup> 正員、元：埼玉大学工学部機械工学科(☎338-8570 さいたま市桜区下大久保255)。

<sup>\*3</sup> 学生員、茨城大学大学院理工学研究科。

E-mail: horibe@mx.ibaraki.ac.jp

面は  $r = a$  で表わされる。

本研究では、以下に示す Papcovich-Neuber の変位関数  $\varphi_0, \varphi_1$  を用いる。直角座標における変位成分を表すと以下ようになる<sup>(10)</sup>。

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0 + x\varphi_1) - (\kappa + 1)\varphi_1 \\ 2Gv_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0 + x\varphi_1) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $u_x, v_y$  は  $x, y$  方向の変位成分、 $G$  は横弾性係数、 $\nu$  をポアソン比として、 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  (平面応力)、 $\kappa = 3 - 4\nu$  (平面ひずみ) である。また、変位関数  $\varphi_0, \varphi_1$  は調和関数であり  $\nabla^2 \varphi_1 = 0, \nabla^2 \varphi_2 = 0$  である。

偏心円孔を有する無限長帯板が無限遠方で  $y$  軸方向に  $p_0$  の引張り荷重を受ける場合の解を得るには、以下のような境界条件を満足する解を導けばよい。

(i) 帯板側面  $x = 1 - b, x = -1 - b$  で

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{x=1-b} &= (\sigma_x)_{x=-1-b} = 0 \\ (\tau_{xy})_{x=1-b} &= (\tau_{xy})_{x=-1-b} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

(ii) 円孔面  $r = a$  で

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\tau_{r\theta})_{r=a} = 0 \quad (3)$$

(iii) 無限遠方  $r \rightarrow \infty$  で

$$\sigma_y = p_0, \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (4)$$

はじめに、変位関数  $\varphi_0, \varphi_1$  として次の調和関数を与える。

$$[I] \begin{cases} \varphi_0 = \frac{(\kappa + 1)p_0}{8}(y^2 - x^2) = -\frac{(\kappa + 1)p_0}{8}r^2 \cos 2\theta \\ \varphi_1 = -\frac{p_0}{2}x = -\frac{p_0}{2}r \cos \theta \end{cases} \quad (5)$$

変位関数 [I] より導かれる変位および応力成分は、

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= -\frac{3 - \kappa}{4}p_0x, \quad 2Gv_y = \frac{\kappa + 1}{4}p_0y \\ \sigma_y &= p_0, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。

この結果は、帯板の無限遠方において単位面積あたり  $p_0$  の引張り荷重を帯板に対して  $y$  軸方向に作用させたときの解となる。次いで、弾性体内に原点  $O$  を中心とする半径  $a$  の円を仮想すれば、この仮想円周上に生じている応力は次のように表される。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_r}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \\ \left(\frac{\sigma_\theta}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \left(\frac{\tau_{r\theta}}{p_0}\right)_{r=a} = \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (7)$$

次に、弾性体領域が円孔を除く無限板領域と帯板領域の共通部分から成っていることに注目して、それぞれの領域に応じた変位関数から得られる解を重ね合わせて、境界条件を満足させる。前者に対しては極座標で表わされた調和関数を、後者に対しては直角座標で表わされた調和関数を考え次のような変位関数を用いる。

$$[II] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \left( -A_0 \log r + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos m\theta}{r^m} \right) \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{\cos(m+1)\theta}{r^{m+1}} \end{cases} \quad (8)$$

$$[III] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \int_0^{\infty} \left[ \psi_1(\lambda) \cosh \lambda(x+b) + \psi_2(\lambda) \sinh \lambda(x+b) \right] \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = p_0 \int_0^{\infty} \lambda \left[ \psi_3(\lambda) \cosh \lambda(x+b) + \psi_4(\lambda) \sinh \lambda(x+b) \right] \cos \lambda y d\lambda \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $A_m, B_m$  及び  $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \psi_3(\lambda), \psi_4(\lambda)$  は、それぞれ境界条件より決定される未定係数及び未知関数である。特に帯板幅に比べて円孔半径が小さい場合は、[III] の変位関数は不要となる。なお、変位関数 [II], [III] より導かれる変位及び応力は無限遠方ですべて消失する。

計算の便宜上、変位関数 [II] を次のように分ける。

$$[II]1 \begin{cases} \varphi_0 = -p_0 A_0 \log r \end{cases} \quad (10)$$

$$[II]2 \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos m\theta}{r^m} \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{\cos(m+1)\theta}{r^{m+1}} \end{cases} \quad (11)$$

はじめに、帯板側面における境界条件 (i) を満足させるために、円柱座標と直角座標のもとの調和関数の関係式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos m\theta}{r^m} &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{m-1} e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \frac{\sin m\theta}{r^m} &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{m-1} e^{-\lambda x} \sin \lambda y d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (x > 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos m\theta}{r^m} &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \frac{\sin m\theta}{r^m} &= \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \sin \lambda y d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (x < 0) \quad (12)$$

