

偏平回転だ円体状空かあるいは円形き裂面に
軸対称圧力を受ける厚板*

土田 栄一郎**, 八重樫 昭徳***
Eiichiro TSUCHIDA, Akinori YAEGASHI
中原 一郎†, 小玉 正雄††
Ichiro NAKAHARA, Masao KODAMA

Key Words: Elasticity, Strength of Materials, Penny-shaped Crack, Stress Intensity Factor, Spheroidal Cavity, Internal Pressure

1. 緒 言

機械や構造物の基本的な構成要素である板材に存在する欠陥による応力集中を明らかにするために、著者らはさきに偏平回転だ円体状空かを有する厚板が二軸一様引張荷重を受ける問題⁽¹⁾を解析し、空かの大きさならびに形状比が応力集中に及ぼす影響を明らかにした。本研究は同じ目的で偏平回転だ円体状空かあるいは円形き裂面に軸対称圧力を受ける厚板の問題を厳密に解析したものである。本問題に関連して欠陥が球かの場合には斉藤⁽²⁾により、球か面に等分布圧力を受ける厚板の問題が解析されている。また、円形き裂を有する厚板については1959年 Uflyand⁽³⁾が円形き裂面に圧力を受ける問題を連立双積分方程式に帰着して解析して以来、幾人かの研究者^{(4)~(8)}により種々の荷重条件に対し解析されてきた。本論文ではまず偏平回転だ円体状空かの場合について Boussinesq の調和応力関数を用いた解析法を示し、さらに特別の場合として円形き裂の問題を扱い、これが第1種境界値問題として扱えることを示し、応力拡大係数を求め、連立積分方程式に帰着した方法で得られた結果と比較検討した。

2. 解 析 法

2.1 偏平回転だ円体状空か面に軸対称圧力を受ける厚板 図1に示されるように、板厚の半分を単位長さとしてすべての長さの基準にとり、偏平回転だ円体状空かの長軸、短軸の長さおよび焦点間距離をそれぞれ $2a$, $2b$, $2c$ とする。O を座標原点として、円柱座標 (r, θ, z) , および偏平回転だ円体座標 (α, β, γ) を採用すれば、両座標間には

$$r = c\xi\bar{\eta}, \quad \theta = \gamma, \quad z = c\xi\eta \dots\dots\dots (1)$$

の関係がある。ここで、 $\xi = \sinh \alpha$, $\bar{\xi} = \cosh \alpha$, $\eta = \cos \beta$, $\bar{\eta} = \sin \beta$ である。

いま、円柱座標のもとで Boussinesq の応力関数 φ_0, φ_3 を用いて変位を次のように表せば、これは物体力のないねじりなし軸対称の場合の三次元弾性基礎方程式の解になる。

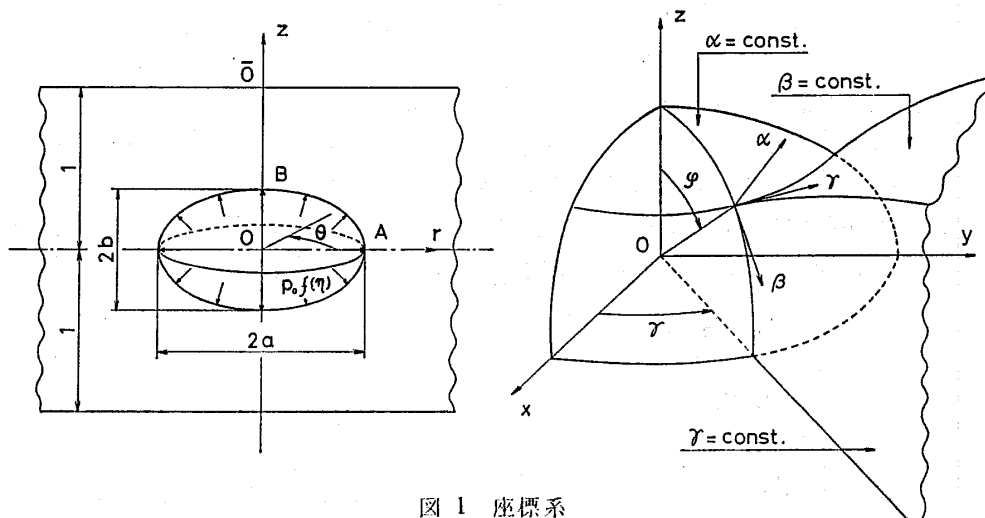


図1 座標系

* 昭和54年10月13日 第57期全国大会講演会において講演，原稿受付 昭和56年10月12日。
** 正員，埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255)。 *** 正員，東京芝浦電気(株) (〒198 青梅市末広町 2-9-1)。
† 正員，東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。 †† 正員，(〒330 大宮市今羽町 477-9-101)。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, & 2Gw_z &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3 \\ \nabla^2 \varphi_0 &= \nabla^2 \varphi_3 = 0, & \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 u_r, w_z はそれぞれ r, z 方向の変位成分、 ν はポアソン比、 G は横弾性係数である。

そして、座標間の関係式 (1) を用いて式 (2) を偏平回転た円体座標に変換すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_\alpha &= h\bar{\xi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + ch\bar{\xi}\eta \left\{ \xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \\ 2Gv_\beta &= -h\bar{\eta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} - ch\xi\bar{\eta} \left\{ \eta \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 u_α, v_β はそれぞれ α, β 方向の変位成分、

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0, \quad \nabla^2 \equiv h^2 \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2h^2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + h^2 \bar{\eta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2h^2 \eta \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad h^2 = \frac{1}{c^2(\xi^2 + \eta^2)}$$

