

へん長回転だ円体状空か面に軸対称圧力を受ける半無限体*

土田 栄一郎**, 斉藤 義之***
Eiichiro TSUCHIDA, Yoshiyuki SAITO
中原 一郎†, 小玉 正雄††
Ichiro NAKAHARA, Masao KODAMA

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Strength of Materials, Prolate Spheroidal Cavity, Internal Pressure

1. 緒 言

鋳物や溶接部にしばしばみられるブローホール、鋳鋼中に介在する砂粒などの欠陥が自由表面近傍に接近して存在すれば応力集中が生じ、そのために部材の破壊の原因となることはよく知られている。著者らはこれらの応力集中を明らかにするため、前報⁽¹⁾においてへん長回転だ円体状空かが半無限体内に存在し二軸一様引張荷重を受ける場合の応力集中現象を明らかにした。本報は同じ目的で、空か面に軸対称圧力が作用する場合について解析したものである。この問題は圧縮成形、射出成形などの型の強度にも関連し重要である。球か面に等分布圧力を受ける半無限体については Mitchell-Weese⁽²⁾が回転双極座標を用い、また土田・中原⁽³⁾は円柱座標と球座標を併用して解析している。しかしながら曲率の変化する回転だ円体状空かの場合はまだ解析されていないようである。

解析においては、Boussinesq の応力関数にへん長回転だ円体調和関数ならびに円柱調和関数を与え、両者を相互に変換することにより、半無限体平面と空か

面の境界条件を同時に満足させた。さらに数値計算を行って、空か近傍の応力分布および最大引張応力に及ぼす空かの大きさや形状比の影響を明らかにした。

2. 解 析 法

2.1 へん長回転だ円体状空か面に軸対称圧力を受ける半無限体

図1に示されるように、空か中心Oから半無限体表面までの距離を単位長さとしてすべての長さの基準にとり、へん長回転だ円体状空かの短軸、長軸の長さおよび焦点間距離をそれぞれ $2a, 2b, 2c$ とする。Oを座標原点として円柱座標 (r, θ, z) およびへん長回転だ円体座標 (α, β, γ) を採用すれば、両座標間には

$$r = c\bar{q}\bar{p}, \theta = \gamma, z = cq\bar{p} \dots\dots\dots (1)$$

の関係がある。ここで、

$$q = \cosh\alpha, \bar{q} = \sinh\alpha, p = \cos\beta, \bar{p} = \sin\beta$$

である。

いま、円柱座標のもとで Boussinesq の調和応力関数 φ_0, φ_3 を用いて変位を次のように表せば、これは物体力のないねじりなし軸対称の場合の三次元弾性基礎方程式の解になる。

$$2Gu_r = \frac{\partial\varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial\varphi_3}{\partial r}, \quad 2Gw_z = \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3 \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 u_r, w_z はそれぞれ r, z 方向の変位成分、 $\nabla^2\varphi_0 = \nabla^2\varphi_3 = 0$, $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (1/r)(\partial/\partial r) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ν はポアソン比、 G は横弾性係数である。

また、座標間の関係式(1)を用いて、式(2)をへん長回転だ円体座標に変換すれば次のようになる。

$$2Gu_\alpha = h\bar{q} \frac{\partial\varphi_0}{\partial q} + ch\bar{q}p \left\{ q \frac{\partial\varphi_3}{\partial q} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\}, \quad 2Gv_\beta = -h\bar{p} \frac{\partial\varphi_0}{\partial p} - chq\bar{p} \left\{ p \frac{\partial\varphi_3}{\partial p} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 u_α, v_β はそれぞれ α, β 方向の変位成分、

$$\nabla^2\varphi_0 = \nabla^2\varphi_3 = 0, \quad \nabla^2 \equiv h^2\bar{q}^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + 2h^2q \frac{\partial}{\partial q} + h^2\bar{p}^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2h^2p \frac{\partial}{\partial p}, \quad h^2 = \frac{1}{c^2(q^2 - p^2)}$$

* 昭和53年10月11日 第56期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和55年10月9日。
** 正員、埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255)。
*** 正員、防衛施設庁 (〒107 東京都港区赤坂 9-7)。
† 正員、東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。
†† 正員、(〒330 大宮市今羽町 477-9-101)。