を用い、計算の便宜上、応力関数 [II]2 を  $r$  のべき乗に関して次のように偶数項と奇数項とに分けて座標変換すると、

$$[IV] \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{2m}}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m-1} e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \quad + p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m} e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m-1} e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \quad + p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m} e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \end{array} \right. \quad (x > 0) \quad (13)$$

$$[IV] \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{2m}}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \quad - p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m} e^{\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \quad - p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m} e^{\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \end{array} \right. \quad (x < 0) \quad (14)$$

となる。なお、変位関数 [II]1 から得られる応力成分については、文献<sup>(13)</sup>に示したような座標変換を行えば直角座標表示式を求めることができる。

以上の変位関数 [III], [IV] による応力成分を求め、さらに変位関数 [II]1 から得られる応力成分を加えて帯板側面の境界条件を満足させると次のようになる。

$$\left( \frac{\sigma_x}{p_0} \right)_{x=1-b} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[ \psi_1(\lambda) \cosh \lambda + \psi_2(\lambda) \sinh \lambda + \psi_3(\lambda) \left\{ (1-b)\lambda \cosh \lambda - \frac{\kappa+1}{2} \sinh \lambda \right\} + \psi_4(\lambda) \left\{ -\frac{\kappa+1}{2} \cosh \lambda + (1-b)\lambda \sinh \lambda \right\} + \frac{A_0}{\lambda} e^{-(1-b)\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} e^{-(1-b)\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} e^{-(1-b)\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\kappa+1}{2} + (1-b)\lambda \right\} \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-2} e^{-(1-b)\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\kappa+1}{2} + (1-b)\lambda \right\} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m-1} e^{-(1-b)\lambda} \right] \times \cos \lambda y d\lambda = 0 \quad (15)$$

$$\left( \frac{\tau_{xy}}{p_0} \right)_{x=1-b} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[ -\psi_1(\lambda) \sinh \lambda - \psi_2(\lambda) \cosh \lambda + \psi_3(\lambda) \left\{ \frac{\kappa-1}{2} \cosh \lambda + (-1+b)\lambda \sinh \lambda \right\} + \psi_4(\lambda) \left\{ (-1+b)\lambda \cosh \lambda + \frac{\kappa-1}{2} \sinh \lambda \right\} + \frac{A_0}{\lambda} e^{-(1-b)\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} e^{-(1-b)\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} e^{-(1-b)\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)!} \left\{ \frac{\kappa-1}{2} + (1-b)\lambda \right\} \lambda^{2m-2} e^{-(1-b)\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left\{ \frac{\kappa-1}{2} + (1-b)\lambda \right\} \lambda^{2m-1} e^{-(1-b)\lambda} \right] \times \sin \lambda y d\lambda = 0 \quad (16)$$

$$\left( \frac{\sigma_x}{p_0} \right)_{x=-1-b} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[ \psi_1(\lambda) \cosh \lambda - \psi_2(\lambda) \sinh \lambda + \psi_3(\lambda) \left\{ -(1+b)\lambda \cosh \lambda + \frac{\kappa+1}{2} \sinh \lambda \right\} + \psi_4(\lambda) \left\{ -\frac{\kappa+1}{2} \cosh \lambda + \frac{1+b}{2} \lambda \sinh \lambda \right\} + \frac{A_0}{\lambda} e^{-(1+b)\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} e^{-(1+b)\lambda} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} e^{-(1+b)\lambda} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)!} \left\{ \frac{\kappa+1}{2} + (1+b)\lambda \right\} \lambda^{2m-2} e^{-(1+b)\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left\{ \frac{\kappa+1}{2} + (1+b)\lambda \right\} \lambda^{2m-1} e^{-(1+b)\lambda} \right] \times \cos \lambda y d\lambda = 0 \quad (17)$$

$$\left( \frac{\tau_{xy}}{p_0} \right)_{x=-1-b} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[ \psi_1(\lambda) \sinh \lambda - \psi_2(\lambda) \cosh \lambda + \psi_3(\lambda) \left\{ \frac{\kappa-1}{2} \cosh \lambda - (1+b)\lambda \sinh \lambda \right\} + \psi_4(\lambda) \left\{ (1+b)\lambda \cosh \lambda - \frac{\kappa-1}{2} \sinh \lambda \right\} - \frac{A_0}{\lambda} e^{-(1+b)\lambda} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} e^{-(1+b)\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} e^{-(1+b)\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)!} \left\{ \frac{\kappa-1}{2} + (1+b)\lambda \right\} \lambda^{2m-2} e^{-(1+b)\lambda} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left\{ \frac{\kappa-1}{2} + (1+b)\lambda \right\} \lambda^{2m-1} e^{-(1+b)\lambda} \right]$$