である。

さらに、変位とひずみ、ひずみと応力の関係を用いて、式 (3) より応力成分を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= h^2 \left\{ \bar{\xi}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} - c^2 h^2 \bar{\eta}^2 \left(\xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) \right\} + ch^2 \left[\xi \bar{\xi}^2 \eta \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \xi^2} \right. \\ &\quad \left. - (c^2 h^2 \bar{\xi}^2 \bar{\eta}^2 + 2(1-\nu)\bar{\xi}^2) \eta \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} + (c^2 h^2 \eta^2 - 2\nu) \xi \bar{\eta}^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \right] \\ \sigma_\beta &= h^2 \left\{ \bar{\eta}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + c^2 h^2 \bar{\xi}^2 \left(\xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) \right\} + ch^2 \left[\xi \eta \bar{\eta}^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2} \right. \\ &\quad \left. - (c^2 h^2 \bar{\xi}^2 \bar{\eta}^2 + 2(1-\nu)\bar{\eta}^2) \xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} + (c^2 h^2 \xi^2 - 2\nu) \bar{\xi}^2 \eta \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \right] \\ \sigma_r &= h^2 \left(\xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) + ch^2 \left\{ (\xi^2 - 2\nu \bar{\xi}^2) \eta \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} - (\eta^2 + 2\nu \bar{\eta}^2) \xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \right\} \\ \tau_{\alpha\beta} &= h^2 \bar{\xi} \bar{\eta} \left\{ -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 h^2 \left(\xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right) \right\} - ch^2 \bar{\xi} \bar{\eta} \left[\xi \eta \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \xi \partial \eta} \right. \\ &\quad \left. - (c^2 h^2 \eta^2 + (1-2\nu)) \xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} - (c^2 h^2 \xi^2 + (1-2\nu)) \eta \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

さて、厚板中に存在する偏平回転た円体状空か面に、軸対称圧力 $p_0 f(\eta)$ が作用する場合の境界条件は以下のようになる。ただし p_0 は正の定数である。

境界条件：(i) 厚板上下面 $z = \pm 1$ において

$$(\sigma_z)_{z=\pm 1} = (\tau_{rz})_{z=\pm 1} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

(ii) 空か面 $\alpha = \alpha_0$ において

$$(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0} = -p_0 f(\eta), \quad (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(iii) 無限遠方においてすべての応力が零

境界条件 (i)~(iii) を満足する解を導くために、本問題の弾性体領域が偏平回転た円体状空かを除く無限体領域と厚板領域の共通領域であることに注目して、前者に対してはた円体の焦点に特異点をもつ偏平回転た円体調和関数を、後者に対しては円柱調和関数を用いて応力関数 φ_0, φ_3 に次のような二組の調和関数を与える。

$$[I] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m q_{2m}(\xi) P_{2m}(\eta) \\ \varphi_3 &= p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (7)$$

$$[II] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p_0 \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) J_0(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda \\ \varphi_3 &= p_0 \int_0^{\infty} \lambda \phi_2(\lambda) J_0(\lambda r) \sinh \lambda z d\lambda \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 A_m, B_m および $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり、 $q_n(\xi)$ は複素変数に関する第2種ルジャンドル関数で $q_n(\xi) = i^{n+1} Q_n(i\xi)$ なる関係があり、 n 次の第2種変形ル

ジャンドル関数と呼ぶことにする⁽⁹⁾。ここで $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。 $P_n(\eta)$, $Q_n(i\xi)$ はそれぞれ n 次の第1種ならびに第2種ルジャンドル関数, また $J_n(\lambda r)$ は n 次の第1種ベッセル関数である。なお上記の二組の応力関数は境界条件 (iii) を満足するように選んである。

特に, 板厚に比べて空かが十分小さい場合には応力関数 [I] のみで解析でき, $f(\eta) = 1$ なる等分布圧力の場合には式 (7) において

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{2}{3} \frac{c^2 \xi_0}{D} \left[(1-2\nu) \left(2q_1 - \frac{1}{\xi_0^2} \right) - \frac{3}{2} \xi_0^2 \left(3q_1 - \frac{1}{\xi_0^2} \right) \right] \\ A_1 &= -\frac{2}{3} \frac{c^2 \xi_0}{D} (1-2\nu) \left(2q_1 - \frac{1}{\xi_0^2} \right), \quad A_m = 0 \quad (m \geq 2) \\ B_0 &= \frac{c \xi_0}{D} \left(3q_1 - \frac{1}{\xi_0^2} \right), \quad B_m = 0 \quad (m \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

とおくことにより境界条件式 (6) は満足される。ここで

$$D = 2 \left\{ (1-\nu) q_1^2 + \frac{2(1-\nu) - 3\xi_0^2}{\xi_0^2} q_1 + \frac{\xi_0^2 + \nu}{\xi_0^4} \right\}, \quad q_1 \equiv q_1(\xi_0) = 1 - \xi_0 \operatorname{arccot} \xi_0$$

である。これより得られる結果は無有限体中に存在する偏平回転た円体状空か面に等分布圧力 p_0 が作用する場合の解を表す。

まず, 厚板上下面における境界条件式 (5) を満足させるために, 関係式⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾

$$\left. \begin{aligned} q_n(\xi) P_n(\eta) &= c \int_0^\infty j_n(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (z > 0) \\ q_n(\xi) P_n(\eta) &= (-1)^n c \int_0^\infty j_n(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (z < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

を用いる。ここで, $j_n(\lambda c)$ は n 次の第1種球ベッセル関数である。

この関係式より応力関数 [I] を書き改めると

$$[\text{III}] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p_0 \sum_{m=0}^\infty c A_m \int_0^\infty j_{2m}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \\ \varphi_3 &= p_0 \sum_{m=0}^\infty c B_m \int_0^\infty j_{2m+1}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となる。応力関数 [II], [III] から応力成分を求め, 厚板上面の境界条件を満足させ, また $z < 0$ についても関係式 (10) の下式を用いて座標変換し, 同様にして厚板下面の境界条件を満足させると結局次のようになる。

$$\left(\frac{\sigma_z}{p_0} \right)_{z=\pm 1} = \int_0^\infty \lambda^2 J_0(\lambda r) \left[\phi_1(\lambda) \cosh \lambda + \phi_2(\lambda) \{ \lambda \sinh \lambda - 2(1-\nu) \cosh \lambda \} \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^\infty c \left\{ A_m j_{2m}(\lambda c) + \frac{1}{\lambda} (\lambda + 2 - 2\nu) B_m j_{2m+1}(\lambda c) \right\} e^{-\lambda} \right] d\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\pm \left(\frac{\tau_{rz}}{p_0} \right)_{z=\pm 1} = \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda r) \left[-\phi_1(\lambda) \sinh \lambda + \phi_2(\lambda) \{ (1-2\nu) \cosh \lambda - \lambda \cosh \lambda \} \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^\infty c \left\{ A_m j_{2m}(\lambda c) + \frac{1}{\lambda} (\lambda + 1 - 2\nu) B_m j_{2m+1}(\lambda c) \right\} e^{-\lambda} \right] d\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