である。

さて、へん長回転だ円体状空かを有する半無限体が空か面に軸対称圧力 $p_0 f(p)$ (p_0 は正の定数) を受ける場合、境界条件は以下ようになる。

境界条件：

(i) 半無限体表面 $z=-1$ において

$$(\sigma_z)_{z=-1} = (\tau_{rz})_{z=-1} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

(ii) 空か面 $\alpha=\alpha_0$ において

$$(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0} = -p_0 f(p), (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

(iii) 無限遠方においてすべての応力が零。

境界条件 (i)~(iii) を満足する解を導くために、弾性体領域が二つの単連結領域、すなわち空かを除く無限体領域と半無限体領域の共通領域であることに注目して、それぞれの領域に対し、だ円体の焦点に特異点をもつへん長回転だ円体調和関数ならびに円柱調和関数を用い、応力関数 φ_0, φ_3 を次のように表す。

$$[I] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m Q_m(q) P_m(p) \\ \varphi_3 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m Q_m(q) P_m(p) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$[II] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \int_0^{\infty} \psi_1(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \\ \varphi_3 = p_0 \int_0^{\infty} \lambda \psi_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 A_m, B_m および $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり、 $J_n(\lambda r)$ は n 次の第1種ベッセル関数、 $P_n(p), Q_n(q)$ はそれぞれ n 次の第1種および第2種のルジャンドル関数である。

応力関数 [I], [II] は (iii) の境界条件を満足するように選んだもので、残りの (i), (ii) の条件を満足させればよい。

まず、半無限体表面における境界条件を満足させるために、へん長回転だ円体調和関数と円柱調和関数の間に

$$\left. \begin{aligned} Q_n(q) P_n(p) &= c \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) i_n(\lambda c) d\lambda \quad (z > 0) \\ Q_n(q) P_n(p) &= (-1)^n c \int_0^{\infty} e^{\lambda z} J_0(\lambda r) i_n(\lambda c) d\lambda \quad (z < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

という関係⁽⁴⁾⁽⁵⁾があることに注目する。ここで、 $i_n(\lambda c)$ は複素変数に関する第1種球ベッセル関数であり、 n 次の第1種変形ベッセル関数と呼ぶことにする⁽⁶⁾。

$$i_n(\lambda c) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda c}} I_{n+1/2}(\lambda c) = i^{-n} j_n(i\lambda c)$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。

式 (8) を用いて式 (6) を書き直すと

$$[III] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c A_m \int_0^{\infty} e^{\lambda z} J_0(\lambda r) i_m(\lambda c) d\lambda \\ \varphi_3 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c B_m \int_0^{\infty} e^{\lambda z} J_0(\lambda r) i_m(\lambda c) d\lambda \quad (z < 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。応力関数 [II], [III] より得られる応力成分を重ね合わせ、平面境界の条件を満足させると次のようになる。

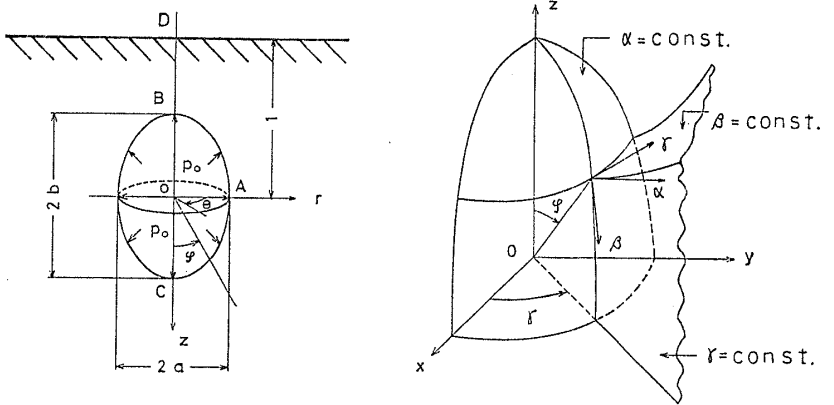


図1 座標系

$$\left(\frac{\sigma_z}{p_0}\right)_{z=-1} = \int_0^\infty \lambda^2 \left[\phi_1(\lambda) + (2-2\nu-\lambda)\phi_2(\lambda) + \sum_{m=0}^\infty (-1)^m c \left(A_m - \frac{2-2\nu+\lambda}{\lambda} B_m \right) i_m(\lambda c) e^{-2\lambda} \right] e^\lambda J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\left(\frac{\tau_{rz}}{p_0}\right)_{z=-1} = \int_0^\infty \lambda^2 \left[\phi_1(\lambda) + (1-2\nu-\lambda)\phi_2(\lambda) + \sum_{m=0}^\infty (-1)^m c \left(-A_m + \frac{1-2\nu+\lambda}{\lambda} B_m \right) i_m(\lambda c) e^{-2\lambda} \right] e^\lambda J_1(\lambda c) d\lambda = 0 \dots\dots\dots (11)$$

