

半球ピットを有する厚板の一軸引張り*

藤田輝昭^{**}, 土田栄一郎^{***}, 中原一郎^{****}
Teruaki FUJITA, Eiichiro TSUCHIDA, Ichiro NAKAHARA

Key Words: Elasticity, Strength of Materials, Thick Plate, Hemispherical Pit

1. 緒言

材料表面に存在する欠陥による応力集中の問題は強度設計上重要であり、表面に半球ピットを有する半無限体については1954年 Eubanks が二軸一様引張荷重を受ける場合を解いたのが最初である⁽¹⁾。その後1974年には齊藤・中原⁽²⁾により半球ピットを有する半無限体が一軸引張荷重を受ける場合、および土田・中原⁽³⁾により軸対称圧力を受ける半球ピットの問題が解かれた。その後、著者らは Eubanks ならびに齊藤・中原により求められた応力集中係数の値がともに若干大きすぎることを指摘した⁽⁴⁾。つづいて、半球ピットを有する厚板が二軸一様引張荷重や周辺曲げを受ける軸対称問題を解き、板厚が応力集中係数に及ぼす影響を明らかにし⁽⁵⁾⁽⁶⁾、また、半回転円筒状ピットを有する半無限体が一軸引張荷重を受ける問題を解くことにより、ピット底の曲率の変化が応力集中係数に及ぼす影響を明らかにした⁽⁷⁾⁽⁸⁾。以上の論文は、齊藤・中原⁽²⁾の報告を除き、すべて軸対称問題を取扱っている。

本研究は、半球ピットを有する厚板が軸対称荷重を受ける問題を更に発展させ、より一般的な荷重を受け

る場合、すなわち半球ピットを有する厚板が一軸引張荷重を受ける非軸対称問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析したものである。

解析においては、ピットの存在する上面ならびに無限遠方の境界条件を満足する13組の応力関数を与えた後、下面でも応力自由となる解を導き、さらに半区間展開の方法を用いてピット面の境界条件を満足させた。理論解に基づいて、ピット半径と板厚との比を変えてピット近傍の応力を計算し、応力分布に及ぼす板厚の影響を明らかにした。

2. 応力関数と境界条件

図1に示すように板厚を1とし、これを基準としてすべての長さを表すものとする。そしてピットの中心Oを座標原点として円柱座標 (r, θ, z) および球座標 (R, θ, φ) を採用すれば、厚板上下面は $z=0, 1$ 、ピット面は $R=a$ で表される。

直角座標 (x, y, z) のもとで、Boussinesqの調和応力関数 $\varphi_0, \varphi_3, \lambda_3$ (第1, 第3, 第2基本解)を用いて変位を次式のように表せば、これらは物体力のない場合の三次元弾性基礎方程式の解となる⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + 2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} \\ 2Gu_y &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - 2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \\ 2Gw_z &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここで u_x, v_y, w_z は x, y, z 方向の変位成分を表し、

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi_0 &= \nabla^2 \varphi_3 = \nabla^2 \lambda_3 = 0 \\ \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\}$$

ν : ポアソン比, G : 横弾性係数である。

さてOを座標原点とし応力関数 φ_0, φ_3 に次の調和関数を与える。

$$[I] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{p}{4} \frac{1-\nu}{1+\nu} (x^2 + y^2 - 2z^2) + \frac{p}{4} (x^2 - y^2) \\ \varphi_3 &= -\frac{pz}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

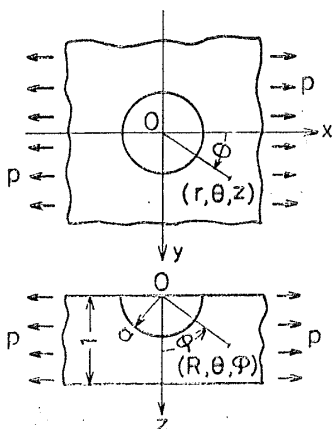


図1 座標系

* 昭和56年4月2日 第58期通常総会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和55年10月8日。

** 正員, 防衛大学校 (〒239 横須賀市港水 1-10-20)。

*** 正員, 埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255)。

**** 正員, 東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

式(2)より変位ならびに応力成分を求めると次のようになる.

$$u_x = \frac{p}{E}x, \quad v_y = -\nu \frac{py}{E}, \quad w_z = -\nu \frac{pz}{E}, \quad \sigma_x = p, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \dots\dots(3)$$

これは厚板を無限遠方において単位面積当たり p の力で x 軸方向に一様に引張った場合の解である. ただし E は縦弾性係数である. 従ってこの解は厚板両面で応力自由であるが, 原点 O を中心とする半径 a のピット面を考えれば, この面には次のような応力が生じている.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R=a} &= \frac{1}{3} \{P_0(\mu) - P_2(\mu)\} + \frac{P_2^2(\mu)}{6} \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R=a} &= \frac{P_2'(\mu)}{6} \sin \varphi - \frac{P_2^{2'}(\mu)}{12} \sin \varphi \cos 2\theta, \quad \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R=a} = -\frac{P_2^2(\mu)}{6 \sin \varphi} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

ここで $P_m(\mu)$, $P_m^n(\mu)$ はそれぞれ m 次のルジャンドル関数およびルジャンドル陪関数を表し, $P_m'(\mu)$, $P_m^{n'}(\mu)$ はそれらを μ で微分したものであり, $\mu = \cos \varphi$ である.