式 (12), (13) にそれぞれハンケルの逆変換を施し, 未知関数 $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ を求めると次のようになる。

$$\phi_1(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty c \{ A_m j_{2m}(\lambda c) f_1(\lambda) + B_m j_{2m+1}(\lambda c) f_2(\lambda) \}$$

$$\phi_2(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty c \{ A_m j_{2m}(\lambda c) f_3(\lambda) + B_m j_{2m+1}(\lambda c) f_4(\lambda) \}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{3-4\nu-2\lambda+e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda+2\lambda}, \quad f_2(\lambda) = \frac{2\{2(1-\nu)(1-2\nu)-\lambda^2\}}{\lambda(\sinh 2\lambda+2\lambda)} \\ f_3(\lambda) &= \frac{2}{\sinh 2\lambda+2\lambda}, \quad f_4(\lambda) = \frac{3-4\nu+2\lambda-e^{-2\lambda}}{\lambda(\sinh 2\lambda+2\lambda)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

次に, 空か面における境界条件を満足させるために円柱調和関数と偏平回転た円体調和関数との関係式⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾,

$$\left. \begin{aligned} J_0(\lambda r) \cosh \lambda z &= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) j_{2n}(\lambda c) p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \\ J_0(\lambda r) \sinh \lambda z &= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3) j_{2n+1}(\lambda c) p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

を用いて応力関数 [II] を書き改めると

$$[IV] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \\ \varphi_3 &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここで、 $p_n(\xi)$ は複素変数に関する第1種ルジャンドル関数で $p_n(\xi) = (-i)^n P_n(i\xi)$ なる関係があり、 n 次の第1種変形ルジャンドル関数と呼ぶことにする⁽⁹⁾。また上式中の α_n, β_n は以下に示すとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= (4n+1)c \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \int_0^{\infty} f_1(\lambda) j_{2n}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda + B_m \int_0^{\infty} f_2(\lambda) j_{2n}(\lambda c) j_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ \beta_n &= (4n+3)c \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \int_0^{\infty} \lambda f_3(\lambda) j_{2n+1}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda + B_m \int_0^{\infty} \lambda f_4(\lambda) j_{2n+1}(\lambda c) j_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

そこで、応力関数 [I], [IV] より応力成分を求め、さらに境界条件式 (6) をルジャンドル関数で展開した後満足させると次のようになる。

$$\left(\frac{\sigma_{\alpha}}{p_0 c^2 h^4} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (s_{A1} A_{n-1} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+1} + s_{B1} B_{n-2} + s_{B2} B_{n-1} + s_{B3} B_n + s_{B4} B_{n+1} + s_{\alpha 1} \alpha_{n-1} + s_{\alpha 2} \alpha_n + s_{\alpha 3} \alpha_{n+1} + s_{\beta 1} \beta_{n-2} + s_{\beta 2} \beta_{n-1} + s_{\beta 3} \beta_n + s_{\beta 4} \beta_{n+1}) P_{2n}(\eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n P_{2n}(\eta) \dots\dots\dots (18)$$