$$\times \sin \lambda y \, d\lambda = 0 \quad (18)$$

次に、式(15)~(18)をフーリエ逆変換して未知関数 $\psi_1(\lambda) \sim \psi_4(\lambda)$ を求めると、

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda) = & \left[ -\frac{e^{-(2+b)\lambda}(1+e^{2b\lambda})(-1+(2\lambda-\kappa)e^{2\lambda})}{2\lambda(2\lambda+\sinh 2\lambda)} \right. \\ & \left. -\frac{2b \sinh b\lambda}{2\lambda-\sinh 2\lambda} \right] A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-1}}{2(2m-1)!} e^{-(2+b)\lambda} \\ & \left[ -\frac{2b\lambda e^{2\lambda}(-1+e^{2b\lambda})}{2\lambda-\sinh 2\lambda} \right. \\ & \left. -\frac{(1+e^{2b\lambda})(-1+(2\lambda-\kappa)e^{2\lambda})}{2\lambda+\sinh 2\lambda} \right] A_{2m} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m} e^{-(1+b)\lambda}}{2(2m)!} \left[ -\frac{2b\lambda e^\lambda(1+e^{2b\lambda})}{2\lambda-\sinh 2\lambda} \right. \\ & \left. -\frac{(-1+e^{2b\lambda})((2\lambda-\kappa)e^\lambda-e^{-\lambda})}{2\lambda+\sinh 2\lambda} \right] A_{2m+1} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-2}}{(2m-1)!(4\lambda^2-\sinh^2 2\lambda)} \left[ -4b\lambda^2 \right. \\ & \times (\kappa + \cosh 2\lambda) \cosh b\lambda + \left\{ \lambda(\kappa^2 - 1 - 4(1-b^2)\lambda^2) \right. \\ & \left. + (1-\kappa^2 + 4(1+b^2)\lambda^2) \cosh \lambda \sinh \lambda \right\} \sinh b\lambda \left. \right] \\ & \times B_{2m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-1}}{(2m)!(4\lambda^2-\sinh^2 2\lambda)} \\ & \times \left[ \left\{ \lambda(\kappa^2 - 1 - 4(1-b^2)\lambda^2) + (1-\kappa^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 4(1+b^2)\lambda^2) \cosh \lambda \sinh \lambda \right\} \cosh b\lambda \right. \\ & \left. - 4b\lambda^2(\kappa + \cosh 2\lambda) \sinh b\lambda \right] B_{2m} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\lambda) = & \left[ \frac{2b \cosh b\lambda}{2\lambda+\sinh 2\lambda} + \frac{\sinh b\lambda(e^{-2\lambda}-\kappa+2\lambda)}{\lambda(2\lambda-\sinh 2\lambda)} \right] A_0 \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-1}}{2(2m-1)!(4\lambda^2-\sinh^2 2\lambda)} \left[ 8b\lambda \right. \\ & \times (\lambda - \cosh \lambda \sinh \lambda) \cosh b\lambda - 2e^{-\lambda}((\kappa-1-2\lambda) \\ & \times \cosh \lambda + (\kappa+1-2\lambda) \times \sinh \lambda)(2\lambda+\sinh 2\lambda) \\ & \times \sinh b\lambda \left. \right] A_{2m} \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m}}{4(2m)!(4\lambda^2-\sinh^2 2\lambda)} \left[ e^{-(4+b)\lambda}(1+e^{2b\lambda}) \right. \\ & \left. - 2(1-4\kappa\lambda+8\lambda^2+4\lambda \cosh 2\lambda-2\kappa \sinh 2\lambda) \cosh b\lambda \right. \\ & \left. + 8b\lambda(-2\lambda+\sinh 2\lambda) \sinh b\lambda \right] A_{2m+1} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-2}}{(2m-1)!(4\lambda^2-\sinh^2 2\lambda)} \left[ \{(1-\kappa^2)\lambda \right. \\ & \left. + 4(1-b^2)\lambda^3 + (1-\kappa^2+4(1+b^2)\lambda^2) \sinh \lambda \cosh \lambda \right. \\ & \left. \times \cosh b\lambda + 4b\lambda^2(\kappa - \cosh 2\lambda) \sinh b\lambda \right] B_{2m-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-1}}{(2m)!(4\lambda^2-\sinh^2 2\lambda)} \left[ 4b\lambda^2(\kappa - \cosh 2\lambda) \right. \\ & \times \cosh b\lambda + \left\{ \lambda(1-\kappa^2+4(1-b^2)\lambda^2) \right. \\ & \left. + (1-\kappa^2+4(1+b^2)\lambda^2) \sinh \lambda \cosh \lambda \right\} \sinh b\lambda \left. \right] B_{2m} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(\lambda) = & -\frac{2 \sinh b\lambda}{\lambda(2\lambda-\sinh 2\lambda)} A_0 \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\lambda^{2m-1} \sinh b\lambda}{(2m-1)!(2\lambda-\sinh 2\lambda)} A_{2m} \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\lambda^{2m} \cosh b\lambda}{(2m)!(2\lambda-\sinh 2\lambda)} A_{2m+1} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-2}}{(2m-1)!(2\lambda-\sinh 2\lambda)} \left[ -(e^{-2\lambda} + \kappa + 2\lambda) \right. \\ & \times \cosh b\lambda + 2b\lambda \sinh b\lambda \left. \right] B_{2m-1} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-1}}{(2m)!(2\lambda-\sinh 2\lambda)} \left[ 2b\lambda \cosh b\lambda \right. \\ & \left. - (\kappa + 2\lambda + \cosh 2\lambda - \sinh 2\lambda) \sinh b\lambda \right] B_{2m} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \psi_4(\lambda) = & \frac{2 \cosh b\lambda}{\lambda(2\lambda+\sinh 2\lambda)} A_0 \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\lambda^{2m-1} \cosh b\lambda}{(2m-1)!(2\lambda+\sinh 2\lambda)} A_{2m} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\lambda^{2m} \sinh b\lambda}{(2m)!(2\lambda+\sinh 2\lambda)} A_{2m+1} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-2}}{(2m-1)!(2\lambda+\sinh 2\lambda)} \left[ -2b\lambda \cosh b\lambda \right. \\ & \left. + (\kappa + 2\lambda - e^{-2\lambda}) \sinh b\lambda \right] B_{2m-1} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-1}}{(2m)!(2\lambda+\sinh 2\lambda)} \left[ (\kappa + 2\lambda - e^{-2\lambda}) \right. \\ & \left. \times \cosh b\lambda - 2b\lambda \sinh b\lambda \right] B_{2m} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。