そこで無限遠方ですべての応力が消失し, かつ以下に示すような境界条件を満足する解を導いて応力関数 [I] の解に重ね合わせれば, 半球ピットを有する厚板が一軸引張荷重を受ける場合の解が得られる.

(i) 厚板上面 $z=0$ において

$$(\sigma_z)_{z=0} = (\tau_{rz})_{z=0} = (\tau_{z\theta})_{z=0} = 0 \quad \dots\dots(5)$$

(ii) 厚板下面 $z=1$ において

$$(\sigma_z)_{z=1} = (\tau_{rz})_{z=1} = (\tau_{z\theta})_{z=1} = 0 \quad \dots\dots(6)$$

(iii) ピット面 $R=a$ において

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R=a} &= -\frac{1}{3} \{P_0(\mu) - P_2(\mu)\} - \frac{P_2^2(\mu)}{6} \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R=a} &= -\frac{P_2'(\mu)}{6} \sin \varphi + \frac{P_2^{2'}(\mu)}{12} \sin \varphi \cos 2\theta, \quad \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R=a} = \frac{P_2^2(\mu)}{6 \sin \varphi} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

これらの境界条件式(5)~(7)は θ に無関係な境界条件と θ に関係する境界条件に分けられ, それぞれに対する解を軸対称解および非軸対称解とし, それらを別々に求めて重ね合わせれば境界条件式(5)~(7)を満足させることができる.

3. 軸 対 称 解⁽⁵⁾

軸対称解として応力関数 φ_0, φ_3 に次のような調和関数を与える.

$$[II] \quad \varphi_0 = -2(1-\nu)p \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{P_{2m}(\mu)}{R^{2m+1}}, \quad \varphi_3 = p \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) A_m \frac{P_{2m+1}(\mu)}{R^{2+2m}} \quad \dots\dots(8)$$

$$[III] \quad \varphi_0 = -(1-2\nu)p \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{P_{2m+1}(\mu)}{R^{2m+2}}, \quad \varphi_3 = p \sum_{m=0}^{\infty} (2m+2) B_m \frac{P_{2m+2}(\mu)}{R^{2m+3}} \quad \dots\dots(9)$$

$$[IV] \quad \varphi_0 = 2(1-\nu)p \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) \cosh \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda, \quad \varphi_3 = p \int_0^{\infty} \lambda \phi_1(\lambda) \sinh \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda \quad \dots\dots(10)$$

$$[V] \quad \varphi_0 = (1-2\nu)p \int_0^{\infty} \phi_2(\lambda) \sinh \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda, \quad \varphi_3 = p \int_0^{\infty} \lambda \phi_2(\lambda) \cosh \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda \quad \dots\dots(11)$$

ここで $J_n(\lambda r)$ は n 次の第1種ベッセル関数であり, A_m, B_m および $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$ はそれぞれ境界条件により決まる未知係数ならびに未知関数である. これらの応力関数は無限遠方で応力が消失し, 厚板上面では応力自由である. この軸対称解に対する A_m, B_m の値は既報⁽⁵⁾で示された A_n, B_n の値の $1/2$ に等しい.

4. 非 軸 対 称 解

非軸対称解に対する応力関数は境界面における応力が $\cos 2\theta$ あるいは $\sin 2\theta$ に比例して分布することに注目して次の8組の調和関数を選ぶ.

$$[VI] \quad \varphi_0 = 4(1-\nu) p C_0 \frac{P_0^2(\mu)}{R} \cos 2\theta, \quad \varphi_3 = -6 p C_0 \frac{P_1^2(\mu)}{R^2} \cos 2\theta, \quad \lambda_3 = 2 p C_0 \frac{P_0^2(\mu)}{R} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$[VII] \quad \varphi_0 = -2(1-\nu) p \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{P_{2m}^2(\mu)}{R^{2m+1}} \cos 2\theta, \quad \varphi_3 = p \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) C_m \frac{P_{2m+1}^2(\mu)}{R^{2m+2}} \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$[VIII] \quad \varphi_0 = 6(1-2\nu) p D_0 \frac{P_1^2(\mu)}{R^2} \cos 2\theta, \quad \varphi_3 = p D_0 \frac{P_0^2(\mu)}{R} \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$[IX] \quad \varphi_0 = -(1-2\nu) p \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{P_{2m+1}^2(\mu)}{R^{2m+2}} \cos 2\theta, \quad \varphi_3 = p \sum_{m=1}^{\infty} 2m D_m \frac{P_{2m+2}^2(\mu)}{R^{2m+3}} \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$[X] \quad \lambda_3 = p \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{R_{2m}^2(\mu)}{R^{2m+1}} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$[XI] \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 2(1-\nu) p \int_0^{\infty} \phi_3(\lambda) J_2(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda \cos 2\theta \\ \varphi_3 = p \int_0^{\infty} \lambda \phi_3(\lambda) J_2(\lambda r) \sinh \lambda z d\lambda \cos 2\theta \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$[XII] \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = (1-2\nu) p \int_0^{\infty} \phi_4(\lambda) J_2(\lambda r) \sinh \lambda z d\lambda \cos 2\theta \\ \varphi_3 = p \int_0^{\infty} \lambda \phi_4(\lambda) J_2(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda \cos 2\theta \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$[XIII] \quad \lambda_3 = p \int_0^{\infty} \phi_5(\lambda) J_2(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで C_m, D_m, E_m および $\phi_3(\lambda), \phi_4(\lambda), \phi_5(\lambda)$ は境界条件により決まる未知係数と未知関数であり, $m < n$ における陪関数は Hobson⁽¹⁰⁾により定義されて