$$\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0 c^2 h^4 \xi \bar{\eta}} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (t_{A1} A_{n-1} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+1} + t_{B1} B_{n-2} + t_{B2} B_{n-1} + t_{B3} B_n + t_{B4} B_{n+1} + t_{\alpha 1} \alpha_{n-1} + t_{\alpha 2} \alpha_n + t_{\alpha 3} \alpha_{n+1} + t_{\beta 1} \beta_{n-2} + t_{\beta 2} \beta_{n-1} + t_{\beta 3} \beta_n + t_{\beta 4} \beta_{n+1}) P_{2n}'(\eta) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} s_{A1} &= - \frac{2n(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)} \{ (2n-2) q_{2n-2}(\xi_0) - \xi_0 q_{2n-2}'(\xi_0) - \bar{\xi}_0^2 q_{2n-2}''(\xi_0) \} \\ s_{A2} &= \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} [(2n+1) 2n q_{2n}(\xi_0) - 2(4n^2+2n-1) \xi_0 q_{2n}'(\xi_0) \\ &\quad + \{ (4n+3)(4n-1) \bar{\xi}_0^2 - 2(4n^2+2n-1) \} \bar{\xi}_0^2 q_{2n}''(\xi_0)] \\ s_{A3} &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(4n+5)(4n+3)} \{ (2n+3) q_{2n+2}(\xi_0) + \xi_0 q_{2n+2}'(\xi_0) + \bar{\xi}_0^2 q_{2n+2}''(\xi_0) \} \\ s_{B1} &= - \frac{2n(2n-1)(2n-2)c}{(4n-1)(4n-3)(4n-5)} \{ (1-\nu)(2n-3) \xi_0 q_{2n-3}(\xi_0) \\ &\quad + (1 + \bar{\xi}_0^2 - 2\nu \bar{\xi}_0^2) q_{2n-3}'(\xi_0) - \xi_0 \bar{\xi}_0^2 q_{2n-3}''(\xi_0) \} \\ s_{B2} &= - \frac{2nc}{(4n+3)(4n-1)(4n-3)} [(2n-1) [4n^2 - 2n - 3 + 2\nu \{ 12n^2 + 2n \\ &\quad - 6 - (16n^2 - 9) \bar{\xi}_0^2 \}] \xi_0 q_{2n-1}(\xi_0) + \{ 2(1-\nu)(16n^2 - 9) \bar{\xi}_0^4 - (4n^2 - 3) \\ &\quad \times (1 + \bar{\xi}_0^2 - 2\nu \bar{\xi}_0^2) \} q_{2n-1}'(\xi_0) + \{ 4n^2 - 3 - (16n^2 - 9) \bar{\xi}_0^2 \} \xi_0 \bar{\xi}_0^2 q_{2n-1}''(\xi_0)] \\ s_{B3} &= \frac{(2n+1)c}{(4n+5)(4n+3)(4n+1)} [(2n+2) [4n^2 + 6n - 1 + 2\nu \{ 12n^2 + 10n \\ &\quad - 4 - (4n+5)(4n-1) \bar{\xi}_0^2 \}] \xi_0 q_{2n+1}(\xi_0) - \{ 2(1-\nu)(4n+5)(4n-1) \bar{\xi}_0^4 \\ &\quad - (4n^2 + 4n - 2)(1 + \bar{\xi}_0^2 - 2\nu \bar{\xi}_0^2) \} q_{2n+1}'(\xi_0)] \\ s_{B4} &= \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)c}{(4n+7)(4n+5)(4n+3)} \{ (1-2\nu)(2n+4) \xi_0 q_{2n+3}(\xi_0) \\ &\quad - (1 + \bar{\xi}_0^2 - 2\nu \bar{\xi}_0^2) q_{2n+3}'(\xi_0) + \xi_0 \bar{\xi}_0^2 q_{2n+3}''(\xi_0) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned}
 t_{A1} &= -\frac{(2n-1)(2n-3)}{(4n-1)(4n-3)} q_{2n-2}'(\xi_0) \\
 t_{A2} &= \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} [(4n+3)(4n-1)\xi_0 q_{2n}(\xi_0) - \{4(2n-1)(n+1) \\
 &\quad + (4n+3)(4n-1)\xi_0^2\} q_{2n}'(\xi_0)] \\
 t_{A3} &= -\frac{(2n+4)(2n+2)}{(4n+5)(4n+3)} q_{2n+2}'(\xi_0) \\
 t_{B1} &= \frac{(2n-1)(2n-2)c}{(4n-1)(4n-3)(4n-5)} \{(1-2\nu)(2n-3)q_{2n-3}(\xi_0) \\
 &\quad + (5-2n-2\nu)\xi_0 q_{2n-3}'(\xi_0)\} \\
 t_{B2} &= \frac{c}{(4n+3)(4n-1)(4n-3)} [(2n-1)\{(1-2\nu)(12n^2-9) \\
 &\quad + 2(1-\nu)(16n^2-9)\xi_0^2\} q_{2n-1}(\xi_0) + [2(1-n-\nu)(16n^2-9)\xi_0^2 \\
 &\quad + \{8n^3-12(1-2\nu)n^2+4(1-\nu)n+3(1-4\nu)\}] \xi_0 q_{2n-1}'(\xi_0)] \\
 t_{B3} &= \frac{c}{(4n+5)(4n+3)(4n-1)} [(2n+2)\{6(1-2\nu)(2n^2+2n-1) \\
 &\quad + 2(1-\nu)(4n+5)(4n-1)\xi_0^2\} q_{2n+1}(\xi_0) - \{(3+2n-2\nu) \\
 &\quad \times (4n+5)(4n-1)\xi_0^2 - \{8n^3+24(1-\nu)n^2+2(11-14\nu)n \\
 &\quad + (3+4\nu)\}\} \xi_0 q_{2n+1}'(\xi_0)] \\
 t_{B4} &= \frac{(2n+3)(2n+2)c}{(4n+7)(4n+5)(4n+3)} \{(1-2\nu)(2n+4)q_{2n+3}(\xi_0) \\
 &\quad - 2(3+n-\nu)\xi_0 q_{2n+3}'(\xi_0)\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

であり、' はそれぞれの変数による微分を示し、 ε_n は作用する軸対称圧力の状態により決定される定数である。すなわち

$$\frac{f(\eta)}{c^2 h_0^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P_n(\eta)$$

の展開係数である。また $s_{\alpha l}, s_{\beta k}, l_{\alpha l}, t_{\beta k}$ ($l=1\sim 3, k=1\sim 4$) はそれぞれ $s_{A l}, s_{B k}, t_{A l}, t_{B k}$ に含まれる第2種変形ルジャンドル関数 $q_n(\xi_0)$ を第1種変形ルジャンドル関数 $p_n(\xi_0)$ に置き換えたものである。

式(18), (19)においてそれぞれ $P_{2n}(\eta), P_{2n}'(\eta)$ の各係数を等置すれば、 A_n, B_n に関する無限連立一次方程式が得られる。これらを A_n, B_n について解けば本問題に対する解は完全に決まる。そして全体の変位および応力各成分は、応力関数 [I], [II] から得られる成分を重ね合わせて得られる。

2.2 円形き裂面に軸対称圧力を受ける厚板 偏平回転だ円体状空かの一つの極限の場合として、 $\alpha_0=0$ すなわち $\xi_0=0, \bar{\xi}_0=1$ と置くと $a=c, b=0$ となり空か は原点 O を中心とする半径 c の厚板表面に平行な円形き裂となる。

この場合も2.1節で示した式は有効であり、偏平回転だ円体状空かの場合と同様にして係数が決定でき、厚板内に軸対称圧力を受ける円形き裂が存在する場合の解が得られる。

この場合、変形様式はモード I であるから、応力拡大

係数は次式で定義される。

$$K_I = \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2\pi(r-c)} (\sigma_z)_{z=0} \dots\dots\dots(22)$$

偏平回転だ円体座標では $z=0$ ($r>c$) 面は $\eta=0$ で表され、この面において $r=c\bar{\xi}, r^2-c^2=c^2(\bar{\xi}^2-1)$ すなわち $r-c=c\bar{\xi}^2/(\bar{\xi}+1)$ であるから $r \rightarrow c$ は $\bar{\xi} \rightarrow 0$ に対応し、また $(\sigma_z)_{z=0}=(\sigma_\beta)_{\eta=0}$ であることから式(22)は次のようになる。

$$K_I = \sqrt{\pi c} \lim_{\bar{\xi} \rightarrow 0} \bar{\xi} (\sigma_\beta)_{\eta=0} \dots\dots\dots(23)$$

また、 σ_α にも σ_β と同じ特異性があることを考慮すれば次式からも応力拡大係数が計算できる。

$$K_I = \sqrt{\pi c} \lim_{\bar{\xi} \rightarrow 0} \bar{\xi} \left(\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \right)_{\eta=0} \dots\dots\dots(24)$$

特に、板厚に比べて円形き裂が十分小さい場合には、式(9)において $\xi_0=0, \bar{\xi}_0=1$ とおけば

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= A_1 = \frac{2(1-2\nu)}{3\pi} c^2 \\
 A_m &= 0 \quad (m \geq 2) \\
 B_0 &= -\frac{2}{\pi} c \\
 B_m &= 0 \quad (m \geq 1)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