式 (10), (11) にそれぞれハンケルの逆変換を施し, 未知関数 $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ を求めると次のようになる.

$$\phi_1(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty \left[(3-4\nu-2\lambda)A_m - \frac{1}{\lambda} \{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2\} B_m \right] (-1)^m c i_m(\lambda c) e^{-2\lambda} \dots\dots\dots (12)$$

$$\phi_2(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty \left[-2A_m + \frac{1}{\lambda} (3-4\nu+2\lambda)B_m \right] (-1)^m c i_m(\lambda c) e^{-2\lambda} \dots\dots\dots (13)$$

式 (12), (13) の関係が成立すれば, 未定係数 A_m , B_m に無関係に半無限体の平面境界における条件式 (4) は満足される.

次に, 空か面の境界条件を満足させるために円柱調和関数とへん長回転円体調和関数の間に

$$e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (2n+1) i_n(\lambda c) P_n(q) P_n(p) \dots\dots\dots (14)$$

という関係⁽⁴⁾⁽⁵⁾があることに注目して, 応力関数 [II] をへん長回転円体座標に書き直す.

$$[IV] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{n=0}^\infty \alpha_n P_n(q) P_n(p) \\ \varphi_3 = p_0 \sum_{n=0}^\infty \beta_n P_n(q) P_n(p) \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$\alpha_n = \sum_{m=0}^\infty (-1)^{n+m} (2n+1) c \int_0^\infty \left[(3-4\nu-2\lambda)A_m - \frac{1}{\lambda} \{4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda^2\} B_m \right] e^{-2\lambda} i_n(\lambda c) i_m(\lambda c) d\lambda \dots\dots\dots (16)$$

$$\beta_n = \sum_{m=0}^\infty (-1)^{n+m} (2n+1) c \int_0^\infty [-2\lambda A_m + (3-4\nu+2\lambda)B_m] e^{-2\lambda} i_n(\lambda c) i_m(\lambda c) d\lambda \dots\dots\dots (17)$$

である.

そこで, 応力関数 [I], [IV] より応力成分を求め, さらに境界条件式 (5) をルジャンドル関数で書き直した後満足させると次のようになる.

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{p_0 c^2 h^4}\right)_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=0}^\infty (s_{A1} A_{n-2} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+2} + s_{B1} B_{n-3} + s_{B2} B_{n-1} + s_{B3} B_{n+1} + s_{B4} B_{n+3} + s_{\alpha 1} \alpha_{n-2} + s_{\alpha 2} \alpha_n + s_{\alpha 3} \alpha_{n+2} + s_{\beta 1} \beta_{n-3} + s_{\beta 2} \beta_{n-1} + s_{\beta 3} \beta_{n+1} + s_{\beta 4} \beta_{n+3}) P_n(p) = - \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n P_n(p) \dots\dots\dots (18)$$

