

へん平回転だ円体状空かを有する厚板の定常熱応力*

土田 栄一郎**, 八重樫 昭徳***
Eiichiro TSUCHIDA, Akinori YAEGASHI

Key Words: Thermoelasticity, Strength of Materials, Spheroidal Cavity, Thick Plate

1. 緒 言

船舶, 原子炉, 圧力容器を代表に多くの機械や構造物の構成部材として用いられている厚肉鋼板には, 内部に多数の巣や傷, ブローホール等の空洞が存在しており, 溶接その他により局部加熱されると空洞まわりに熱応力による集中を生じ, 材料の強度に影響を及ぼすためにしばしば問題となっている. 従来より, 無限体, 半無限体, 厚板, 円柱等の熱応力問題については多くの研究がなされてきた.

しかしながら, 内部欠陥を有する弾性体に対する研究は非常に少ない. 例えば渥美らにより, 二, 三個の球かを有する無限体⁽¹⁾, 1球かを有する円柱⁽²⁾および厚板⁽³⁾の定常熱応力問題が解析され, 最近ではこれらの問題を異方性体に拡張している⁽⁴⁾⁽⁵⁾. また Weeseら⁽⁶⁾は回転双極座標を用い, 2球かを有する無限体, 1球かを有する半無限体の定常熱応力問題を扱っている. 回転だ円体状空かあるいは介在物を有する無限体の定常熱応力問題については Edwards⁽⁷⁾ および Hussain-Pu⁽⁸⁾により解析されており, 牟岐⁽⁹⁾による

回転だ円体の熱応力に関する研究もある. さらに Das および Shail は円形き裂を有する円柱⁽¹⁰⁾ならびに厚板⁽¹¹⁾の熱応力問題を解析している. 以上が主なものであるが, より一般的な回転だ円体状欠陥を有する有限体の熱応力問題は理論的に全く解析されていない. 本研究では, 一般に使用されている厚板材では欠陥としての空か, 介在物などが圧延, 鍛造等により球形から変形してへん平化していることを考慮し, 一般形状欠陥としてへん平回転だ円体状空かあるいは円形き裂を扱い, 厚板中にへん平回転だ円体状空かが存在し, 厚板表面の一定円形領域が加熱される場合の定常熱応力について三次元熱弾性理論に基づいて厳密に解析したものである. 解析においては, 熱弾性ポテンシャルおよび Boussinesq の調和応力関数を用いた. そして数値計算を行い, 温度分布を示すとともに空か近傍の応力分布に及ぼす加熱域の大きさ, 空かの大きさおよび形状比の影響を明らかにした.

2. 温度分布

図1に示されるように, 板厚の半分を単位長さとし

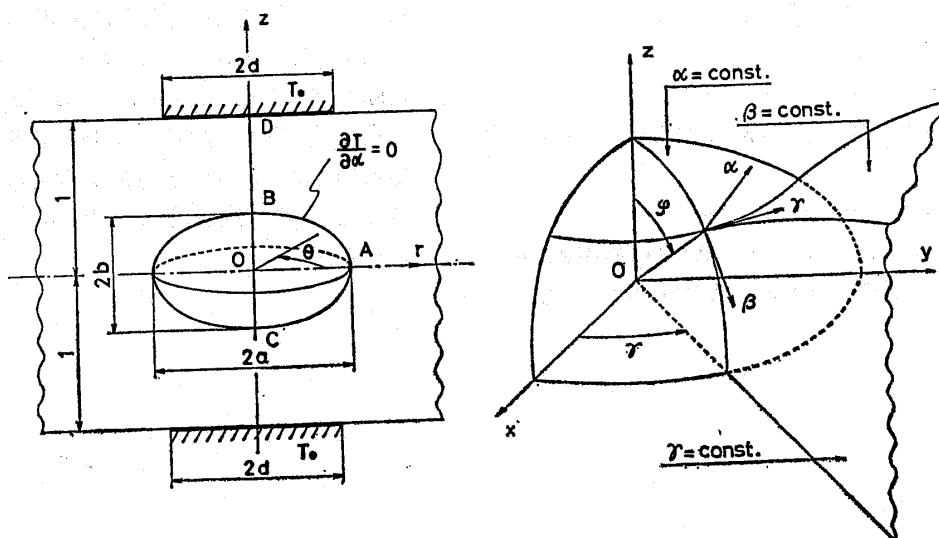


図1 座 標 系

* 昭和 57 年 3 月 16 日 関西支部第 57 期定時総会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和 56 年 10 月 26 日.
** 正員, 埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255).
*** 正員, 東京芝浦電気(株) (〒198 青梅市末広町 2-9-1).

ですべての長さの基準にとり、へん平回転だ円体状空
かの長軸、短軸および焦点間距離をそれぞれ $2a$, $2b$,
 $2c$ とする。O を座標原点として、円柱座標 $(r, \theta,$
 $z)$ およびへん平回転だ円体座標 (α, β, r) を使用
する。両座標間には

$$r = c\xi\bar{\eta}, \theta = \gamma, z = c\xi\eta \dots\dots\dots(1)$$

の関係がある。ここで、 $\xi = \sinh \alpha$, $\bar{\xi} = \cosh \alpha$, $\eta =$
 $\cos \beta$, $\bar{\eta} = \sin \beta$ である。

いま、図に示すように厚板の上下面の半径 d なる円
形領域が一樣温度 T_0 に加熱され、外部領域は温度
零、また空か面は熱絶縁状態にあるものとする。さ

て、定常状態におけるフーリエの熱伝導方程式

$$\nabla^2 T = 0 \dots\dots\dots(2)$$

を満足する温度関数 T が満足すべき条件を考えるとこ
の場合次のようになる。

(i) 厚板上下面 $z = \pm 1$ において

$$(T)_{z=\pm 1} = \begin{cases} T_0 & (r < d) \\ 0 & (r > d) \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

(ii) 空か面 $\alpha = \alpha_0$ において

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

この温度条件を満足させるために温度関数を次のよ
うに与える。

$$T = T_0 d \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda d) J_0(\lambda r)}{\cosh \lambda} \cosh \lambda z d\lambda + T_0 \sum_{m=0}^\infty F_m q_{2m}(\xi) P_{2m}(\eta) + T_0 \int_0^\infty \phi(\lambda) J_0(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 F_m , $\phi(\lambda)$ は温度条件によって決定される未定係数ならびに未知関数であり、 $q_n(\xi)$ は第2種変形ル
ジャンドル関数⁽¹²⁾で、 $q_n(\xi) = i^{n+1} Q_n(i\xi)$ なる関係があり、 $P_n(\eta)$ および $Q_n(i\xi)$ はそれぞれ第1種ならびに第
2種ルジャンドル関数、また $J_n(\lambda r)$ は n 次の第1種ベッセル関数である。式(5)の第1項は牟岐⁽¹³⁾によっ
て与えられたもので温度条件式(3)を満足する温度関数である。