式(19)~(22)が成立すれば、帯板側面の境界条件式(4)は、未知係数 $A_m, B_m$ の値に無関係に満足される。

次に、円孔面における境界条件式(ii)を満足させるために、直角座標と極座標のもとでの調和関数の変換式

$$\begin{aligned} \cosh \lambda(x+b) \cos \lambda y = & \cosh \lambda b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^{2n}}{(2n)!} \\ & \times \cos 2n\theta + \sinh \lambda b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(2n+1)\theta \end{aligned}$$

$$\sinh \lambda(x+b) \cos \lambda y = \cosh \lambda b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (23)$$

$$\times \cos(2n+1)\theta + \sinh \lambda b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^{2n}}{(2n)!} \cos 2n\theta$$

を用いて、変位関数 [III] を座標変換すると

$$[V] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \cos n\theta \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^{(n+1)} \cos(n+1)\theta \end{cases} \quad (24)$$

となる。ここで、 $\alpha_n, \beta_n$  は、 $n$  が偶数、奇数の場合に  
応じて

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n} \{ \psi_1(\lambda) \cosh \lambda b$$

$$+ \psi_2(\lambda) \sinh \lambda b \} d\lambda$$

$$\alpha_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+1} \{ \psi_1(\lambda) \sinh \lambda b$$

$$+ \psi_2(\lambda) \cosh \lambda b \} d\lambda$$

$$\beta_{2n-1} = \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+1} \{ \psi_3(\lambda) \cosh \lambda b$$

$$+ \psi_4(\lambda) \sinh \lambda b \} d\lambda \quad (25)$$

$$\beta_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2} \{ \psi_3(\lambda) \sinh \lambda b$$

$$+ \psi_4(\lambda) \cosh \lambda b \} d\lambda$$

となる。さらに、式(25)に式(19)~(22)を代入すると

$$\alpha_{2n} = I_n A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [{}^m I_n A_{2m} + {}^m III_n B_{2m-1}]$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} [{}^m II_n A_{2m+1} + {}^m IV_n B_{2m}] \quad (26)$$

$$\alpha_{2n+1} = I'_n A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [{}^m I'_n A_{2m} + {}^m III'_n B_{2m-1}]$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} [{}^m II'_n A_{2m+1} + {}^m IV'_n B_{2m}]$$

$$\beta_{2n-1} = V_n A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [{}^m V_n A_{2m} + {}^m VII_n B_{2m-1}]$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} [{}^m VI_n A_{2m+1} + {}^m VIII_n B_{2m}]$$

$$\beta_{2n} = V'_n A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [{}^m V'_n A_{2m} + {}^m VII'_n B_{2m-1}]$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} [{}^m VI'_n A_{2m+1} + {}^m VIII'_n B_{2m}] \quad (27)$$