$$\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0 c^2 h^4 q \bar{p}}\right)_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=1}^\infty (t_{A1} A_{n-2} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+2} + t_{B1} B_{n-3} + t_{B2} B_{n-1} + t_{B3} B_{n+1} + t_{B4} B_{n+3} + t_{\alpha 1} \alpha_{n-2} + t_{\alpha 2} \alpha_n + t_{\alpha 3} \alpha_{n+2} + t_{\beta 1} \beta_{n-3} + t_{\beta 2} \beta_{n-1} + t_{\beta 3} \beta_{n+1} + t_{\beta 4} \beta_{n+3}) P_n'(p) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} s_{A1} &= \frac{(n-1)n}{(2n-3)(2n-1)} \{-\bar{q}_0^2 Q_{n-2}''(q_0) - q_0 Q_{n-2}'(q_0) + (n-2)Q_{n-2}(q_0)\} \\ s_{A2} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} [\{ -(2n^2+2n-1) + (2n-1)(2n+3)q_0^2 \} \bar{q}_0^2 Q_n''(q_0) \\ &\quad + 2(n^2+n-1)q_0 Q_n'(q_0) - n(n+1)Q_n(q_0)] \\ s_{A3} &= \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} \{-\bar{q}_0^2 Q_{n+2}''(q_0) - q_0 Q_{n+2}'(q_0) - (n+3)Q_{n+2}(q_0)\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 s_{B1} &= \frac{(n-2)(n-1)nc}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)} [-q_0\bar{q}_0^2 Q_{n-3}''(q_0) + \{2(1-\nu)\bar{q}_0^2 - q_0^2\} \\
 &\quad \times Q_{n-3}'(q_0) + (1-2\nu)(n-3)q_0 Q_{n-3}(q_0)] \\
 s_{B2} &= \frac{nc}{(2n-3)(2n-1)(2n+3)} [\{-3n^2 + 6 + (4n^2 - 9)q_0^2\} q_0\bar{q}_0^2 Q_{n-1}''(q_0) \\
 &\quad + \{2(1-\nu)\bar{q}_0^2(3n^2 - 6 - [4n^2 - 9]q_0^2) + (n^2 - 3)q_0^2\} Q_{n-1}'(q_0) \\
 &\quad + (n-1)\{2\nu(4n^2 - 9)q_0^2 + (1-2\nu)(n^2 - n - 3)\} q_0 Q_{n-1}(q_0)] \\
 s_{B3} &= \frac{(n+1)c}{(2n-1)(2n+3)(2n+5)} [\{(2n-1)(2n+5)q_0^2 - 3n^2 - 6n + 3\} q_0\bar{q}_0^2 \\
 &\quad \times Q_{n+1}''(q_0) + \{2(1-\nu)\bar{q}_0^2(3n^2 + 6n - 3 - [2n-1][2n+5]q_0^2) \\
 &\quad + (n^2 + 2n - 2)q_0^2\} Q_{n+1}'(q_0) + (n+2)\{-2\nu(2n-1)(2n+5)q_0^2 \\
 &\quad - (1-2\nu)(n^2 + 3n - 1)\} q_0 Q_{n+1}(q_0)] \\
 s_{B4} &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)c}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} [-q_0\bar{q}_0^2 Q_{n+3}''(q_0) + \{2(1-\nu)\bar{q}_0^2 \\
 &\quad - q_0^2\} Q_{n+3}'(q_0) - (1-2\nu)(n+4)q_0 Q_{n+3}(q_0)] \\
 t_{A1} &= \frac{(n-3)(n-1)}{(2n-3)(2n-1)} Q_{n-2}'(q_0) \\
 t_{A2} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} [\{2n^2 + 2n - 4 - (2n-1)(2n+3)q_0^2\} Q_n'(q_0) \\
 &\quad + (2n-1)(2n+3)q_0 Q_n(q_0)] \\
 t_{A3} &= \frac{(n+2)(n+4)}{(2n+3)(2n+5)} Q_{n+2}'(q_0) \\
 t_{B1} &= \frac{(n-2)(n-1)c}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)} \{(n-5+2\nu)q_0 Q_{n-3}'(q_0) - (1-2\nu)(n-3) \\
 &\quad \times Q_{n-3}(q_0)\} \\
 t_{B2} &= \frac{c}{(2n-3)(2n-1)(2n+3)} [\{(4n^2 - 9)(2-2\nu-n)q_0^3 \\
 &\quad + 3(n-1)(n^2 - 3)q_0 - 2(1-\nu)(n^2 + n - 3)q_0\} Q_{n-1}'(q_0) \\
 &\quad + (n-1)\{2(1-\nu)(4n^2 - 9)q_0^2 - 3(1-2\nu)(n^2 - 3)\} Q_{n-1}(q_0)] \\
 t_{B3} &= \frac{c}{(2n-1)(2n+3)(2n+5)} [\{-(2n-1)(2n+5)(n+3-2\nu)q_0^3 \\
 &\quad + 3(n+2)(n^2 + 2n - 2)q_0 + 2(1-\nu)(n^2 + n - 3)q_0\} Q_{n+1}'(q_0) \\
 &\quad + (n+2)\{2(1-\nu)(2n-1)(2n+5)q_0^2 - 3(1-2\nu)(n^2 + 2n \\
 &\quad - 2)\} Q_{n+1}(q_0)] \\
 t_{B4} &= \frac{(n+2)(n+3)c}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \{(n+6-2\nu)q_0 Q_{n+3}'(q_0) - (1-2\nu) \\
 &\quad \times (n+4)Q_{n+3}(q_0)\}
 \end{aligned}$$