まず温度条件式(3)を満足させるために、へん平回転だ円体調和関数と円柱調和関数との関係式⁽¹⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} q_n(\xi) P_n(\eta) &= c \int_0^\infty j_{2n}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (z > 0), \\ q_n(\xi) P_n(\eta) &= c(-1)^n \int_0^\infty j_{2n}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda \quad (z < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

を用いる。ここで $j_n(\lambda c)$ は n 次の第1種球ベッセル関数である。この関係式を用いて、式(5)を円柱座標で
表し、式(3)の条件を満足させると未知関数 $\phi(\lambda)$ は次のようになる。

$$\phi(\lambda) = - \sum_{m=0}^\infty c F_m j_{2m}(\lambda c) \frac{2}{e^{2\lambda} + 1} \dots\dots\dots(7)$$

次に、空か面の温度条件を満足させるために次の関係式⁽¹⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} J_0(\lambda r) \cosh \lambda z &= \sum_{n=0}^\infty (4n+1) j_{2n}(\lambda c) p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \\ J_0(\lambda r) \sinh \lambda z &= \sum_{n=0}^\infty (4n+3) j_{2n+1}(\lambda c) p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

を用いて、式(5)をへん平回転だ円体座標に直すと

$$T = T_0 \sum_{n=0}^\infty (4n+1) \delta_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) + T_0 \sum_{n=0}^\infty F_n q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) + T_0 \sum_{n=0}^\infty (4n+1) \kappa_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \dots\dots\dots(9)$$

となる。ここで、

$$\delta_n = d \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda d)}{\cosh \lambda} j_{2n}(\lambda c) d\lambda, \quad \kappa_n = - \sum_{m=0}^\infty 2c F_m \int_0^\infty \frac{1}{e^{2\lambda} + 1} j_{2n}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda$$

であり、 $p_n(\xi) = (-i)^n P_n(i\xi)$ は第1種変形ルジャンドル関数である。

式(9)を用いて温度条件式(4)を満足させると

$$(\partial T / \partial \alpha)_{\alpha=\alpha_0} = T_0 \sum_{n=0}^\infty \{F_n q_{2n}'(\xi_0) + (4n+1)(\kappa_n + \delta_n) p_{2n}'(\xi_0)\} \bar{\xi}_0 P_{2n}(\eta) = 0 \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 $\xi_0 = \sinh \alpha_0$, $\bar{\xi}_0 = \cosh \alpha_0$ である。

式(10)より F_n に関する無限連立一次方程式が得られ、これを解けば温度分布が求まる。

3. 熱弾性ポテンシャル

次に、温度関数 T に対する熱弾性基礎方程式の特解を求める。すなわち

$$\nabla^2 Q = T \dots\dots\dots(11)$$

を満足する熱弾性ポテンシャル Ω を用いれば、軸対称応力場における特解はへん平回転た円柱座標では次のようになる。

$$u_\alpha = \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon h \bar{\xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \quad v_\beta = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon h \bar{\eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots(12)$$

この変位成分から導かれる応力成分は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{E\varepsilon}{1-\nu} \left\{ h^2 \bar{\xi}^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + c^2 h^4 \bar{\eta}^2 \left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) - T \right\}, \\ \sigma_\beta &= \frac{E\varepsilon}{1-\nu} \left\{ h^2 \bar{\eta}^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + c^2 h^4 \bar{\xi}^2 \left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) - T \right\}, \quad \sigma_r = \frac{E\varepsilon}{1-\nu} \left\{ h^2 \left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) - T \right\}, \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E\varepsilon}{1-\nu} \bar{\xi} \bar{\eta} \left\{ -h^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 h^4 \left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 ε は線膨張係数、 E はヤング係数、 $h = \frac{1}{c \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ である。なお円柱座標における熱弾性ポテンシャルの変位ならびに応力の表示は文献 (15) を参照されたい。

式 (11) の特解として、式 (5) のそれぞれの項に対応して次のような熱弾性ポテンシャルを与える。

$$\Omega = T_0 d \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda d)}{2\lambda \cosh \lambda} J_0(\lambda r) z \sinh \lambda z d\lambda - T_0 \sum_{m=0}^\infty \frac{c^2 F_m}{2(4m+1)} \xi \eta \{ q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) + q_{2m-1}(\xi) P_{2m-1}(\eta) \} + T_0 \int_0^\infty \frac{\phi(\lambda)}{2\lambda} J_0(\lambda r) z \sinh \lambda z d\lambda \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで $\nabla^4 \Omega = 0$ である。

この熱弾性ポテンシャルおよび温度関数より得られる温度分布によって生じる応力は、厚板表面および空か面で零ではないので、これらの境界面での応力自由状態を満足させるために、変位および応力成分を円柱座標およびへん平回転た円柱座標で表す必要がある。そこで熱弾性ポテンシャルを式 (6)、(8) を用いて座標変換すると次のようになる。

円柱座標表示：

$$\Omega = T_0 d \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda d)}{2\lambda \cosh \lambda} J_0(\lambda r) z \sinh \lambda z d\lambda - T_0 \sum_{m=0}^\infty \frac{c F_m}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} j_{2m}(\lambda c) J_0(\lambda r) z e^{-\lambda z} d\lambda + T_0 \int_0^\infty \frac{\phi(\lambda)}{2\lambda} J_0(\lambda r) z \sinh \lambda z d\lambda \quad (z > 0) \quad \dots\dots\dots(15)$$

へん平回転た円柱座標表示：

$$\Omega = T_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2}{2} (\delta_{n+1} + \delta_n) \xi \eta p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) - T_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2 F_n}{2(4n+1)} \xi \eta \{ q_{2n+1}(\xi) \times P_{2n+1}(\eta) + q_{2n-1}(\xi) P_{2n-1}(\eta) \} + T_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2}{2} (\kappa_{n+1} + \kappa_n) \xi \eta p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \quad \dots\dots\dots(16)$$