$$P_m^n(\mu) = \frac{1}{(\mu^2-1)^{n/2}} \int_1^{\mu} \int_1^{\mu} \dots \int_1^{\mu} P_m(\mu) d\mu d\mu \dots d\mu \quad \dots\dots\dots (20)$$

であり, この定義に従えば

$$P_0^2(\mu) = \frac{\mu-1}{2(\mu+1)}, \quad P_1^2(\mu) = \frac{\mu^2+\mu-2}{6(\mu+1)} \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる. 応力関数 [VI]~[XIII] から導かれる解は無遠方で応力が消失し, かつ厚板上面で応力自由であり, 従って境界条件式 (5) を満足している.

次に厚板下面の境界条件を満足させるために, 球座標で表された応力関数 [VI]~[X] を次の数学公式

$$\frac{P_m^n(\mu)}{R^{m+1}} = \frac{1}{(m-n)!} \int_0^{\infty} \lambda^m J_n(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (z > 0) \quad \dots\dots\dots (22)$$

を用いて円柱座標に直すと

$$[VI]^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = -2(1-\nu) p C_0 \int_0^{\infty} J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \cos 2\theta, \quad \varphi_3 = p C_0 \int_0^{\infty} \lambda J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \cos 2\theta \\ \lambda_3 = -p C_0 \int_0^{\infty} J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \sin 2\theta \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$[VII]^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = -2(1-\nu) p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{(2m-2)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m} J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \cos 2\theta \\ \varphi_3 = p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{(2m-2)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m+1} J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \cos 2\theta \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$[VIII]^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = -(1-2\nu) p D_0 \int_0^{\infty} \lambda J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \cos 2\theta \\ \varphi_3 = p D_0 \int_0^{\infty} \lambda^2 J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \cos 2\theta \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$[IX]^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = -(1-2\nu) p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m+1} J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \cos 2\theta \\ \varphi_3 = p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m+2} J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \cos 2\theta \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$[X]^* \lambda_3 = p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{(2m-2)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2m} J_2(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \sin 2\theta \dots\dots\dots(27)$$

[VI]*~[X]* および [XI]~[XIII] より応力成分を求めて厚板下面の境界条件式(6)を満足させると次のようになる。

$$\left(\frac{\sigma_z}{p}\right)_{z=1} = \int_0^{\infty} \left[\left\{ C_0 \lambda + D_0 \lambda (1 + \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{(2m-2)!} \lambda^{2m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{(2m-1)!} (1 + \lambda) \lambda^{2m+1} \right\} e^{-\lambda} \right. \\ \left. + \phi_3(\lambda) \lambda \sinh \lambda - \phi_4(\lambda) (\sinh \lambda - \lambda \cosh \lambda) \right] \lambda^2 J_2(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots(28)$$

$$\left(\frac{\tau_{rz}}{p}\right)_{z=1} = \int_0^{\infty} \left[\left\{ C_0 (1 - \lambda) - D_0 \lambda^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{(2m-2)!} (1 - \lambda) \lambda^{2m} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{(2m-1)!} \lambda^{2m+2} \right\} e^{-\lambda} \right. \\ \left. + \phi_3(\lambda) (\sinh \lambda + \lambda \cosh \lambda) + \phi_4(\lambda) \lambda \sinh \lambda \right] \lambda^2 J_2'(\lambda r) d\lambda \\ + \int_0^{\infty} \left[\left\{ C_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{(2m-2)!} \lambda^{2m} \right\} e^{-\lambda} + \phi_5(\lambda) \sinh \lambda \right] \frac{2\lambda}{r} J_2(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots(29)$$

$$\left(\frac{\tau_{\theta z}}{p}\right)_{z=1} = - \int_0^{\infty} \left[\left\{ C_0 (1 - \lambda) - D_0 \lambda^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{(2m-2)!} (1 - \lambda) \lambda^{2m} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{(2m-1)!} \lambda^{2m+2} \right\} e^{-\lambda} \right. \\ \left. + \phi_3(\lambda) (\sinh \lambda + \lambda \cosh \lambda) + \phi_4(\lambda) \lambda \sinh \lambda \right] \frac{2\lambda}{r} J_2(\lambda r) d\lambda \\ - \int_0^{\infty} \left[\left\{ C_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{(2m-2)!} \lambda^{2m} \right\} e^{-\lambda} + \phi_5(\lambda) \sinh \lambda \right] \lambda^2 J_2'(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots(30)$$