となり、この係数を用いて応力関数 [I] より円形き裂面に等分布圧力が作用する無限体の解が得られる。

応力 $(\sigma_\beta)_{\eta=0}$ は

$$\left(\frac{\sigma_\beta}{p_0} \right)_{\eta=0} = \frac{2}{\pi \bar{\xi}} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \bar{\xi} \dots\dots\dots(26)$$

となり、これを式 (23) に代入すれば、円形き裂が無
限体中にある場合の応力拡大係数 $K_{I\infty}$ が求まり、以
下のようになる。

$$K_{I\infty} = 2p_0 \sqrt{\frac{c}{\pi}} \dots\dots\dots (27)$$

3. 数 値 計 算

ポアソン比を $\nu=0.3$ とし、圧力が一様な場合すな
わち $f(\eta)=1$ の場合について数値計算を行った。こ
の場合、式 (18) 中の ϵ_n は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0 &= c^2 \left(\xi_0^4 + \frac{2}{3} \xi_0^2 + \frac{1}{5} \right) \\ \epsilon_1 &= c^2 \left(\frac{4}{3} \xi_0^2 + \frac{4}{7} \right) \\ \epsilon_2 &= \frac{8}{35} c^2 \\ \epsilon_n &= 0 \quad (n \geq 3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

まず、形状比 $\bar{s}=b/a=0.5$ として $b=0.2, 0.4,$
 $0.6, 0.8$ の各場合について計算し、さらに形状比を
いくつか変化した場合について数値計算を行った。
計算にあたっては式 (17) に含まれる積分値が必要と
なるが、これはシンプソン則によって数値積分を行っ
て求めた。すべての無限級数の収束は良好であるが空
かが大きくなるとともに次第に悪くなるので、最終的
に得られる応力値の有効数字が3けた以上になるよう
に、 A_n, B_n を8~16項で打ち切って連立方程式を解
いた。以下に数値計算により得られた結果を示す。な
お応力の対称性を考慮して、板の上半分について考え
る。

図2は $\bar{s}=0.5$ の場合の空か面における σ_β の分布
を示したものである。ここで、横軸には z 軸から測っ
た角度 φ (球座標の一変数) をとっている。空か面に

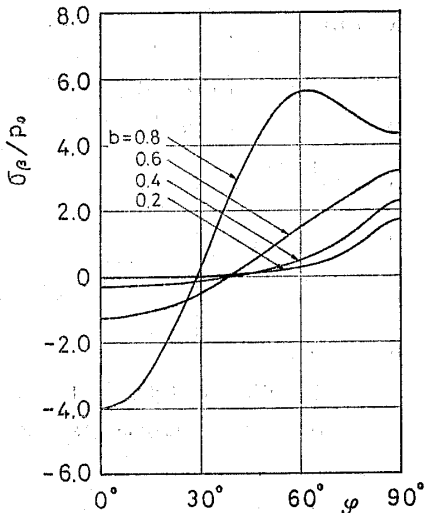


図2 空か面上の σ_β の分布 ($\bar{s}=0.5$)

において φ は β と $\tan \varphi = (a/b) \tan \beta$ なる関係があ
る。 σ_β は $\varphi=0^\circ$ (図1の点 B) で圧縮応力の最大値
をとり、 $b=0.2$ のように空かが比較的小さい場合に
は $\varphi=0 \sim 30^\circ$ 付近まで応力値はほぼ零であり、他の
場合では $\varphi=30^\circ$ 近傍で零となる。さらに φ が大き
くなると引張応力に転じ、 φ の増加とともに増大して
ゆく。引張応力の極大値は、 $b=0.2, 0.4, 0.6$ の場
合には $\varphi=90^\circ$ (図1の点 A) で生ずるが、 $b=0.8$ の
ように空かがかなり大きくなると、極大値の生ずる点
は A 点から遠ざかり、 $b=0.8$ ではほぼ $\varphi=60^\circ$ で極
大値をとる。図3は $\bar{s}=0.5$ の場合の空か面における
 σ_r の分布を示したものである。 σ_r は σ_β と同様 $\varphi=0^\circ$
の点 B で圧縮応力の最大値をとっているが、引張応
力の極大値は σ_β と異なりいずれの b の値に対して

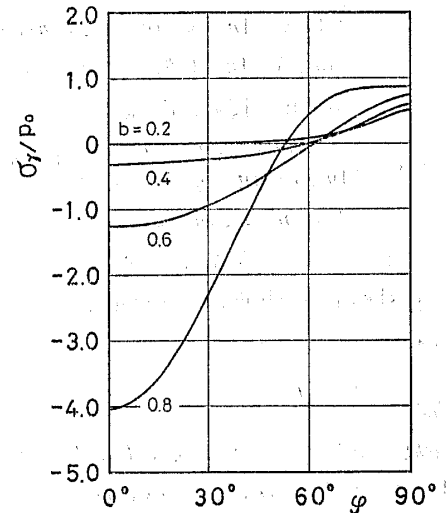


図3 空か面上の σ_r の分布 ($\bar{s}=0.5$)

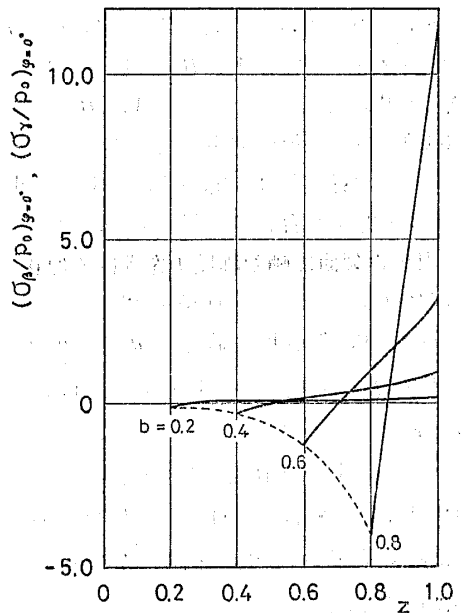


図4 z 軸上の σ_β, σ_r の分布 ($\bar{s}=0.5$)