.....(20)

.....(21)

であり、' はそれぞれの変数による微分を表す。また、 s_{Al} , s_{Bl} , t_{Al} , t_{Bl} ($l=1, 2, \dots$) はそれぞれ s_{Al} , s_{Bl} , t_{Al} , t_{Bl} に含まれる第2種ルジャンドル関数 $Q_n(q_0)$ を第1種ルジャンドル関数 $P_n(q_0)$ に置き換えたものになる。また ε_n は $f(p)/(c^2 h_0^4)$ を $P_n(p)$ で展開したときの展開係数である。式(18), (19)でそれぞれ $P_n(p)$, $P_n'(p)$ の各係数を等置すれば、 A_n , B_n に関する無限連立一次方程式が得られ、これを解けば、へん長回転だ円体状空か面に軸対称圧力を受ける半無限体の解は完全に決まる。そして、全体の変位および応

力の各成分は応力関数 [I], [II] を重ね合わせて得られる。

2.2 へん長回転だ円体状空か面に等分布圧力を受ける無限体 2.1節において、特に空かの大きさが非常に小さく一定内圧 p_0 を受ける場合、すなわち、へん長回転だ円体状空か面に等分布圧力を受ける無限体の問題に対しては応力関数 [I] のみで解析でき、式(6)で

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{c^2 q_0}{D} [2(1-2\nu)\{2\bar{q}_0^2 Q_1(q_0) - 1\} + 3q_0^2\{3\bar{q}_0^2 Q_1(q_0) - 1\}] \\ A_2 &= \frac{2(1-2\nu)}{D} c^2 q_0 \{2\bar{q}_0^2 Q_1(q_0) - 1\}, \quad B_1 = \frac{3c q_0}{D} \{3\bar{q}_0^2 Q_1(q_0) - 1\} \\ A_1 &= 0, \quad A_m = 0 \quad (m \geq 3), \quad B_0 = 0, \quad B_m = 0 \quad (m \geq 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

と置けば境界条件式(5)は満足される。ここで

$$D = 6 \left[(1+\nu)\bar{q}_0^2 \{Q_1(q_0)\}^2 + (3q_0^2 - 1 - 2\nu)Q_1(q_0) - \frac{q_0^2 - \nu}{\bar{q}_0^2} \right]$$

$$q_0 = \cosh \alpha_0, \quad \bar{q}_0 = \sinh \alpha_0, \quad Q_1(q_0) = \frac{q_0}{2} \ln \frac{q_0 + 1}{q_0 - 1} - 1$$

である。

式(22)の係数を用いて変位および応力を表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2Gu_\alpha}{p_0} &= h\bar{g} \left[-\frac{A_0}{\bar{q}^2} + \frac{1}{2}(3p^2 - 1) \left\{ 3Q_1(q) - \frac{1}{\bar{q}^2} \right\} A_2 - cp^2 \left\{ (2-4\nu)Q_1(q) + \frac{1}{\bar{q}^2} \right\} B_1 \right] \\ \frac{2Gv_\beta}{p_0} &= hp\bar{p} \left[-\frac{3}{2q} \{ (3q^2 - 1)Q_1(q) - 1 \} A_2 + (2-4\nu)cqQ_1(q)B_1 \right] \\ \frac{\sigma_\beta}{p_0} &= -c^2 h^4 q A_0 + \left[\frac{3}{2c^2 q} \{ (3q^2 - 1)Q_1(q) - 1 \} - \frac{3}{2} h^2 q \{ 3\bar{q}^2 Q_1(q) - 1 \} \right. \\ &\quad \left. - c^2 h^4 q \right] A_2 - \left[\frac{2}{cq} \{ ([1-2\nu]q^2 + \nu)Q_1(q) + \nu \} - ch^2 q \{ (1+2\nu) \right. \\ &\quad \left. + (2-4\nu)\bar{q}^2 Q_1(q) \} + c^3 h^4 q^3 \right] B_1 \\ \frac{\sigma_r}{p_0} &= -h^2 \frac{q}{\bar{q}^2} A_0 + \left[\frac{3}{2c^2 q} \left\{ Q_1(q) + \frac{1}{\bar{q}^2} \right\} - h^2 \frac{q}{\bar{q}^2} \right] A_2 \\ &\quad - \left[\frac{1}{cq} \left\{ 2\nu Q_1(q) - \frac{(1-2\nu)q^2 + 2\nu}{\bar{q}^2} \right\} + ch^2 q \left\{ \frac{q^2}{\bar{q}^2} - 2\nu \right\} \right] B_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