それぞれの座標における変位および応力成分は文献 (15) および式 (12)、(13) から求められる。

4. 応力関数解

厚板内にへん平回転た円柱面 ($\alpha = \alpha_0 = \text{const.}$) を考えると、この面には前述の温度関数 T および熱弾性ポテンシャル Ω による応力が生じており、応力自由の条件を満足していない。また厚板表面についても同様である。そこで板表面ならびに空か面で応力自由となるためには次の境界条件を満足する解を式 (14) に重ね合わせなければならない。

境界条件：(i) 厚板上下面 $z = \pm 1$ において

$$\left(\frac{\sigma_z}{E\varepsilon T_0} \right)_{z=\pm 1} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \left[\sum_{m=0}^\infty c F_m \int_0^\infty \lambda j_{2m}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda} d\lambda + \int_0^\infty \lambda \left\{ \phi(\lambda) + d \frac{J_1(\lambda d)}{\cosh \lambda} \right\} J_0(\lambda r) \sinh \lambda d\lambda \right] \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\mp \left(\frac{\tau_{rz}}{E\varepsilon T_0} \right)_{z=\pm 1} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \left[\sum_{m=0}^\infty c F_m \int_0^\infty (\lambda-1) j_{2m}(\lambda c) J_1(\lambda r) e^{-\lambda} d\lambda + \int_0^\infty \left\{ \phi(\lambda) + d \frac{J_1(\lambda d)}{\cosh \lambda} \right\} J_1(\lambda r) (\sinh \lambda + \lambda \cosh \lambda) d\lambda \right] \quad \dots\dots\dots(18)$$

(ii) 空か面 $\alpha = \alpha_0$ において

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{E\varepsilon T_0 c^2 h^4}\right)_{\alpha=\alpha_0} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_{2n}(\eta) = -\frac{c^2}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{s_{F1} F_{n-2}}{4n-7} + \frac{s_{F2} F_{n-1}}{4n-3} + \frac{s_{F3} F_n}{4n+1} + \frac{s_{F4} F_{n+1}}{4n+5} + \frac{s_{F5} F_{n+1}}{4n+9} - s_{\kappa 1}(\kappa_{n-2} + \delta_{n-2}) - s_{\kappa 2}(\kappa_{n-1} + \delta_{n-1}) - s_{\kappa 3}(\kappa_n + \delta_n) - s_{\kappa 4}(\kappa_{n+1} + \delta_{n+1}) - s_{\kappa 5}(\kappa_{n+2} + \delta_{n+2}) \right\} P_{2n}(\eta) \dots\dots\dots(19)$$

$$\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{E\varepsilon T_0 c^2 h^4 \xi \bar{\eta}}\right)_{\alpha=\alpha_0} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} T_n P_{2n}'(\eta) = -\frac{c^2}{2(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{t_{F1} F_{n-2}}{4n-7} + \frac{t_{F2} F_{n-1}}{4n-3} + \frac{t_{F3} F_n}{4n+1} + \frac{t_{F4} F_{n+1}}{4n+5} + \frac{t_{F5} F_{n+2}}{4n+9} + t_{\kappa 1}(\kappa_{n-2} + \delta_{n-2}) + t_{\kappa 2}(\kappa_{n-1} + \delta_{n-1}) + t_{\kappa 3}(\kappa_n + \delta_n) + t_{\kappa 4}(\kappa_{n+1} + \delta_{n+1}) + t_{\kappa 5}(\kappa_{n+2} + \delta_{n+2}) \right\} P_{2n}'(\eta) \dots\dots\dots(20)$$

(iii) 無限遠方において、すべての応力が零

ここで、上式中の s_{Fi} , t_{Fi} ($i=1\sim 5$) は例えば次のようなものである。

$$s_{F1} = -\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(4n-1)(4n-3)(4n-5)} \left[(2n-3) \left\{ q_{2n-4}(\xi_0) - \frac{\xi_0}{2} q_{2n-3}(\xi_0) \right\} + \left(\bar{\xi}_0^2 + \frac{\xi_0^2}{2} \right) q_{2n+3}(\xi_0) + \frac{\xi_0 \bar{\xi}_0^2}{2} q_{2n-3}''(\xi_0) \right] \dots\dots\dots(21)$$

$$t_{F1} = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{(4n-1)(4n-3)(4n-5)} \left\{ q_{2n-3}(\xi_0) + \xi_0 q_{2n-3}'(\xi_0) \right\} \dots\dots\dots(22)$$

また、 $s_{\kappa i}$, $t_{\kappa i}$ ($i=1\sim 5$) はそれぞれ s_{Fi} , t_{Fi} に含まれる第2種変形ルジャンドル関数 $q_n(\xi_0)$ を第1種変形ルジャンドル関数 $p_n(\xi_0)$ に置き換え、かつ偶数次の第2種変形ルジャンドル関数の符号を逆にしたものである。結局、上述の境界条件を満足する解を導いて、温度分布に起因する解に重ね合わせれば、へん平回転だ円体状空か有する厚板がその表面に一定加熱域が存在する場合の熱応力問題の解が得られる。

そこで、軸対称三次元熱弾性基礎方程式の同次解として以下の Boussinesq の調和応力関数を用いることにする。

$$2Gu_\alpha = h\bar{\xi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + ch\xi\eta \left\{ \xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\}, \quad 2Gv_\beta = -h\bar{\eta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} - ch\xi\bar{\eta} \left\{ \eta \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \dots\dots(23)$$

ここで、 $\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0$, $\nabla^2 \equiv h^2 \bar{\xi}^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2h^2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + h^2 \bar{\eta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2h^2 \eta \frac{\partial}{\partial \eta}$ である。

上記の境界条件を満足させるために、応力関数 φ_0 , φ_3 に次のような調和関数を与える。

$$[I] \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m q_{2m}(\xi) P_{2m}(\eta), \quad \varphi_3 = E\varepsilon T_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) \dots\dots\dots(24)$$

$$[II] \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \int_0^\infty \phi_1(\lambda) J_0(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda, \quad \varphi_3 = E\varepsilon T_0 \int_0^\infty \lambda \phi_2(\lambda) J_0(\lambda r) \sinh \lambda z d\lambda \dots\dots\dots(25)$$

ここで、 A_m , B_m および $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり、上記の二組の応力関数は境界条件 (iii) を満足するように選んである。

まず、厚板上下面における境界条件を満足させるために、関係式 (6) を用い、応力関数 [I] を円柱座標に書き改めると

$$[III] \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \sum_{m=0}^{\infty} c A_m \int_0^\infty j_{2m}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad \varphi_3 = E\varepsilon T_0 \sum_{m=0}^{\infty} c B_m \int_0^\infty j_{2m+1}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (z > 0) \dots\dots\dots(26)$$