式(28)で $J_2(\lambda r)$, 式(29)で $J_2'(\lambda r)$, $2J_2(\lambda r)/r$, 式(30)で $2J_2(\lambda r)/r$, $J_2'(\lambda r)$ の係数を零に等置すると五つの式が得られるが, 式(29), (30)から得られる関係は全く同一になり, 結局三つの式から $\phi_3(\lambda) \sim \phi_5(\lambda)$ は以下のように求まる。

$$\phi_3(\lambda) = - \frac{1}{\sinh^2 \lambda - \lambda^2} \left[C_0 (\lambda^2 - \lambda + e^{-\lambda} \sinh \lambda) + D_0 \lambda^3 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{(2m-2)!} \lambda^{2m} \right. \\ \left. \times (\lambda^2 - \lambda + e^{-\lambda} \sinh \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{(2m-1)!} \lambda^{2m+3} \right] \dots\dots\dots(31)$$

$$\phi_4(\lambda) = \frac{1}{\sinh^2 \lambda - \lambda^2} \left[C_0 \lambda^2 + D_0 \lambda (\lambda^2 + \lambda + \lambda^{-\lambda} \sinh \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{(2m-2)!} \lambda^{2m+2} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{(2m-1)!} \lambda^{2m+1} (\lambda^2 + \lambda + e^{-\lambda} \sinh \lambda) \right] \dots\dots\dots(32)$$

$$\phi_5(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{\sinh \lambda} \left[-C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{(2m-2)!} \lambda^{2m} \right] \dots\dots\dots(33)$$

次にピット面の境界条件を満足させるために以下の公式

$$J_\nu(\lambda r) \cosh \lambda z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu+2n} R^{\nu+2n}}{(2\nu+2n)!} P_{\nu+2n}^\nu(\mu) \dots\dots\dots(34)$$

$$J_\nu(\lambda r) \sinh \lambda z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu+2n+1} R^{\nu+2n+1}}{(2\nu+2n+1)!} P_{\nu+2n+1}^\nu(\mu) \dots\dots\dots(35)$$

を用いて応力関数 [XI]~[XIII] を書き直す。

$$[XI]^* \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= 2(1-\nu) p \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n R^{2n+2} P_{2n+2}^2(\mu) \cos 2\theta \\ \varphi_3 &= p \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \xi_n R^{2n+1} P_{2n+1}^2(\mu) \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

$$[XII]^* \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= (1-2\nu) p \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n R^{2n+1} P_{2n+1}^2(\mu) \cos 2\theta \\ \varphi_3 &= p \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \eta_n R^{2n} P_{2n}^2(\mu) \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

$$[XIII]^* \lambda_3 = p \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n R^{2n} P_{2n}^2(\mu) \sin 2\theta \dots\dots\dots(38)$$

ここで

$$\xi_n = \int_0^\infty \frac{\phi_3(\lambda)}{(2n+4)!} \lambda^{2n+2} d\lambda, \quad \eta_n = \int_0^\infty \frac{\phi_4(\lambda)}{(2n+3)!} \lambda^{2n+1} d\lambda, \quad \zeta_n = \int_0^\infty \frac{\phi_5(\lambda)}{(2n+2)!} \lambda^{2n} d\lambda \quad \dots\dots\dots(39)$$

である。これらの積分は Howland の積分およびツェータ関数で整理することができる⁽¹¹⁾。

応力関数 [VI]~[X] および [XI]*~[XIII]* より応力成分を求め、以下の展開式を用い奇数次のルジャンドル陪関数を偶数次のルジャンドル陪関数で展開する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-\mu}{1+\mu} &= \sum_{n=1}^\infty \alpha_n P_{2n}^2(\mu), & \frac{2-\mu-\mu^2}{1+\mu} &= \sum_{n=1}^\infty \beta_n P_{2n}^2(\mu) \\ P_{2k+1}^m(\mu) &= \sum_{n \leq m/2}^\infty {}^m \omega_k^{(n)} P_{2n}^m(\mu), & P_{2k+1}^{m'}(\mu) &= \sum_{n \leq m'/2}^\infty {}^m \omega_k^{(n)} P_{2n}^{m'}(\mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

ただし $\alpha_n = \frac{2(4n+1)P_{2n}^2(0)}{(2n+2)(2n+1)^2(2n)^2(2n-1)}, \quad \beta_n = \frac{3(4n+1)P_{2n}^2(0)}{(2n+2)^2(2n+1)2n(2n-1)^2}$

$${}^m \omega_k^{(n)} = \frac{(2n-m)!(4n+1)\{P_{2k+1}^{m'}(0)P_{2n}^{m'}(0) - P_{2n}^m(0)P_{2k+1}^{m'}(0)\}}{(2n+m)!(2n-2k-1)(2n+2k+2)}$$

および、次の関係

$$1-\mu^2 = \frac{1}{3} P_2^2(\mu), \quad \mu(1-\mu^2) = \frac{1}{15} P_3^2(\mu) = \frac{1}{15} \sum_{n=1}^\infty {}^2 \omega_1^{(n)} P_{2n}^2(\mu) \quad \dots\dots\dots(41)$$