$\sigma_\alpha, \tau_{\alpha\beta}$ については省略する。

特に, $q_0=1$ すなわち針状き裂となった場合, き裂面で次の値をとる。

(1) $p = \pm 1$ では

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_\alpha &= \frac{c}{2(1-\nu)} p_0, \quad v_\beta = 0, \quad \sigma_\beta = \sigma_r = \frac{1}{1-\nu} p_0 \\ (\nu=0.3 \text{ のとき } \sigma_\beta = \sigma_r = 1.429 p_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

(2) $p \neq \pm 1$ では

$$u_\alpha = 0, \quad v_\beta = 0, \quad \sigma_\beta = 0, \quad \sigma_r = p_0 \dots\dots\dots(25)$$

3. 数 値 計 算

ポアソン比を $\nu=0.3$ とし, 圧力が一様な場合すなわち $f(p)=1$ の場合について数値計算を行った。この場合式(18)中の ε_n は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= c^2 \left(q_0^4 - \frac{2}{3} q_0^2 + \frac{1}{5} \right), \quad \varepsilon_2 = -c^2 \left(\frac{4}{3} q_0^2 - \frac{4}{7} \right) \\ \varepsilon_4 &= \frac{8}{35} c^2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_n = 0 \quad (n \geq 5) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

まず, 形状比 $s=a/b=0.5$ として $b=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の各場合について計算し, さらに形状比をいくつか変化させた場合についても数値計算を行った。計算にあたっては式(16), (17)の α_n, β_n に含まれる数値積分が必要となるが, これはシンプソン則による数値積分によって求めた。すべての無限級数の

収束は良好であるが, 空かが大きくなるとともに次第に悪くなる。そこで, 最終的に得られる応力値の有効数字が三けた以上になるように, A_n, B_n を 7~20 項で打ち切って連立一次方程式を解いた。

以下にこれらの係数より得られる空か近傍の応力分布を示す。

図2は形状比 $s=0.5$ の場合の空か面における σ_β の分布を示したものである。ここで、 φ は z 軸から測った角度で、空か面においては β と $\tan \varphi = (a/b) \tan \beta$ の関係がある。 σ_β は常に引張応力であり、 $\varphi=0^\circ, 180^\circ$ (図1の点C, B) で極大値をとる。また、極小値は $\varphi=90^\circ$ (点A) から点C方向にずれたところで生じ、空かが大きくなるほど点Cに近づく。 σ_β は $\varphi=0^\circ$ から 15° の範囲では空かの大きさにはほとんど影響されないが、 $\varphi=15^\circ$ を越えるとかなり影響を受け、 $\varphi=180^\circ$ で最大となる。図3は $s=0.5$ の場合の空か面における σ_r の分布を示したものである。

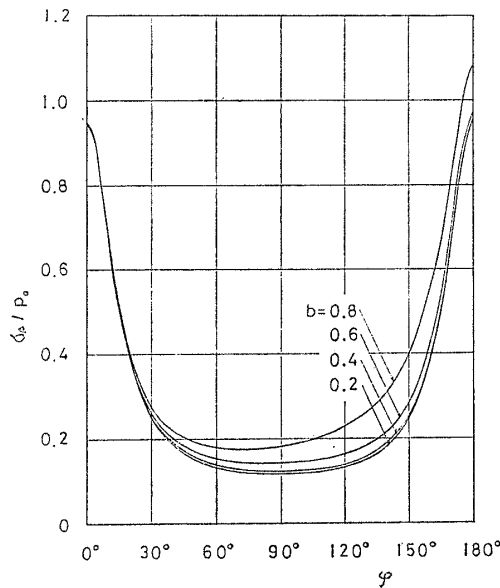


図2 空か面上の σ_β の分布 ($a/b=0.5$)