となる。応力関数 [II], [III] から応力成分を求め、厚板上面の境界条件を満足させ、また $z < 0$ についても同様にして厚板下面の境界条件を満足させると、結局次のようになる。

$$\left(\frac{\sigma_z}{E\varepsilon T_0}\right)_{z=\pm 1} = \int_0^\infty \lambda^2 J_0(\lambda r) \left[\phi_1(\lambda) \cosh \lambda + \phi_2(\lambda) (\lambda \sinh \lambda - 2(1-\nu) \cosh \lambda) + \sum_{m=0}^{\infty} c \left\{ A_m j_{2m}(\lambda c) + \frac{1}{\lambda} (\lambda + 2 - 2\nu) B_m j_{2m+1}(\lambda c) \right\} e^{-\lambda} \right] d\lambda = -\frac{1}{2(1-\nu)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} c F_m \int_0^\infty \lambda j_{2m}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda} d\lambda + \int_0^\infty \lambda \left\{ \phi(\lambda) + d \frac{J_1(\lambda d)}{\cosh \lambda} \right\} J_0(\lambda r) \sinh \lambda d\lambda \right] \dots\dots\dots(27)$$

$$\begin{aligned} \mp \left(\frac{\tau_{rz}}{E\varepsilon T_0} \right)_{z=\pm 1} &= \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda r) \left[\phi_1(\lambda) \sinh \lambda - \phi_2(\lambda) \{ (1-2\nu) \sinh \lambda - \lambda \cosh \lambda \} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^\infty c \left\{ A_m j_{2m}(\lambda c) + \frac{1}{\lambda} (\lambda + 1 - 2\nu) B_m j_{2m+1}(\lambda c) \right\} e^{-\lambda} \right] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \left[\sum_{m=0}^\infty c F_m \int_0^\infty (\lambda-1) j_{2m}(\lambda c) J_1(\lambda r) e^{-\lambda} d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \left\{ \phi(\lambda) + d \frac{J_1(\lambda d)}{\cosh \lambda} \right\} J_1(\lambda r) (\sinh \lambda + \lambda \cosh \lambda) d\lambda \right] \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

式 (27), (28) にそれぞれハンケルの逆変換を施し, 未知関数 $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty \left\{ c A_m j_{2m}(\lambda c) f_1(\lambda) + c B_m j_{2m+1}(\lambda c) f_2(\lambda) + \frac{c}{1-\nu} F_m j_{2m}(\lambda c) g_1(\lambda) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \phi(\lambda) + d \frac{J_1(\lambda d)}{\cosh \lambda} \right\} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty \left\{ c A_m j_{2m}(\lambda c) f_3(\lambda) + c B_m j_{2m+1}(\lambda c) f_4(\lambda) + \frac{c}{2(1-\nu)} F_m j_{2m}(\lambda c) g_2(\lambda) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2(1-\nu)\lambda^2} \left\{ \phi(\lambda) + d \frac{J_1(\lambda d)}{\cosh \lambda} \right\} \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{3-4\nu-2\lambda+e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda+2\lambda}, & f_2(\lambda) &= \frac{2\{2(1-\nu)(1-2\nu)-\lambda^2\}}{\lambda(\sinh 2\lambda+2\lambda)}, & f_3(\lambda) &= \frac{2}{\sinh 2\lambda+2\lambda}, \\ f_4(\lambda) &= \frac{3-4\nu+2\lambda-e^{-2\lambda}}{\lambda(\sinh 2\lambda+2\lambda)}, & g_1(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2(\sinh 2\lambda+2\lambda)} \{ (1-\nu-\lambda)(1+e^{-2\lambda}) + (2\nu-\lambda)\lambda e^{-2\lambda} \}, \\ g_2(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2(\sinh 2\lambda+2\lambda)} \{ 1 + (1-2\nu)e^{-2\lambda} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

次に空か面の境界条件 (ii) を満足させるために, 円柱調和関数とへん平回転円筒体調和関数との関係式 (8) を用いて応力関数 [II] を書き改めると

$$[IV] \quad \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \sum_{n=0}^\infty \alpha_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad \varphi_3 = E\varepsilon T_0 \sum_{n=0}^\infty \beta_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \dots\dots\dots (32)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (4n+1)c \sum_{m=0}^\infty \left\{ A_m \int_0^\infty f_1(\lambda) j_{2n}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda + B_m \int_0^\infty f_2(\lambda) j_{2n}(\lambda c) j_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ &\quad + \frac{c^2}{1-\nu} \sum_{m=0}^\infty F_m \left\{ \int_0^\infty \lambda g_1(\lambda) j_{2n+1}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda + \int_0^\infty \lambda g_1(\lambda) j_{2n-1}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ &\quad - (4n+1)c^2 \left\{ \frac{\kappa_{n+1} + \delta_{n+1}}{(4n+3)(4n-1)} + \frac{2(\kappa_n + \delta_n)}{(4n+3)(4n-1)} + \frac{\kappa_{n-1} + \delta_{n-1}}{16n^2-1} \right\} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= (4n+3)c \sum_{m=0}^\infty \left\{ A_m \int_0^\infty f_3(\lambda) j_{2n+1}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda + B_m \int_0^\infty f_4(\lambda) j_{2n+1}(\lambda c) j_{2m+1}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ &\quad + \frac{c^2}{2(1-\nu)} \sum_{m=0}^\infty F_m \left\{ \int_0^\infty \lambda g_2(\lambda) j_{2n+2}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda + \int_0^\infty \lambda g_2(\lambda) j_{2n}(\lambda c) j_{2m}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ &\quad - \frac{c}{2(1-\nu)} \{ (\kappa_{n+1} + \delta_{n+1}) + (\kappa_n + \delta_n) \} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