を用いる。ただし $n \leq m/2$ は m が偶数か奇数かに従って $m/2$ または $(m-1)/2$ を示す記号である。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{p \cos 2\theta} \right)_{R=a} &= \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{C_n}{a^3} \left\{ 6(1-2\nu)\alpha_n + (10-2\nu) \frac{\delta_1^{(n)}}{3} \right\} + \frac{C_n}{a^{2n+3}} (2n+2) \right. \\ &\times \left\{ \frac{(2n-1)(2n+3)(2n+5-4\nu)}{4n+3} - 2(1-\nu)(2n+1) \right\} + \frac{C_{n-1}}{a^{2n+1}} \frac{(2n-3)(2n-2)}{4n-1} \\ &\times \{ 2n(2n+3) - 2\nu \} + \frac{D_0}{a^4} \left\{ 6(1-2\nu)\beta_n + (18-2\nu) \frac{{}^2 \omega_1^{(n)}}{5} \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \frac{D_k}{a^{2k+4}} \left[(2k+3) \left\{ \frac{2k(2k+4)(2k+6-4\nu)}{4k+5} - (1-2\nu)(2k+2) \right\} {}^2 \omega_k^{(n)} \right. \\ &+ \frac{2k(2k+1)}{4k+5} \{ (2k+3)(2k+6) - 2\nu \} {}^2 \omega_{k+1}^{(n)} \left. \right] + \frac{E_n}{a^{2n+3}} \{ -4(2n+2) \} + 4(1-\nu)\xi_0 \delta_1^{(n)} \\ &+ \xi_n a^{2n} \frac{(2n+3)(2n+4)}{4n+3} \{ (2n-2)(2n+1) - 2\nu \} + \xi_{n-1} a^{2n-2} (2n-1) \\ &\times \left\{ \frac{(2n-2)(2n+2)}{4n-1} (2n-4+4\nu) + 2(1-\nu) 2n(1-\delta_1^{(n)}) \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \eta_{k+1} a^{2k+1} (2k+4) \frac{(2k+5)}{4k+5} \{ (2k-1)(2k+2) - 2\nu \} {}^2 \omega_k^{(n)} + \sum_{k=1}^\infty \eta_k a^{2k-1} - 2k \\ &\times \left\{ \frac{(2k-1)(2k+3)}{4k+1} (2k-3+4\nu) + (1-2\nu)(2k+1) \right\} {}^2 \omega_k^{(n)} \\ &+ \zeta_n a^{2n-2} (2n-1) \left. \right] P_{2n}^2(\mu) = -\frac{1}{6} P_3^2(\mu) \quad \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p \cos 2\theta \sin \varphi} \right)_{R=a} &= \sum_{n=1}^\infty T_n P_{2n}^2(\mu) + \sum_{n=1}^\infty \left[-\frac{C_0}{a^3} 3(1-2\nu)\beta_n + \sum_{k=1}^\infty \frac{C_k}{a^{2k+3}} \right. \\ &\times \{ -2(1-\nu)(2k-1)(2k+3) \} {}^2 \omega_k^{(n)} + \frac{D_0}{a^4} \{ -8(1-\nu)\delta_1^{(n)} \} \\ &+ \frac{D_{n-1}}{a^{2n+2}} \{ -2(1-\nu)(2n-2)(2n+2) \} + \sum_{k=1}^\infty \frac{E_k}{a^{2k+3}} \left\{ -\frac{1}{2}(2k-1)(2k+2)(2k+3) \right\} {}^2 \omega_k^{(n)} \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \xi_k a^{2k} 2(1-\nu) 2k(2k+4) {}^2 \omega_k^{(n)} + \eta_n a^{2n-1} 2(1-\nu)(2n-1)(2n+3) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty \zeta_{k+1} a^{2k} k(2k+1)(2k+4) {}^2 \omega_k^{(n)} \left. \right] P_{2n}^2(\mu) = \frac{1}{12} P_{2n}^2(\mu) \quad \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{R\theta} \sin \varphi}{p \sin 2\theta} \right)_{R=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n P_{2n}^2(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{C_0}{a^3} \left\{ 3(1-2\nu)\alpha_n + \left(\frac{5}{2} - 2\nu \right) \frac{\delta_1^{(n)}}{3} \right\} \right. \\
 &+ \frac{C_n}{a^{2n+3}} \left\{ -2(1-\nu)(2n+2) + \frac{(2n-1)(2n+3)(2n+4-2\nu)}{4n+3} \right\} + \frac{C_{n-1}}{a^{2n+3}} \\
 &\times \frac{(2n-3)(2n-2)(2n+2-2\nu)}{4n-1} + \frac{D_n}{a^4} \left\{ -3(1-2\nu)\beta_n + (5-2\nu) \frac{\omega_1^{(n)}}{5} \right\} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{a^{2k+4}} \left[\left\{ -(1-2\nu)(2k+3) + \frac{2k(2k+4)(2k+5-2\nu)}{4k+5} \right\} \omega_k^{(n)} \right. \\
 &+ \left. \frac{2k(2k+1)(2k+5-2\nu)}{4k+5} \omega_{k+1}^{(n)} \right] + \frac{E_n}{a^{2n+3}} \frac{1}{2} \left\{ -(2n+1)(2n+3) - 4 \right. \\
 &+ \left. \frac{(2n-1)(2n+3)^2}{4n+3} \right\} + \frac{E_{n-1}}{a^{2n+1}} \frac{1}{2} \frac{(2n-3)(2n-2)(2n+1)}{4n-1} \\
 &- 2(1-\nu) \xi_0 \delta_1^{(n)} + \xi_n a^{2n} \left\{ -\frac{(2n+3)(2n+4)(2n-1+2\nu)}{4n+3} \right\} + \xi_{n-1} a^{2n-2} \\
 &\times \left\{ -\frac{(2n-2)(2n+2)(2n-3+2\nu)}{4n-1} - 2(1-\nu)(2n-1)(1-\delta_1^{(n)}) \right\} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k+1} a^{2k+1} \left\{ -\frac{2k+4}{4k+5} (2k+5)(2k+2\nu) \right\} \omega_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k a^{2k-1} \\
 &\times \left\{ -\frac{(2k-1)(2k+3)(2k-2+2\nu)}{4k+1} - (1-2\nu)2k \right\} \omega_k^{(n)} + \zeta_{n+1} a^{2n} \frac{1}{2} \frac{2n(2n+3)(2n+4)}{(4n+3)} \\
 &+ \zeta_n \frac{a^{2n-2}}{2} \left\{ -(2n-2)2n-4 + \frac{(2n-2)^2(2n+2)}{4n-1} \right\} \left. \right] P_{2n}^2(\mu) = \frac{1}{12} P_{2n}^2(\mu) \dots \dots \dots (44)
 \end{aligned}$$