ここで、 $I_n \sim {}^m I_n$  などは、たとえば、

$$I_n = \frac{1}{2^{2n+1}(2n)(2n-1)} \left[ -3I_{2n-2}^* \right.$$

$$+ 2(2n-1)(-\kappa I_{2n-1}^* + L_{2n-1} + \kappa K_{2n-1})$$

$$+ 2(2n)(2n-1)(I_{2n}^* + 2P_{2n} + 2bJ_{2n}) \left. \right]$$

$${}^m VIII'_n = \frac{(2m+2n)!}{2^{2m+2n+2}(2m)!(2n+1)!} \left[ \frac{3}{2} I_{2m+2n}^* \right.$$

$$+ (2m+2n+1)(-\kappa I_{2m+2n+1}^* - L_{2m+2n+1}$$

$$+ \kappa K_{2m+2n+1}) - (2m+2n+2)(2m+2n+1)$$

$$\times (I_{2m+2n+2}^* + P_{2m+2n+2} + bJ_{2m+2n+2}) \left. \right] \quad (28)$$

である。ここに、式(28)中の  $I_{2n-1}^* \sim P_{2n}$  などは以下に示す積分項である。

$$\left( \begin{matrix} I_k \\ I_k^* \end{matrix} \right) = \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \pm \frac{1}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right)$$

$$\times \lambda^k d\lambda$$

$$\left( \begin{matrix} J_k \\ J_k^* \end{matrix} \right) = \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \pm \frac{1}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right)$$

$$\times \lambda^k \sinh 2b\lambda d\lambda$$

$$\left( \begin{matrix} K_k \\ K_k^* \end{matrix} \right) = \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \pm \frac{1}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right)$$

$$\times \lambda^k \cosh 2b\lambda d\lambda$$

$$\left( \begin{matrix} L_k \\ L_k^* \end{matrix} \right) = \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \pm \frac{1}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right)$$

$$\times \lambda^k e^{-2\lambda} d\lambda$$

$$\left( \begin{matrix} M_k \\ M_k^* \end{matrix} \right) = \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \pm \frac{1}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right)$$

$$\times \lambda^k e^{-2\lambda} \sinh 2b\lambda d\lambda$$

$$\left( \begin{matrix} N_k \\ N_k^* \end{matrix} \right) = \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \pm \frac{1}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right)$$

$$\times \lambda^k e^{-2\lambda} \cosh 2b\lambda d\lambda$$

$$\left( \begin{matrix} O_k \\ P_k \end{matrix} \right) = \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} + \frac{1}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right)$$

$$\times \frac{\cosh 2\lambda}{\sinh 2\lambda} \left( \frac{\sinh 2b\lambda}{\cosh 2b\lambda} \right) \cdot \lambda^k d\lambda \quad (29)$$

さて、式(24)からわかるように、応力関数  $\varphi_0$  の  $n=0, n=1$  の項からは応力が生じないから、数値計算の際には  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  として処理する必要がある。

次に、応力関数 [II], [V] より応力成分を求めて、円孔面の境界条件を満足させると次のような無限連立一

次方程式を得る.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_r}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{A_0}{a^2} + \frac{\kappa+1}{2a^2}B_0 - \beta_0 \\ &+ \left(\frac{2A_1}{a^3} + \frac{\kappa+2}{a^3}B_1 - a\beta_1\right)\cos\theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n(n+1)}{a^{n+2}}A_n + \frac{(n-1)(n+2)}{2a^n}B_{n-2}\right. \\ &+ \left.\frac{(n+1)(n+\kappa+1)}{2a^{n+2}}B_n\right. \\ &+ \left.n(n-1)a^{n-2}\alpha_n + \frac{n-1}{2}(n-\kappa-1)a^{n-2}\beta_{n-2}\right. \\ &+ \left.\frac{(n-2)(n+1)}{2}a^n\beta_n\right]\cos n\theta \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{r\theta}}{p_0}\right)_{r=a} &= \left(\frac{2}{a^3}A_1 + \frac{\kappa+2}{a^3}B_1 - a\beta_1\right)\sin\theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n(n+1)}{a^{n+2}}A_n + \frac{n(n-1)}{2a^n}B_{n-2}\right. \\ &+ \left.\frac{(n+1)(n+\kappa+1)}{2a^{n+2}}B_n - n(n-1)a^{n-2}\alpha_n\right. \\ &- \left.\frac{(n-1)(n-\kappa-1)}{2}a^{n-2}\beta_{n-2}\right. \\ &- \left.\frac{n(n+1)}{2}a^n\beta_n\right]\sin n\theta = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned} \tag{31}$$

$\alpha_n, \beta_n$  は、式 (26), (27) によって  $A_m, B_m$  で表わされているので、これを式 (30), (31) に代入すれば  $A_n, B_n$  に関する無限連立一次方程式が得られる。そして、この連立一次方程式を解いて係数  $A_n, B_n$  を決定すれば、解を得ることができる。すべての変位および応力は、変位関数 [I]~[IV] より導かれる各成分の一次結合によって得られる。

### 3. 数 値 計 算

ポアソン比を  $\nu = 0.3$  とし、円孔半径  $a = 0.1 \sim 0.8$  の場合について数値計算を行なった。また、本研究では平面応力問題として考え、 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  とした。