そこで, 応力関数 [I], [IV] より応力成分を求め, さらに式 (19), (20) の空か面の境界条件を満足させると次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\alpha}{E\varepsilon T_0 c^2 h^4} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= \sum_{n=0}^\infty \{ s_{A1} A_{n-1} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+1} + s_{B1} B_{n-2} + s_{B2} B_{n-1} + s_{B3} B_n + s_{B4} B_{n+1} + s_{\alpha 1} \alpha_{n-1} \\ &\quad + s_{\alpha 2} \alpha_n + s_{\alpha 3} \alpha_{n+1} + s_{\beta 1} \beta_{n-2} + s_{\beta 2} \beta_{n-1} + s_{\beta 3} \beta_n + s_{\beta 4} \beta_{n+1} \} P_{2n}(\eta) = \sum_{n=0}^\infty S_n P_{2n}(\eta) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{E\varepsilon T_0 c^2 h^4 \xi \bar{\eta}} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= \sum_{n=1}^\infty \{ t_{A1} A_{n-1} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+1} + t_{B1} B_{n-2} + t_{B2} B_{n-1} + t_{B3} B_n + t_{B4} B_{n+1} \\ &\quad + t_{\alpha 1} \alpha_{n-1} + t_{\alpha 2} \alpha_n + t_{\alpha 3} \alpha_{n+1} + t_{\beta 1} \beta_{n-2} + t_{\beta 2} \beta_{n-1} + t_{\beta 3} \beta_n + t_{\beta 4} \beta_{n+1} \} P_{2n}'(\eta) = \sum_{n=1}^\infty T_n P_{2n}(\eta) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

ここで、 $S_{A_l}, S_{B_l}, S_{a_l}, S_{b_l}, t_{A_l}, t_{B_l}, t_{a_l}, t_{b_l}$ ($l=1\sim 3$ or 4) は文献 (16) の式 (18) と同一である。

式 (35), (36) において、それぞれ $P_{2n}(\eta), P_{2n}'(\eta)$ の各係数を等置すれば、 A_n, B_n に関する無限連立一次方程式が得られる。これらを解けば本問題に対する解は完全に決まる。そして、全体の変位および応力各成分は T, Q および応力関数 [I], [II] より得られる成分を重ね合わせるにより得られる。

5. 数値計算

ポアソン比を $\nu=0.3$ とし、加熱域を $d=0.5, 1.0, 2.0$ として $b=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ と変化させ、各場合について数値計算を行った。以下に計算結果を示

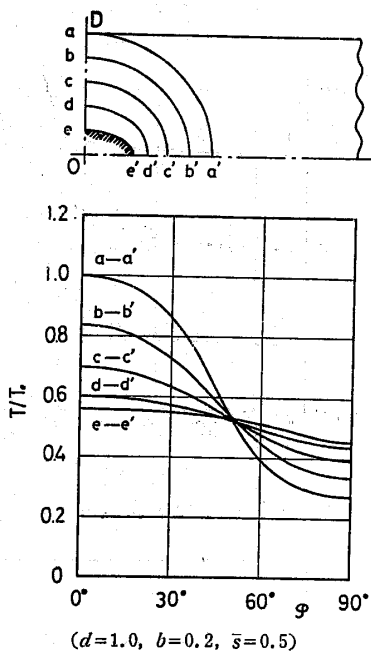


図2 温度分布

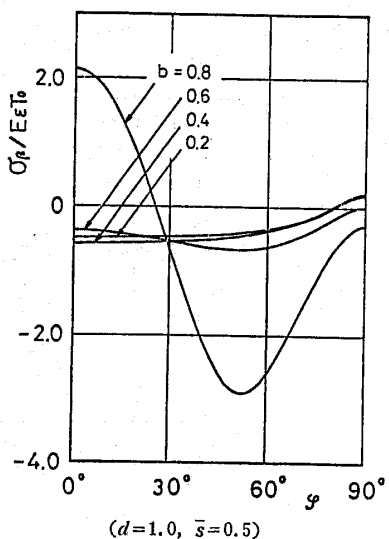


図3 空か面上の σ_β の分布

す。なお応力の対称性を考慮して板の上半分について考えることにする。

図2は一例として、加熱域の大きさ $d=1.0$ に対して $b=0.2$ として形状比 $\bar{s} \equiv b/a=0.5$ の場合の温度分布を示したものである。縦軸には加熱温度 T_0 に対する無次元量を取り、横軸には z 軸から測った角度 φ (球座標の1変数) をとっている。空か面においては φ は β と $\tan \varphi = (a/b) \tan \beta$ なる関係がある。

図では $b=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ なる同焦点へん平回転円体面での温度分布を示している。温度 T は $\varphi=0^\circ$ で最大値をとり、 φ が増加するにしたがって減少し、 $\varphi=90^\circ$ で最も低い値をとる。

図3, 4は $\bar{s}=0.5$ として $d=1.0$ の場合の空か面

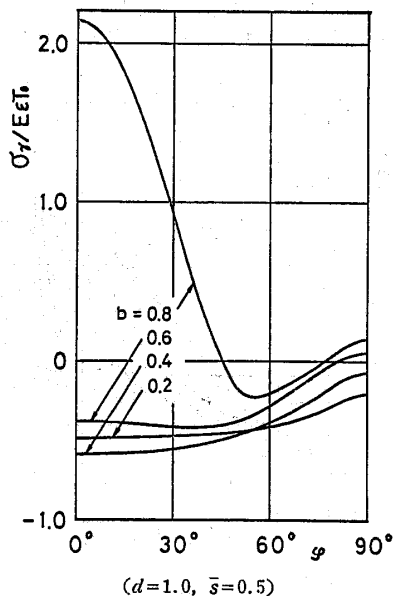


図4 空か面上の σ_r の分布

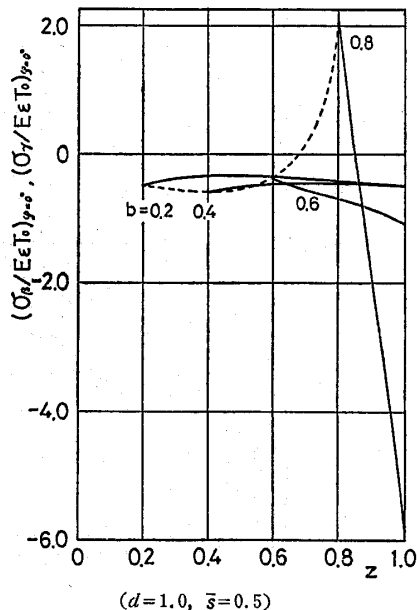
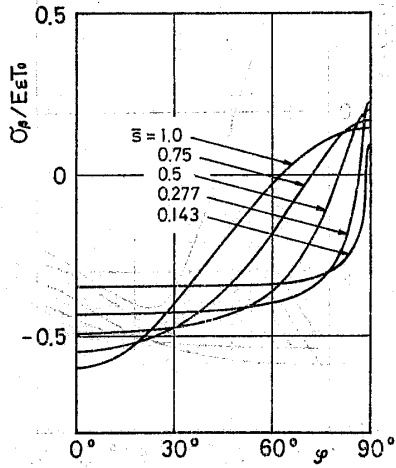