式(42)~(44)において $P_{2n}^2(\mu)$ および $P_{2n}^3(\mu)$ の係数を等置すれば未定係数 C_n, D_n, E_n に関する無限連立一次方程式が得られる。これらを C_n, D_n, E_n について解けば非軸対称解は完全に決まる。そして全体の変位および応力は応力関数 [I]~[XIII] を重ね合わせて得られる。ただし $\delta_m^{(n)}$ はクロネッカーのデルタである。

5. 数値計算

ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、ピット半径 $a=0.2, 0.4, 0.6$ と変えて数値計算を行った。式(42)~(44)より導かれた未定係数 $C_n, D_n (n=0, 1, 2, \dots), E_n (n=1, 2, 3, \dots)$ に関する無限連立一次方程式を直接解いて得られる係数をそのまま応力計算に用いたところ収束が悪く、ピット面上の残余の応力 $\sigma_R/p, \tau_{R\varphi}/p$ および $\tau_{R\theta}/p$ の最大値は0.5以下にすることができなかった。そこで初めに解いた係数 C_n, D_n, E_n のうち C_n, D_n を式(43)の $\bar{P}_{2n}^2(\mu)$ の係数を等置した式に代入

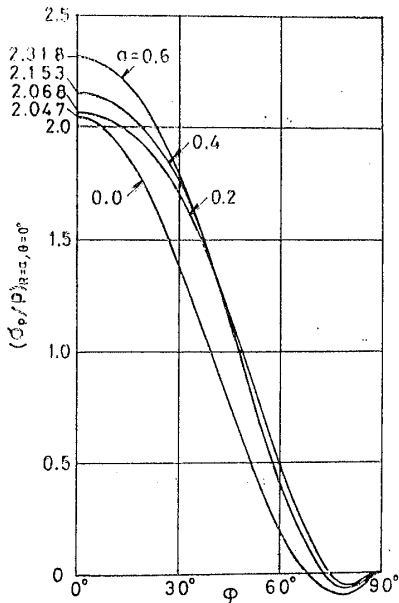


図2 ピット面上の σ_φ の分布 ($\theta=0^\circ$)

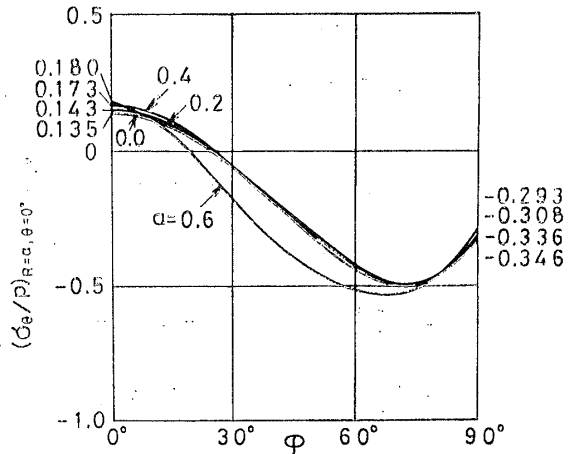


図3 ピット面上の σ_θ の分布 ($\theta=0^\circ$)