すべての無限級数の収束は良好であるが、介在物半径  $a$  および偏心量  $b$  が大きくなるにつれて次第に収束が悪くなる。そこで、円孔面での境界条件の精度が 0.1% 以下になるように、 $A_n, B_n$  をそれぞれ 20 項用いて連立一次方程式を解いた。この結果、 $0 \leq a \leq 0.8$  の範囲で、円孔面での境界条件が上述の精度で満足されることを確認した。応力計算は、円孔面の  $\sigma_\theta$ ,  $x$  軸上の  $\sigma_y$ , 円孔面の最大応力  $\sigma_{max}$  などについて行った。

まず、本解析法の妥当性を確かめるために、本解析結果と有限要素法 (FEM) による計算結果および石田

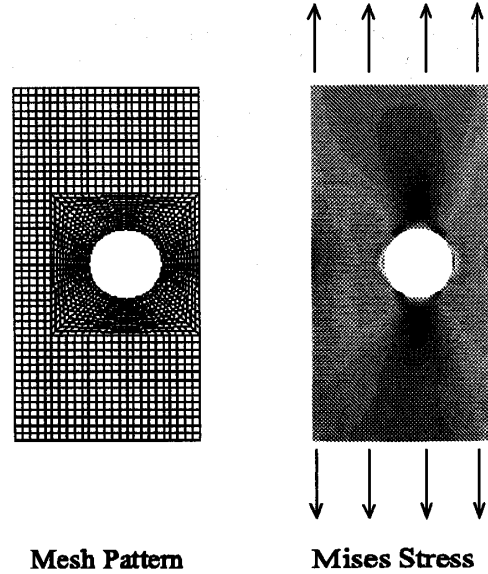


Fig. 2 FEM mesh pattern and contour map of Mises stress for the strip with the eccentric hole ( $a = 0.4, b = 0.2$ )

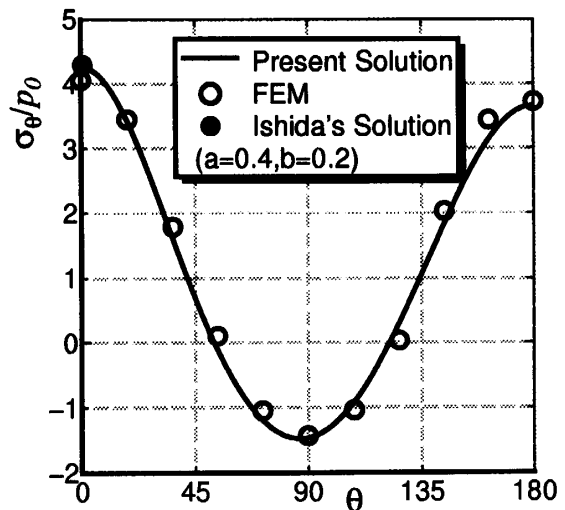


Fig. 3 Comparison of  $\sigma_\theta$  around the hole with FEM and Ishida's solution ( $a=0.4, b=0.2$ )

の解<sup>(3)</sup>との比較を行った。FEM では 4 節点アイソパラメトリック要素を用い、平面応力のもとで解析した。また、解析例として  $a = 0.4, b = 0.2$  の場合を考えた。

解析対象については、帯板板幅 50mm, 板厚 1mm, 円孔の大きさ  $a=20$ mm, 偏心量  $b=10$ mm とし、縦弾性係数  $E = 206$ GPa, ポアソン比  $\nu = 0.3$  として解析した。図 2 にメッシュ分割の様子 (総要素数 1840, 総節点数 1953) と FEM によって得られたミーゼス応力のコンター図を示す。

図 3 は、円孔面に沿った円周方向応力  $\sigma_\theta$  と角度  $\theta$

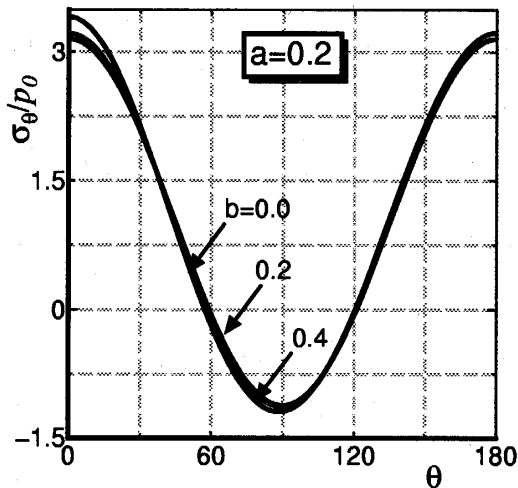


Fig. 4 Relationship between hoop stress  $\sigma_\theta$  and angle  $\theta$  ( $a = 0.2$ ).