も点 A で生じている。また圧縮応力の最大値を生じている点 B で、空かの大きさの影響が顕著である。

図 4 には、同じく $\bar{s}=0.5$ の場合の z 軸上の応力 $(\sigma_\beta)_{\varphi=0^\circ}=(\sigma_r)_{\varphi=0^\circ}=(\sigma_r)_{r=0}$ の分布を示す。

σ_β, σ_r は空か面において最大圧縮応力を生じ、板表面に向かうにしたがって引張応力に転じ、板表面の点 \bar{O} で最大引張応力を生じる。また b が大きくなるにしたがって分布は直線状になるとともに、そのこう配は急になり、 $b=0.8$ では板表面にかなり大きな応力を生じている。図に示した破線は、空か面の点 B に生ずる最大圧縮応力の b の大きさによる変化を示しており、 b の値の増加とともに徐々に大きくなる。

図 5, 6 は $b=0.2$ とし形状比を $\bar{s}=0.277, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させた場合の空か面における σ_β および σ_r の分布を示したものである。ここで $\bar{s}=1.0$

は空かが球かの場合であり、齊藤⁽²⁾による結果を用いた。 σ_β については、 $\bar{s}=1.0$ の場合は φ の全域にわたって $(\sigma_\beta/p_0) \approx 0.5$ とほぼ一定であるが、それ以外では点 A で最大引張応力を取り、形状比 \bar{s} が小さくなるほどその応力集中は顕著である。また点 A では、 \bar{s} のいずれの値に対しても引張応力であるが、点 B では \bar{s} が大きい場合は引張応力、 \bar{s} が小さくなると圧縮応力を生じる。 σ_r についても σ_β とほぼ同様な傾向がみられる。しかし、点 A に生じる最大引張応力は σ_β に比べて非常に小さい。

図 7, 8 は $b=0.8$ として $\bar{s}=0.277, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させた場合の空か面における σ_β および σ_r の分布を示したものである。 σ_β については、 $b=0.2$ の場合と異なり、 $\bar{s}=1.0$ の場合でも板表面の影響がでており応力分布はほぼ一定とはならない。また

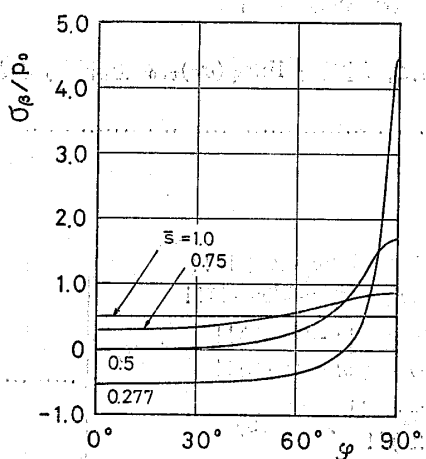


図 5 空か面上の σ_β の分布 ($b=0.2$)

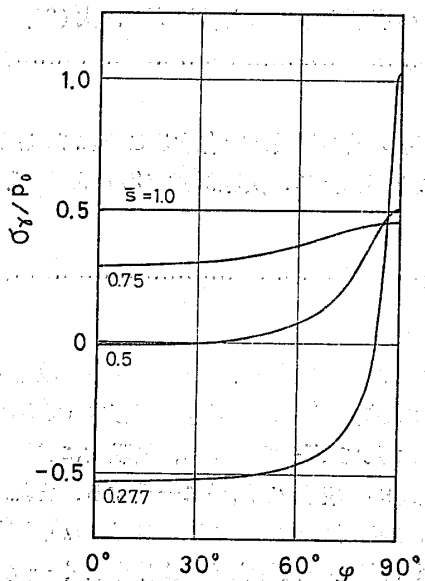


図 6 空か面上の σ_r の分布 ($b=0.2$)

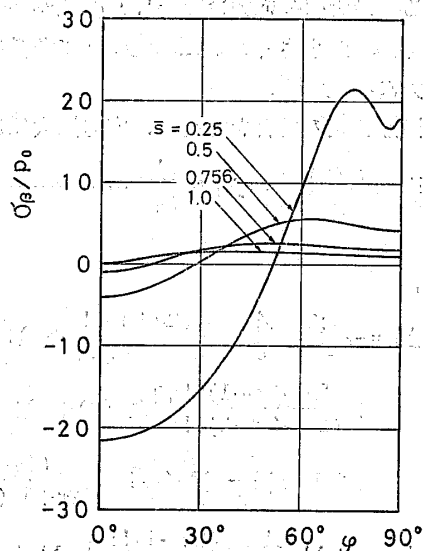


図 7 空か面上の σ_β の分布 ($b=0.8$)

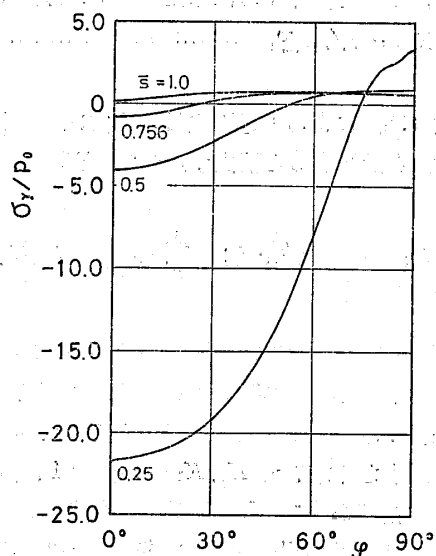


図 8 空か面上の σ_r の分布 ($b=0.8$)

引張応力の最大値は点 A に生ぜず、 \bar{s} の値にかなりの影響を受けており、 \bar{s} が大きいほど点 A から離れたところで生じている。 σ_r については、引張応力の最大値は $\bar{s}=1.0$ の球かの場合には $\varphi=40^\circ$ 付近に生じているが、その他は $\varphi=90^\circ$ の点 A で生じている。しかしその値は、圧縮応力の最大値に比べると非常に小さい。