図5 z 軸上の σ_β, σ_r の分布

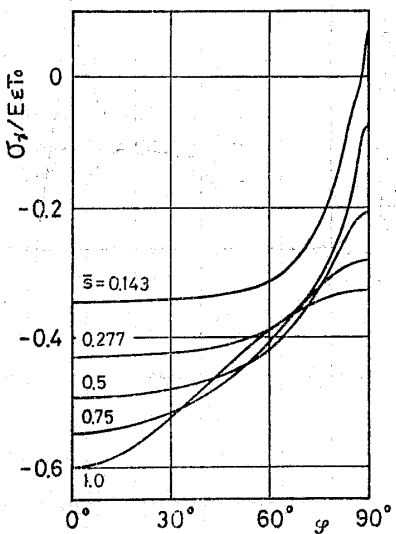
に生じる σ_β および σ_r の分布を示したものである。
 σ_β は空かが比較的小さい場合、 $\varphi=0^\circ$ の点Bで圧縮応力の最大値をとり、 φ の増加とともに減少し、引張応力に転じて $\varphi=90^\circ$ の点Aで引張応力の最大値をとる。しかし空かが大きくなると $\varphi=50^\circ$ 近傍で圧縮応力の最大値をもつようになり、その傾向は図は省略したが d が大きいほど大きい。特に $b=0.8$ では点Bでかなり大きな引張応力が生じ、 φ の増加とともに減少し、圧縮応力に転じて $\varphi=50^\circ$ 近傍で極大値をとり、点Aにおいても圧縮応力となっている。図4では、応力 σ_r は b が小さい場合には最大圧縮応力を点Bでとり、 b が大きな場合には逆に点Bで最大引張応力をとり $\varphi=50^\circ$ 近傍で最大圧縮応力をとる。

図5は $\bar{s}=0.5$, $d=1.0$ の場合の z 軸上の応力 $(\sigma_\beta)_{\varphi=0^\circ}=(\sigma_r)_{\varphi=0^\circ}=(\sigma_r)_{r=0}$ の分布を示したものであ



($d=1.0, b=0.2$)

図6 空か面上の σ_β の分布

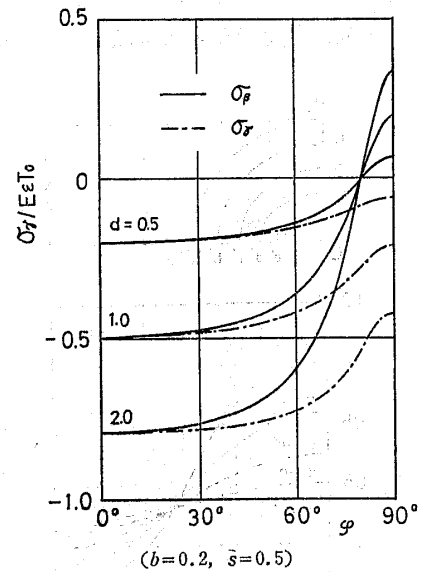


($d=1.0, b=0.2$)

図7 空か面上の σ_r の分布

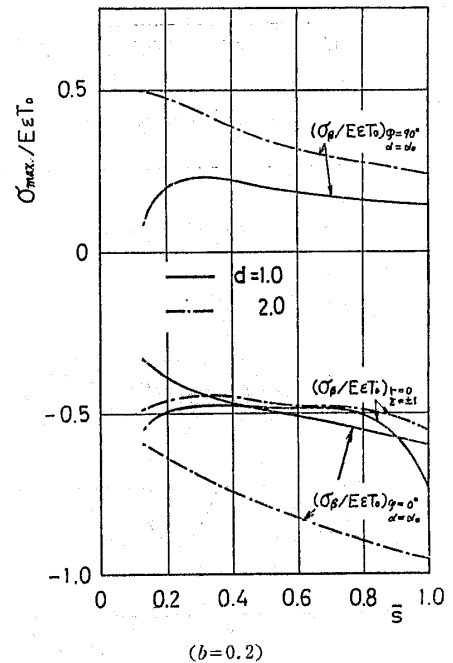
る。

図6, 7は $b=0.2$ として $d=1.0$ の場合に対する空か面上の σ_β ならび σ_r の分布を形状比 \bar{s} をパラメータとして示したものである。ここで $\bar{s}=1.0$ は球かの場合であり、文献(17)によった。図6では空か形状がへん平化するほど点Bでの最大圧縮応力は小さくなり、点Aでの最大引張応力は大きくなる。またへん平化が進むと φ の大きい範囲を除いて一定値に近づく。図7では応力 σ_r は φ の全域においてほぼ圧縮応力であり、 $\bar{s}=1.0$ すなわち球かに近づくほど大きな応力を生じている。



($b=0.2, \bar{s}=0.5$)

図8 空か面上の σ_β, σ_r の分布



($b=0.2$)

図9 最大応力(引張り, 圧縮) σ_{max} の形状比による変化

図8は加熱域 $d=0.5, 1.0, 2.0$ と変化した場合の空か面上の σ_β および σ_r の分布を示したものである。応力 σ_β は φ の小さいところでは圧縮であり、 $\varphi=80^\circ$ で零となりA点に近い所で引張応力となる。そして加熱域 d が大きいほど大きな値をとる。応力 σ_r も同様の傾向を示す。