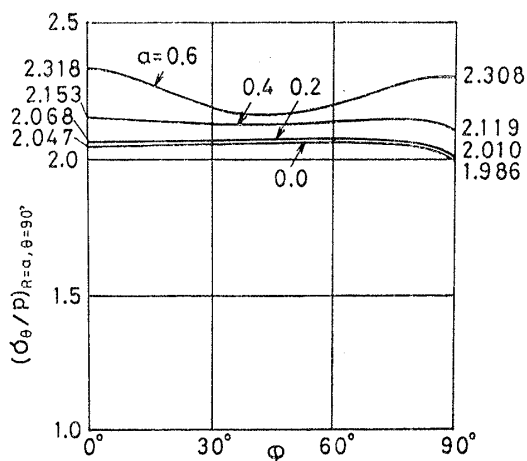


図4 ピット面上の σ_θ の分布 ($\theta=90^\circ$)

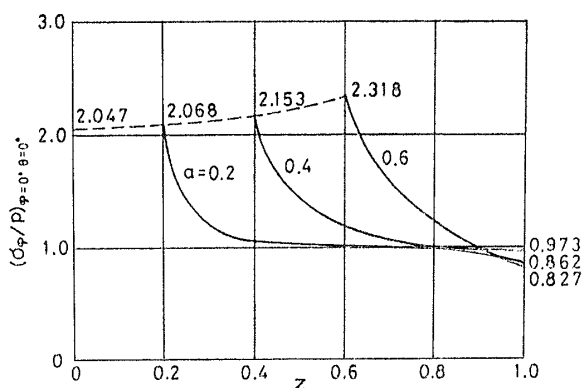


図5 z軸上の σ_ϕ の分布 ($\theta=0^\circ$)

し、 E_n を再計算した。そして初めの C_n, D_n と再計算で求めた E_n を用い残余の応力を計算したところ収束は良好となった。そこで残余の応力の値が0.002以下となるところで無限級数を打切ることとした。その結果ピット半径 $a=0.2, 0.4, 0.6$ に対し打切項数は $n=25, 25, 30$ となった。以下に、これらの係数を用いてピット近傍における主要な位置の応力分布を計算しグラフに示した。なお比較のためにすでに著者らが求めた $a=0.0$ すなわち半球ピットを有する半無限体が一軸引張荷重を受ける場合も上述の結果に付け加えた。

図2にピット面上の $\theta=0^\circ$ における応力 σ_ϕ と ϕ の関係を示した。すべてのピット半径に対し、 σ_ϕ はピット底 $\phi=0^\circ$ で最大引張応力となり、 ϕ の増加とともに減少し、ピット縁近くで圧縮応力になり、 $\phi=90^\circ$ で零となる。

図3にピット面上の $\theta=90^\circ$ における応力 σ_θ と ϕ の関係を示した。すべてのピット半径に対し、ピット底でわずかながら引張応力値をとり、 ϕ の増加とともに減少し圧縮応力に変わる。最大圧縮応力値は $\phi=80^\circ$ 近傍で生じる。

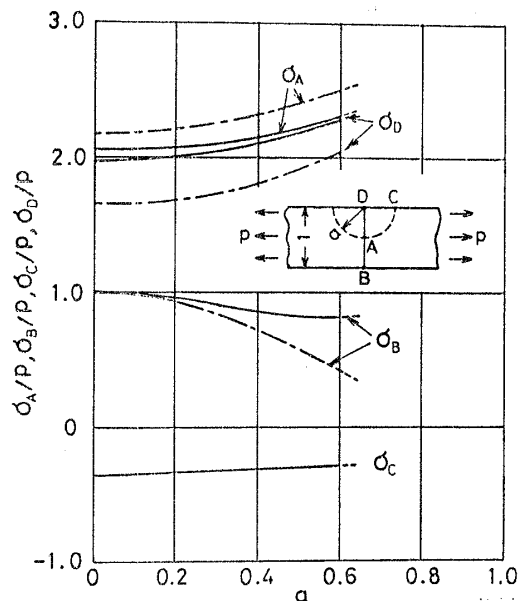


図6 ピット半径による応力集中係数の変化

図4にピット面上の $\theta=90^\circ$ における応力 σ_θ と ϕ の関係を示した。ピット半径 $a=0.0\sim 0.4$ では ϕ のほぼ全域にわたり一定値をとり、ピット縁でわずかながら減少している。 $a=0.6$ のときは ϕ の増加とともに減少し引張応力の極小値をとった後はピット縁に向かって増加してゆく。 $a=0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ に対しては最大引張応力値をとる角度と最大引張応力値は、 $\phi=65^\circ$ で $2.062p$ 、 $\phi=65^\circ$ で $2.080p$ 、 $\phi=75^\circ$ で $2.155p$ 、 $\phi=0^\circ$ で $2.318p$ となる。

図5はz軸上の $\theta=0^\circ$ における応力 σ_ϕ と z の関係を示したものである。いずれのピット半径に対しても、ピット底で最大引張応力値をとり、 z の増加とともに減少する。そして下面 $z=1$ では p より少し低い値となる。