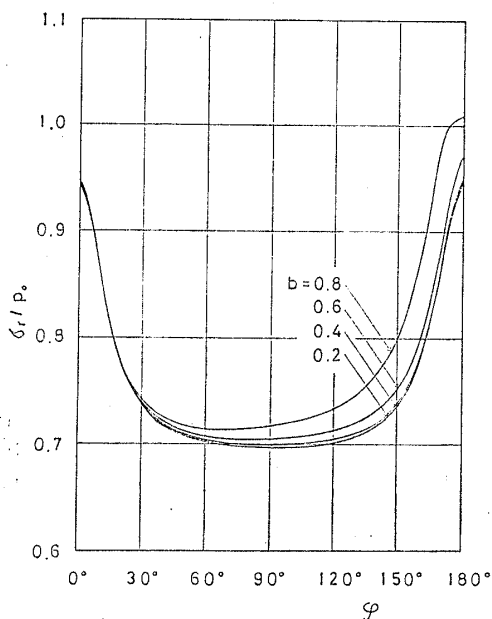


図3 空か面上の σ_r の分布 ($a/b=0.5$)

である。 σ_β と同様の傾向をとり、 $\varphi=180^\circ$ で最大引張応力となる。図4は $s=0.5$ の場合の z 軸上 ($z < 0$) の $(\sigma_\beta)_{r=0} = (\sigma_r)_{r=0}$ の分布を示したものである。空か面上で最大値をとり、半無限体平面向か方向につれ減少する。なお図中の点線は空か面における最大引張応力の変化を表している。図5, 6および図7, 8はそれぞれ $b=0.2$ および $b=0.8$ とし形状比 s を変化させた場合の空か面上の σ_β および σ_r の分布を示したものである。ここで $s=1.0$ は球かの場合であり、土田・中原の論文^{*1(3)}により再計算したものである。 $b=0.2$ のように空かが比較的小さい場合は空か面上 $\varphi=180^\circ$ (点B) あるいは $\varphi=0^\circ$ (点C) で引張応力の最大値をとる。これに対し、 $b=0.8$ の場合は、 σ_β は形状比 s が小さいときには点Bで最大引張応力を生じるが、 s が大きくなるにつれて $\varphi=90^\circ$ の点A方向にずれる。ずれの程度は形状が球に近づくほど著しい。 σ_r も σ_β と同様の傾向を示すが、最大引張応力

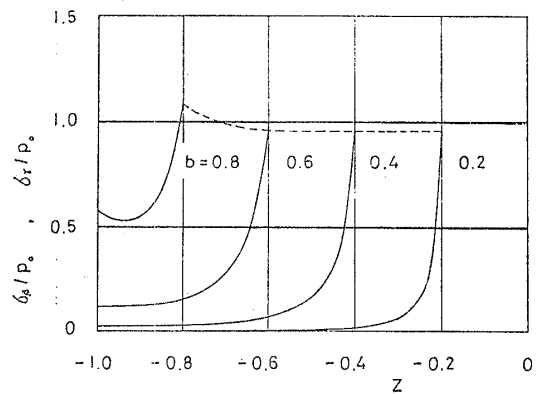


図4 z 軸上の σ_β, σ_r の分布 ($a/b=0.5$)

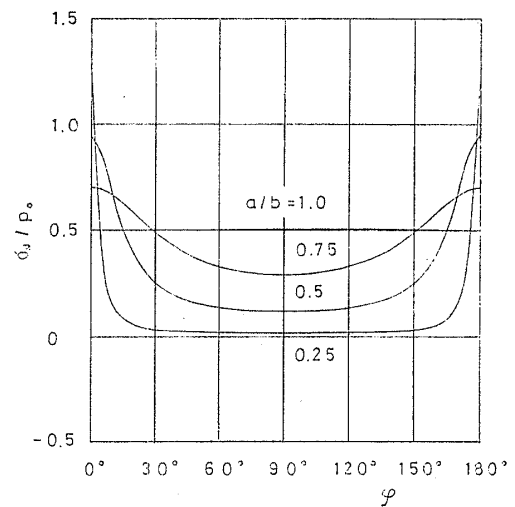


図5 空か面上の σ_β の分布 ($b=0.2$)

*1 文献(3)の式(25)の β_n の第1項めは $-2a^{31}\gamma_n$ の誤りであり、図2~9で a が小さい場合は同じであるが a が大きい場合の値は大きめとなる。

値は σ_β のそれと同等またはそれ以下である. 図9は $b=0.8$ の場合の $z < 0$ における z 軸上の $(\sigma_\beta)_{r=0} = (\sigma_\tau)_{r=0}$ の分布を示したものである. σ_β は s が 1.0 に近づくと空か面よりもむしろ平面境界上の点Dで最大値をとる.