以上の計算結果より最大引張応力を示すために、空か面上の最大引張応力 $(\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \max}$ および板表面上の点 \bar{O} での応力 $(\sigma_\beta)_{r=0, z=\pm 1}$ と形状比および空かの大さきとの関係を求めたものが図 9 である。 b が小さい場合には常に $(\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \max} > (\sigma_\beta)_{r=0, z=\pm 1}$ であるが、 b がかなり大きくなると $(\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \max} < (\sigma_\beta)_{r=0, z=\pm 1}$ となる。しかしながら b が大きくても形状比 \bar{s} が十分零に近づいた場合には $(\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \max} > (\sigma_\beta)_{r=0, z=\pm 1}$ となっている。最大引張応力は $\bar{s}=1.0$ の球かの場合が最も小さく、 \bar{s} が小さくなるにしたがって急激に増加し、無限大に発散する。

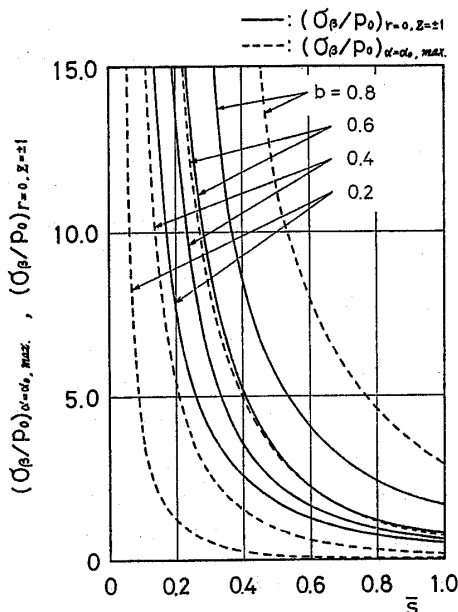


図 9 $\left. \begin{matrix} (\sigma_\beta/p_0)_{\alpha=\alpha_0, \max} \\ (\sigma_\beta/p_0)_{r=0, z=\pm 1} \end{matrix} \right\}$ の形状比による変化

次に、円形き裂の場合を考える。応力拡大係数 K_I を求めるために、極限值 $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi(\sigma_\beta)_{r=0}$ を計算すると、

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left(\frac{\sigma_\beta}{p_0} \right)_{r=0} = \Sigma_1 + \frac{\Sigma_2}{\xi^2} \dots\dots\dots(29)$$

となる。

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 = & - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A_n}{c^2} \left\{ \frac{(2n+1)!!}{2(2n-2)!!} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{4n-4r-1}{(2r+1)(2n-r)} \left\{ \frac{(2n-2r+1)!!}{2(2n-2r-4)!!} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{(2n-2r-1)!!}{(2n-2r-2)!!} \right\} P_{2n}(0) + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(4n-4r-1)}{(2r+1)(2n-r)} \frac{(2n-2r-1)!!}{(2n-2r-2)!!} P_{2n}''(0) \right\} \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \frac{B_n}{c} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(4n-4r+1)}{(2r+1)(2n-r+1)} \frac{(2n-2r-1)!!}{(2n-2r)!!} P_{2n+1}'(0) \right] \\ \Sigma_2 = & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c^2} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(4n-4r-1)}{(2r+1)(2n-r)} \frac{(2n-2r-1)!!}{(2n-2r-2)!!} \right\} P_{2n}(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

ここで、項数を多くするにしたがって、 $\Sigma_2 \rightarrow 0$ となるので Σ_2/ξ^2 の項を省略すると結局 K_I は式 (23) より

$$K_I = p_0 \sqrt{\pi c} \Sigma_1 \dots\dots\dots(31)$$

となる。

一方式 (23) によるき裂先端の応力はき裂先端からの距離の $-3/2$ 乗の特異性を有することになるがこれは $\sigma_\alpha + \sigma_\beta$ を計算すると消去するので Σ_2/ξ^2 の項を省略してよいことが言える。実際に式 (24) より K_I を求めると

$$K_I = - \frac{p_0}{2} \sqrt{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{A_n}{c^2} q_{2n}'(0) P_{2n}(0) + \frac{2B_n}{c} q_{2n+1}(0) P_{2n+1}'(0) \right\} \dots\dots\dots(32)$$

となる。

式 (31) および式 (32) より計算される応力拡大係数は十分な精度で一致する。図 10 および表 1 は応力拡大係数 K_I と円形き裂の半径 c との関係を示したものである。縦軸には無限体中に円形き裂が存在する場合の応力拡大係数 $K_{I\infty}$ に対する無次元量をとっている。 c が大きくなるにつれて K_I は増加し、無限大に発散する。また、 c が小さくなると $K_I/K_{I\infty}$ の値は 1 に近づき $c=0$ では無限体の場合の結果に一致する。また本解と Uflyand の解⁽³⁾ および Kassir-Sih の解⁽⁶⁾ とを $\nu=0.3$ の場合の応力拡大係数について比較したのが図 11 である。本解は Kassir-Sih の解とは若干の差異がみられるが、Uflyand の結果とは最大差異 1% とよく一致しており、 $1/c$ が 1 以下ではほぼ完全に一致した値を示している。ただし、無限体の場合の値への漸近のしかたは両解

よりも急である。

最後に、板厚による干渉効果を明確に示すために a あるいは c を一定にして板厚 $2h$ を変えたときの応力

表 1 応力拡大係数 ($\nu=0.3$)

c	0.176	0.346	0.693	1.039	1.386	3.098	5.273	15.98
$K_I/K_{I\infty}$	1.005	1.031	1.173	1.399	1.673	3.418	6.273	27.43

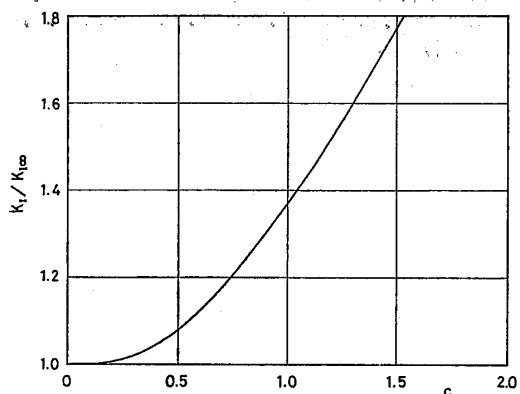


図 10 応力拡大係数の c による変化 ($\nu=0.3$)