以上の計算結果より、 b が比較的小さく ($b < 0.6$)、 d が大きい ($d > 1.0$) 場合には最大圧縮応力は空か面上の点Bの応力 $\sigma_B = (\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=0^\circ}$ あるいは板表面上の点Dでの応力 $\sigma_D = (\sigma_\beta)_{r=0, s=\pm 1}$ であり、最大引張応力は空か面上の点Aの応力 $\sigma_A = (\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=90^\circ}$ である。そこでこれらの応力と形状比 \bar{s} との関係性を $d=1.0, 2.0$ に対して求めたのが図9である。 $0.143 < \bar{s} < 1.0$ の範囲では最大引張応力は、 d のいずれの場合でも $\bar{s}=1.0$ の球かの場合が最も小さい。最大引張応力は $d=2.0$ では \bar{s} の減少とともに大きくなるが $d=1.0$ では $\bar{s}=0.3$ 近傍で極大値をもち以後減少していく。最大圧縮応力は球かの場合が最も大きくなっている。また $d=2.0$ では、 \bar{s} に対して常に空か面上の点Bの応力の方が板表面の点Dの応力よりも大きくなっているが、 $d=1.0$ では $\bar{s} < 0.45$, $\bar{s} > 0.9$ なる範囲で板表面上の点Dで最大圧縮応力を生じている。また $\bar{s} < 0.143$ 以下では $d=1.0$ については、最大圧縮応力は球かの場合よりも大きくなり、空か面上の点Aに生じる引張応力は圧縮応力に転じ、最大引張応力はなくなることが推測される。 $d=2.0$ についても、 $\bar{s} < 0.143$ において σ_D と σ_B とは逆転し、板表面の点Dで球かの場合よりも大きな圧縮応力を生じ、また σ_A は引張の極大値をとった後減少し、 \bar{s} が零に近いところで圧縮応力に転じ $d=1.0$ とほぼ同様な傾向をもつと考えられる。 b が大きく d が小さい場合、図3を参照すると前述の傾向とは全く異なり、最大圧縮応力は $\varphi=50^\circ$ 近傍、最大引張応力は $\varphi=0^\circ$ の点Bで生じ、その値はともかなり大きい。

最後に円形き裂の場合を考えよう。 $\xi_0=0$ とおくと $a=c, b=0$ となり、へん平回転だ円体状空かは原点Oを中心とする半径 c の円形き裂となる。本問題のき裂はモードIであるから、応力拡大係数は次式で定義される。

$$K_I = \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2\pi(r-c)} (\sigma_z)_{z=0} = \sqrt{\pi c} \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi (\sigma_\beta)_{\eta=0} \dots\dots\dots (37)$$

実際に計算すると

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left(\frac{\sigma_\beta}{E \varepsilon T_0} \right)_{\eta=0} = \Sigma_1 + \frac{\Sigma_2}{\xi^2} \dots\dots\dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{1}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{n+1} + \delta_n) \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} P_{2n+1}'(0) - \frac{1}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \delta_n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} P_{2n}(0) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{A_n}{c^2} \left[\frac{(2n+1)!!}{2(2n-2)!!} + \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{4n-4r-1}{(2r+1)(2n-r)} \frac{[2n-2r-1]!!}{2[2n-2r-4]!!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{[2n-2r-1]!!}{[2n-2r-2]!!} \right] P_{2n}(0) + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{4n-4r-1}{(2r+1)(2n-r)} \frac{(2n-r-1)!!}{(2n-2r-2)!!} \right. \\ &\quad \left. \times P_{2n}''(0) \right\} + 2(1-\nu) \frac{B_n}{c} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(4n-4r+1)}{(2r+1)(2n-r+1)} \frac{(2n-2r-1)!!}{(2n-2r)!!} P_{2n+1}'(0) \Bigg\} \dots\dots\dots (39) \\ \Sigma_2 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c^2} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(4n-4r-1)}{(2r+1)(2n-r)} \frac{(2n-2r-1)!!}{(2n-2r-2)!!} \right\} P_{2n}(0) \end{aligned} \right.$$

ここで項数を多くするにしたがって $\Sigma_2 \rightarrow 0$ となるのでこれを省略すると⁽¹²⁾、結局 K_I は

$$K_I = E \varepsilon T_0 \sqrt{\pi c} \Sigma_1 \dots\dots\dots (40)$$

となる。

しかしながら実際に式(10)に $\xi_0=0$ を代入すると $p_{2n}'(0)=0, q_{2n}'(0) = -\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$ より $F_n = 0$ となり、温度分布は円形き裂によって乱されないことが分かる。牟岐⁽¹³⁾によれば本問題と同じ熱負荷を受ける厚板の場合、厚板内では $\sigma_z = \tau_{zr} = 0$ なることが示されている。したがって式(37)から直接 $K_I = 0$ が得られる。本研究では応力拡大係数が零となる場合を扱ったが円形き裂面に温度分布が与えられる場合などには上述の応力拡大係数に対する計算法が役に立つであろう。

6. 結 言

へん平回転だ円体状空かを有する厚板が両面に一對の一定加熱域が存在する場合の定常熱応力問題を熱弾性理論に基づいて厳密に解析した。結果を要約すると次のようになる。

(1) 最大圧縮応力は、特別の場合を除いて、空か面上の厚板表面に最も近い点Bあるいは板表面上の点Dのいずれかに生じる。その傾向は、加熱域が大きく、空かが大きい場合および形状比 \bar{s} の値が大きい場合には空か面上の点Bに生じる。また、最大圧縮応力は $\bar{s}=1.0$ の球かの場合が最も大きい。

(2) 最大引張応力は、特別の場合を除いて、空か面の赤道線上に生じるが、その値は最大圧縮応力に比べ

て小さい。また形状比 \bar{s} に関しては、形状等により異なるが $\bar{s} \approx 1.0$ のある値で極大値をとる。

(3) 自由境界面の影響は、加熱域が大きくなるにしたがって少なくなる。また、加熱域の大きさによる影響は、空かのある大きさ ($b=0.8$) を境として、空かの大きさがそれより小さな範囲では加熱域が大きいほど点Bの圧縮応力は大きく、板表面Dでの引張応力は小さいが、それより大きな範囲では、前者は小さく、後者は大きくなっている。

(4) 特別な場合として、加熱域が小さく、空かが大きくかつ形状が極端にへん平化すると、空か面上の厚板表面に最も近い点Bに最大引張応力を生じ、その値はかなり大きい。また、最大圧縮応力は $\varphi=50^\circ$ 近傍に生じる。