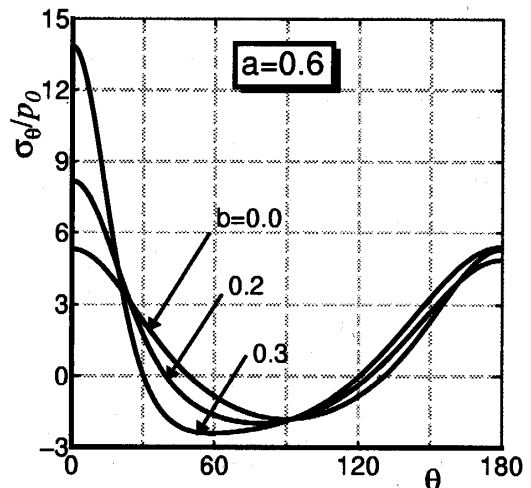


Fig. 6 Relationship between hoop stress  $\sigma_\theta$  and angle  $\theta$  ( $a = 0.6$ ).

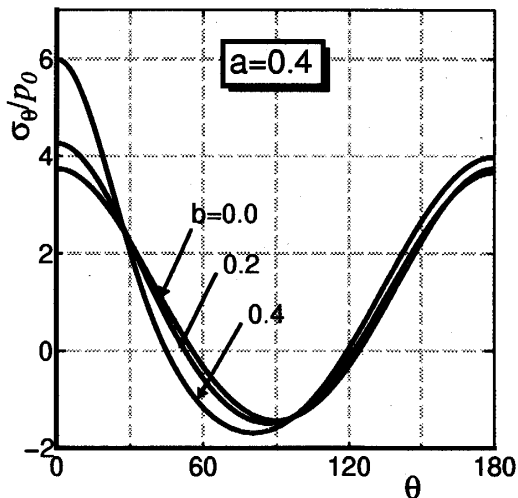


Fig. 5 Relationship between hoop stress  $\sigma_\theta$  and angle  $\theta$  ( $a = 0.4$ ).

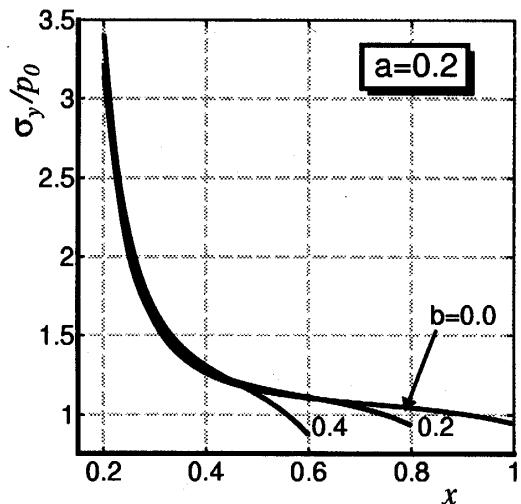


Fig. 7 Relationship between  $\sigma_y$  on  $x$ -axis and position  $x$  ( $a = 0.2$ ).

との関係を求め、本手法、FEM および石田の解とを比較した図である。これらの結果はほとんど一致しており、本手法に基づく結果が正しいことを示している。

図 4, 5, 6 は、円孔半径を  $a = 0.2, 0.4, 0.6$  とした場合の円孔周りの応力  $\sigma_\theta$  と  $x$  軸からの角度  $\theta$  との関係を、偏心量  $b$  をパラメータとして示した図である。 $b$  の増加とともに応力分布の対称性が失われ、 $\theta = 0$  の位置の応力が急激に増加することがわかる。

図 7, 8 は、 $a = 0.2, 0.4$  と一定にし、 $b$  をパラメータとして、 $x$  軸上の応力  $\sigma_y$  と円孔中心からの距離  $x$  との関係を図示したものである。 $\sigma_y$  は円孔面で最大値をとり、側面に近づくにつれて急激に減少する。また、 $b$  が大きいほど減少の程度が急激である。

図 9 は、 $\theta = 0^\circ$  および  $\theta = 180^\circ$  (図 1 の A 点および A' 点) での  $y$  方向の最大引張り応力  $\sigma_{\max} = (\sigma_y)_{r=a, \theta=0 \text{ or } 180}$  と円孔半径  $a$  との関係を  $b$  をパラメータとして示したものである。 $a$  が零に近づく場合には、 $\sigma_{\max}/p_0$  は  $b$  とは無関係に 3 をとり、 $a$  および  $b$  の値が大きくなるにつれて応力集中係数の値が急激に大きくなっていくのがわかる。また、その増加の程度は点 A が特に著しい。