以上の結果をまとめて主要な位置の応力集中係数の値を図6に示した。ただし

$$\sigma_A = (\sigma_\phi)_{R=a, \phi=0^\circ, \theta=0^\circ} = (\sigma_\theta)_{R=a, \phi=90^\circ, \theta=90^\circ}$$

$$\sigma_B = (\sigma_\phi)_{R=1, \phi=0^\circ, \theta=0^\circ}$$

$$\sigma_C = (\sigma_\theta)_{R=a, \phi=90^\circ, \theta=90^\circ}$$

$$\sigma_D = (\sigma_\theta)_{R=a, \phi=0^\circ, \theta=90^\circ}$$

である。ただし、一定のピット半径に対して、図6中に示された値が必ずしも最大応力集中係数になるとは限らない。これは図4で得られた結論より明らかである。なお比較のために、半球ピットを有する厚板が一軸一様引張荷重を受ける場合の結果⁽⁵⁾を図中に一点鎖線で示した。

6. 結 言

1個の半球ピットを有する厚板が一軸引張荷重を受

ける非軸対称問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析する方法を示し, 理論解に基づいてピット近傍における応力分布を求め, 半無限体の場合も含めて板厚が応力集中係数におよぼす影響を明らかにした。

そしてピット面上の $\theta=90^\circ$ における応力 σ_θ は, ピット半径 $a=0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ に対し, $\varphi=65^\circ$ で $2.062p$, $\varphi=65^\circ$ で $2.080p$, $\varphi=75^\circ$ で $2.155p$, $\varphi=0^\circ$ で $2.318p$ の最大引張応力値をとる。

討 論

〔質問〕 長谷川久夫 (明治大学工学部)

(1) 半球ピットによる厚板の応力集中問題の論文, 興味深く拝読させていただいた。本論文の結論として, 最大応力の生ずる点は板の厚さにかかわらず, ピット表面の点Aに存在するといっておよい。

(2) 無限連立一次方程式を解くにあたり, 2段階の操作を行わないと解の収束性の悪い原因についてお考えをお伺いしたい。なお, この2段階操作により, 得られた未定係数の値が式(42)と式(44)を厳密には満足しなくなる恐れはないか。また, $a=0.8$ の場合に対して数値計算なされなかった特別な理由があるのか。

〔回答〕 (1) 図6はピット近傍の主要な位置における応力集中係数を示したもので, かならずしも最大引張応力を示してはいない。最大応力は図4に示されるピット面の応力 σ_θ で, ピット半径 a が板厚に比べて小さいときはピット底に最大応力は生ぜずピット面上における φ のある値の位置に生じる。ただし, ピット底の応力と最大応力の差はわずかなので図6に示さなかったわけだが誤解を招いたことをおおびする。各々のピット半径 a に対して最大応力の生ずる位置 φ の値は結言の最後で述べている。

(2) 表面欠陥の問題で, 境界条件を満足させるためにルジャンドル関数の半区間展開を行うとき収束性の悪い解を得る場合がある。これはルジャンドル関数の半区間展開そのものが大変収束の悪い展開であることと, これを用いた係数方程式である連立一次方程式の行列要素に互いに近い値の要素が並び悪い条件の連

文 献

- (1) Eubanks, R. A., *J. Appl. Mech.*, 21-1 (1954), 57.
- (2) 齊藤・中原, 機論, 33-247 (昭42), 343.
- (3) 土田・中原, 機論, 33-249 (昭42), 696.
- (4) 藤田・ほか2名, 防衛大学校理工学研究報告, 13-4 (昭50), 599.
- (5) 藤田・ほか3名, 機論, 43-372 (昭52), 2845.
- (6) Fujita, T., ほか3名, *Proc. 25th Jpn Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1975), 715.
- (7) 藤田・ほか2名, 機論, 45-399, A (昭54), 1338.
- (8) 藤田・土田, 機論, 46-405, A (昭55), 525.
- (9) 土田・中原, 機論, 40-330 (昭49), 285.
- (10) Hobson, E. W., *Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, (1931), 133, Chelsea.
- (11) 土田・中原, 機論, 42-354 (昭51), 377.

立一次方程式になるためである。すでに半球ピットを有する半無限体が二軸一様引張荷重を受ける場合において100項用いても収束せず収束加速法により収束値を求めている(付1)(1)(4)。

また2段階の操作で得られた係数を用いて式(42), (44)をチェックしたところ有効数字7~11けたで原式を満足している。したがってこの操作を行っても厳密性は保たれている。

さらに, 半球ピットを有する厚板が二軸一様引張荷重を受ける軸対称問題(6)では項数を増しても境界条件の満足度が良くならず最適項数が存在するが, $a=0.7$ 以上の場合は収束性が特に悪いいためその適正項数を求めるまでには至らなかった。したがってこの数値結果を必要とする本問題では $a=0.7$ 以上の場合の数値計算は行わなかった。

〔質問〕 進藤裕英 (東北大学工学部)

式(42)~(43)から A_n, D_n, E_n を求める際, E_n を再計算しておられるが, この点についてもう少し詳しくご説明願いたい。例えば E_n の再計算に式(43)の $P_{2n}^0(\mu)$ の係数を等置した式を用いておられるが, 式(42)あるいは式(43)より導かれる式を用いても同様な結果が得られると考えて良いか。また無限連立一次方程式を直接解いた時, 収束の悪くなる原因についてどのようにお考えか, ご見解を述べていただきたい。

〔回答〕 長谷川氏への回答(2)を参照されたい。

(付1) 源美・伊藤, 機講論, No.761-1 (昭51-6), 13.