終わりに、本研究を遂行するにあたり有益な助言と励ましを与えられた 東京工業大学 中原一郎教授ならびに埼玉大学名誉教授 小玉正雄先生に深じんの謝意を表す。

文 献

- (1) 渥美, 機論, 30-209 (昭 39), 111, 122.
- (2) 渥美, 機論, 31-221 (昭 40), 16.
- (3) 渥美・吉田, 機論, 32-233 (昭 41), 39; 機講論, No. 147 (昭 41-4), 37.
- (4) 渥美・伊藤, 機論, 44-379 (昭 53), 825.
- (5) Atsumi, A. and Itou, S., *Trans. ASME, Ser. E*, 43-3 (1976), 431.
- (6) Warren, W.E. and Weese, J.A., *Trans. ASME, Ser. E*, 34-1 (1967), 146; 34-4 (1967), 975.
- (7) Edwards, R.H., *J. Appl. Mech.*, 18-1 (1951), 19.
- (8) Hussain, M. and Pu, S.L., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 37-2 (1970), 403.
- (9) Muki, R., *Proc. Fac. Eng. Dept. of Keio Univ.*, 6-20 (1953), 10.
- (10) Das, B. R., *Int. J. Eng. Sci.*, 6 (1968), 497; 7-7 (1969), 667; 9-5 (1971), 469.
- (11) Shail, R., *Mathematika*, 11 (1964), 102.
- (12) 土田・内山, 機論, 45-393 (昭 54), 455.
- (13) 幸岐, 機論, 22-123 (昭 31), 795.
- (14) Nicholson, J.W., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A 224 (1924), 50.
- (15) 中原, 応用弾性学, (昭 52), 172, 実教出版.
- (16) 土田・ほか3名 機講論, No. 790-12 (昭 54-10), 1.
- (17) 八重樫, 埼玉大学修士論文, (昭 54).
- (18) 土田・ほか3名, 機論, 46-404, A (昭 55), 412.

討 論

[質問] 菅野良弘 (大阪府立大学工学部)

数学的に見た問題の困難さから、採用された熱的境界条件も十分納得できるものであるが、もう少し一般的な厚板の上下面やへん平回転た円体面の一部において表面熱発生や熱放散のある第3種熱的境界条件の場合、式(5)に相当する温度関数は得られるか。その展望をお教え願いたい。へん平回転た円体座標と円柱座標間の各種特殊関数の変換の複雑さもさることながら本解析のポイントは式(5)の導出の可能性にあるように思われる。

[回答] ご指摘のとおり、式(5)ならびに式(14)の導出が重要な点である。

本解析では弾性体が厚板領域と空かを除く無限体の共通領域であることに注目しそれぞれに対する解を与え座標変換によって境界条件を満足させている。したがって空かのない厚板の上下面の一部において表面熱発生や熱放散のある場合の解が変数分離された円柱調和関数で表すことができれば式(5)に相当する温度関数は同様に求めることができる。だ円体面において熱放散や熱発生がある場合には難しいと思うが解析は可能と考えている。なお類似の形状である球かの場合について解析できるなら回転た円体状空かの場合もほぼ解析可能である。

[質問] 竹内洋一郎・谷川義信

(大阪府立大学工学部)

著者らのだ円体座標系に関する取扱いを、厚板の熱弾性問題に適用され、巧みに解析されている事に敬意を表す。

(1) 本解析法の基本となる加熱条件の設定は、式(3)で示されているとおり、厚板の直線縁の温度がステップ状に変化する場合(相対熱伝達率 $=\infty$)である。このような加熱条件のもとでは、定常状態に至るまでの過渡状態において最大熱応力の発生するケースが多いように思われる。そこで、(a) 直線縁上の温度境界条件として、相対熱伝達率が有限値をとる場合には、本報と同様の解析が可能か。(b) 現時点では困難な問題と思われるが、温度境界条件、式(3)、(4)のもとでの非定常問題への発展の可能性はどうか。

(2) き裂の問題について最後に述べておられるが、本問題の場合、 z 座標に関し対称な加熱条件〔式(3)〕、 z 座標に関し対称な位置にあるき裂面での断熱条件〔式(4)〕および文献(13)より、 $K_I=0$ は当然の結果だと思われる。そこで、(a) z に関し対称でない加熱条件(たとえば、厚板の一方だけを加熱した場合)の場合には、き裂先端での K_I , K_{II} 値に

興味ある結果が得られると思われる。そのような加熱条件のもとでの解析については、いかがか。(b) 回転だ円体空か、および(その極限状態としての)き裂に対する応力集中問題に着目するならば、へん平回転だ円体よりも(z 軸を回転軸とする)へん長回転だ円体空かを想定すれば、その場合の熱応力分布がより興味ある結果を導くと思われる。その場合本論文と同様の手法で解析が可能か。あるいは、本論文におけるへん平回転だ円体空かの回転軸を r 方向に一致させた場合の、三次元問題としての解析はいかがか。

〔回答〕 (1) (a) 本解析では弾性体が厚板領域と空かを除く無限体の共通領域であることに注目してそれぞれに対する解を与え座標変換によって境界条件を満足させている。したがって空かのない厚板に対し相対熱伝達率が有限値をとる場合の解が変数分離された円柱調和関数で表すことができれば本報と同様に解析できる。なお畑氏の論文(付1)をご参照頂ければ幸いである。

(b) ご指摘のとおり、非定常問題への発展は重要かつ興味深いものである。波動方程式や非定常熱伝導方程式を変数変換するかラプラス変換して得られるヘルムホルツの方程式に対し回転だ円体座標で変数分離解を求めると回転だ円体波動関数として径関数および角関数が得られる(付2)。しかしながらラプラスの方

程式の分離定数 λ の固有値が $\lambda=n(n+1)$ (n :整数)なのに対して、これらの関数の固有値 λ_{nm} は無数の関係式の根として導かれる。著者らはまだこれらの関数の性質に慣れていないことおよびこれらの関数の座標変換公式がないため現段階では困難と思うが解析は可能と考えている。なお衝撃の問題で回転だ円体空か、介在物を有する無限体の解(付3)(付4)が得られているので無限体については解析できると思う。

(2) (a) 本問題では $z=0$ 面に関して偶関数になる調和関数を用いたが奇関数となる関数も使用すればはん雑になるが解析できる。厚板の一面を加熱、他面を冷却する場合を含めご指摘の問題は興味ある問題なので是非解析したいと考えている。

(b) へん長回転だ円体座標による解析(付5)にしたがえば本論文と同様の手法で解析できる。へん平回転だ円体空かの回転軸を x あるいは y 軸に一致させた場合はいかなる負荷を与えても軸対称応力状態になることがない完全な非軸対称問題になる。この場合は大変難しい問題だが解析は可能と考えている。今後の研究の目標にしたいと考えている。

(付3) Piau, M., *Int. J. Eng. Sci.*, 17-2 (1979), 151.

(付4) Oien, M.A. and Pao, Y.H., *Trans. ASME, Ser. E*, 40-4 (1973), 1073.

(付5) 土田・ほか3名, 機論, 46-404, A (昭55), 412.

(付1) 畑, 機論, No. 820-1 (昭57-4), 65.

(付2) 野邑, 技術者のための特殊関数とその応用, (昭37), 日刊工業新聞社, 184; 森口・ほか2名, 数学公式Ⅲ (昭35), 249, 岩波書店.