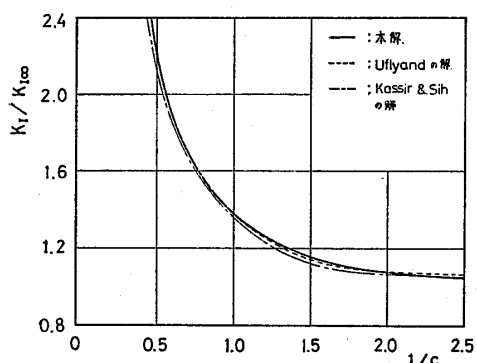


図 11 応力拡大係数の比較 ($\nu=0.3$)

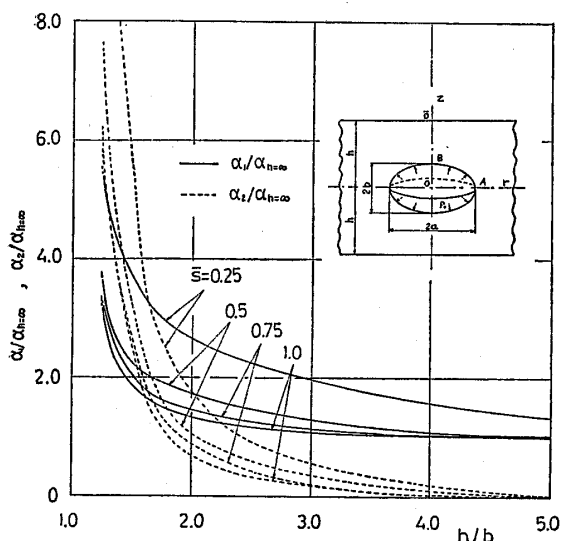


図 12 $\alpha_1/\alpha_{h=\infty}$, $\alpha_2/\alpha_{h=\infty}$ の厚板 h/b による変化

集中係数ならびに応力拡大係数の変化を示したのが図 12, 13 である。

図 12 で基準とした応力集中係数 $\alpha_{h=\infty}$ は偏平回転だ円体面に内圧 p_0 を受ける無限体の場合の結果であり、 $\alpha_{h=\infty} = (\sigma_\beta/p_0)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=90^\circ}$ である。 $\alpha_{h=\infty}(\bar{s})$ は形状比 \bar{s} の関数であり、 $\bar{s}=0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ に対しそれぞれ $\alpha_{h=\infty}=4.0003, 1.5713, 0.8306, 0.5$ となる。また α_1 および α_2 は $\alpha_1 = (\sigma_\beta/p_0)_{\alpha=\alpha_0, \max}$, $\alpha_2 = (\sigma_\beta/p_0)_{r=0, z=\pm 1}$ である。

図 13 で基準とした $(K_I)_{h=\infty}$ は $K_{I\infty}$ と同じである。

4. 結 言

1 個の偏平回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する厚板において、空か面あるいはき裂面に軸対称圧力を受ける問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析する方法を示した。

そして等分布圧力の場合について数値計算を行い、空か近傍の応力分布および応力集中係数に及ぼす空かの大きさや形状比の影響を明らかにするとともに、円形き裂に対する応力拡大係数を求めた。結果を要約すると以下ようになる。

- (1) 最大引張応力は、板厚に比べて空かが小さいときは空か面上の曲率の最も大きい点 A あるいはその近傍で生じるが、空かがかなり大きくなると厚板表面の点 \bar{O} で生じる。しかし空かが大きくなると形状比 $\bar{s}=b/a$ が十分零に近づくと空か面上の点 A で生じる。
- (2) 最大引張応力は、 $\bar{s}=1.0$ の球かの場合が最も小さく、 \bar{s} が減少するにしたがって急激に増加し、空かがき裂に近づくとしたがって無限大に発散する。
- (3) 応力拡大係数 K_I は円形き裂の半径 c の増

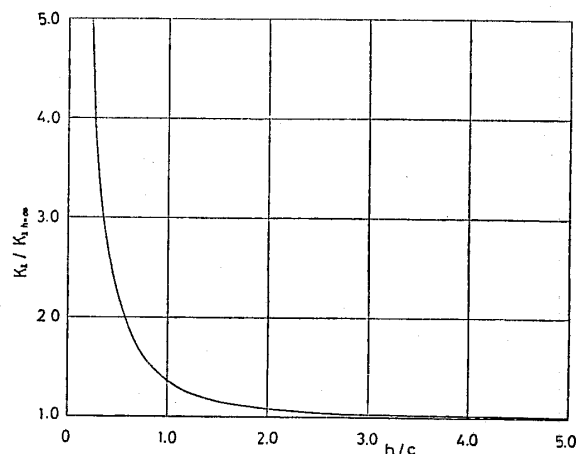


図 13 応力拡大係数の h/c による変化 ($\nu=0.3$)

加とともに単調に増加し、無限に大きくなる。

なお、数値計算には東京大学大型計算機センターの HITAC 8700/8800 を使用した。

文 献

- (1) 土田・ほか3名, 機論, 46-404, A (昭55), 412.
- (2) 斉藤, 東京工業大学, 学位論文, (昭41), 91.
- (3) Ufiyand, Ya. S., *Scientific-Technical Bulletin of Polytechnical Institute of Leningrad, Math.-Physical Sciences*, 8 (1959), 56; *Survey of Articles on the Applications of Integral Transforms in the Theory of Elasticity*, (1965), 222, North Carolina State Univ., Raleigh, N.C.
- (4) Lowengrub, M., *Q. Appl. Math.*, 19 (1961), 119.
- (5) Collins, W.D., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 266 (1962), 359.
- (6) Kalaba, R.E. and Zagustin, E.A., *Int. J. Eng. Sci.*, 10-6 (1972), 491.
- (7) Tsai, Y.M., *Eng. Fract. Mech.*, 4-1 (1972), 155.
- (8) Kassir, M.K. and Sih, G.C., *Three-Dimensional Crack Problems, Mechanics of Fracture*, Vol. 2, (1975), 255, Noordhoff Int.
- (9) 土田・内山, 機論, 45-393, A (昭54), 455.
- (10) Cooke, J.C., *Monatshefte für Math.*, 60 (1956), 322.
- (11) Nicholson, J.W., *Phil. Trans. R. Soc., Ser. A*, 224 (1924), 320.