#### 4. 結 論

偏心円孔を有する帯板が一軸引張りを受ける問題を二次元の調和変位関数に基づいて厳密に解析する手法を示すとともに、数値計算によって、円孔半径や偏心

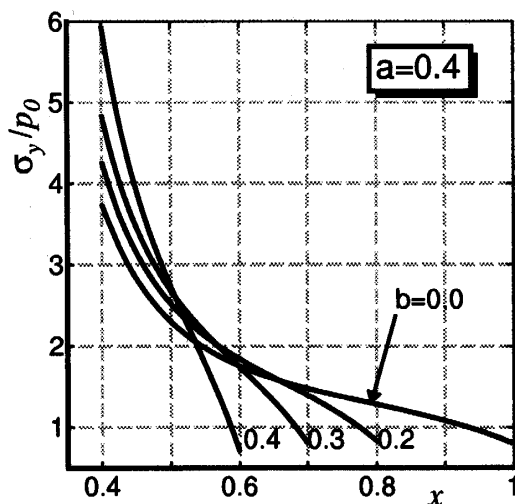


Fig. 8 Relationship between  $\sigma_y$  on  $x$ -axis and position  $x$  ( $a = 0.4$ )

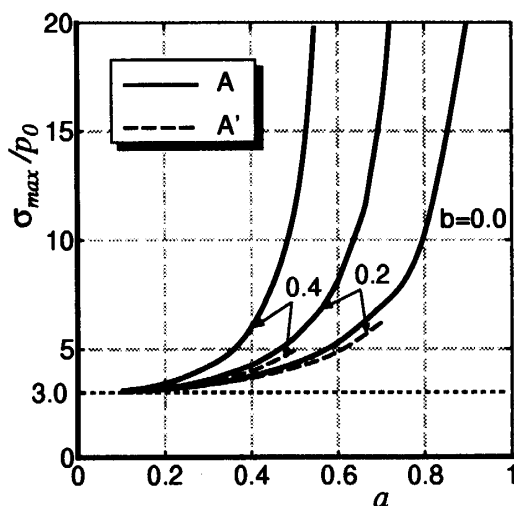


Fig. 9 Relationship maximum stress  $\sigma_{max}$  between hole radius  $a$

量が応力分布に及ぼす影響などを明らかにした。得られた結果を要約すると以下ようになる。

(1) 調和変位関数に基づく本手法の解析結果は、Airyの応力関数に基づく従来の結果と同一となり、本手法の有効性を確認した。

(2) 円孔周りの応力に及ぼす、円孔半径および偏心量の影響を詳しく示し、強度計算のための基礎資料を提示した。

最後に、著者らの一連の研究に対して常に励ましを与えて下さっている上野 誠 茨城高専名誉教授に対し、記して謝意を表します。

## 文 献

- (1) Howland R. C. J., On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, **229**(1930), pp.49-86.
- (2) Ling C. B., Stresses in a perforated strip, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech, Vol.57 (1957), pp.365-375.
- (3) Ishida M., On the tension of an infinite strip with an eccentric circular hole, Trans. of the JSME, Vol.19-87(1953), pp.100-106.
- (4) Nishida M., *Stress concentration* (POD Version), Morikita Shuppan Co.(2001), pp.272-275.
- (5) Nakahara I., H. Shibuya, E. Tsuchida, T. Tsuji and Y. Inoue, *Hand Book of Elasticity* (2001), Asakura Publishing Co.
- (6) Tsuchida E. and Nakahara I., Stress concentration around a spherical cavity in a semi-infinite elastic body under uni-axial tension, Trans. of the JSME, Vol. 40-330(1974), pp.285-297(in Japanese).
- (7) Tsuchida E., Kawashima K. and Nakahara I., Stresses in an elastic circular cylinder with a spherical cavity under transverse bending, Bull. of the JSME, Vol.19-127(1976), pp.1-7.
- (8) Kawakami T., Nakahara I., Tsuchida E. and Matsumoto H., Stresses in a circular cylinder having an eccentric spherical cavity under tension, Bull. of the JSME, Vol. 22-174(1979), pp.630-636.
- (9) Tsuchida E. and Uchiyama T., Stresses in an elastic circular cylinder with a prolate spheroidal cavity under tension, Bull. of the JSME, Vol. 22-166(1979), pp.476-482.
- (10) Nakahara I., H. Shibuya, E. Tsuchida, T. Tsuji and Y. Inoue, *Hand Book of Elasticity* (2001), p.284, Asakura Publishing Co.
- (11) Mikyoung. L., Jasiuk I. and Tsuchida E., The sliding circular inclusion in an elastic half-plane Trans. of the ASME., J. of Appl. Mech., Vol. 59-2(1992), s.57-s.64.
- (12) Tsuchida E. and Terada T., Stresses in an elastic strip having an elliptic hole or a Griffith crack under tension, Theor. and Appl. Mech., Vol. 40(1991), pp.147-160.
- (13) Horibe T., Tsuchida E., Arai Y. and Kusano N., Stresses in an elastic strip having a circular inclusion under tension, Trans. of the JSME., Vol.72-719(2006), pp.24-31 (in Japanese).