以上の計算結果より, 最大引張応力は空か面上に生じる σ_β あるいは平面境界上の点Dで生じる $(\sigma_\beta)_{r=0} = (\sigma_\tau)_{r=0}$ であることが分かる.

そこで, 空か面上に生ずる最大引張応力を $(\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \max}$, また点Dにおける応力を $(\sigma_\beta)_{r=0, z=-1} = (\sigma_\tau)_{r=0, z=-1}$ とし, これらの値と形状比 s および空かの大きさ b との関係を求めたものが図10である. 最大引張応力の値は b が小さいときは $s=0$ すなわち針状き裂の場合が最も大きく, b が大きくなると $s=$

1.0 の球かの場合に最大値をとる. そして, 針状き裂の場合には無限体中に針状き裂が存在するときの応力値 $1.429 p_0$ に等しく, 全く自由境界の影響を受けない. これに対し, 平面境界の影響は s が大きくなるに

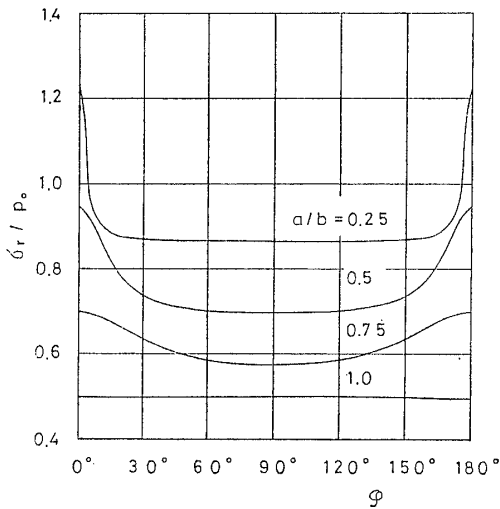


図6 空か面上の σ_τ の分布 ($b=0.2$)

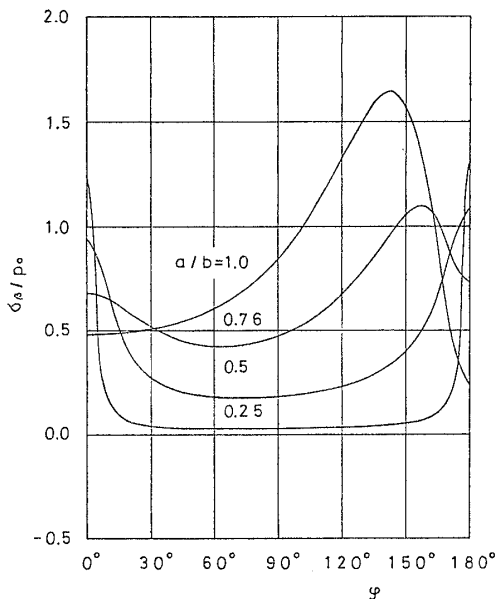


図7 空か面上の σ_β の分布 ($b=0.8$)

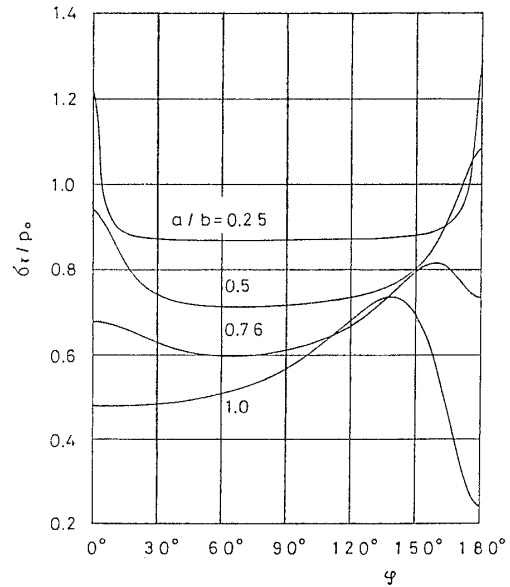


図8 空か面上の σ_τ の分布 ($b=0.8$)

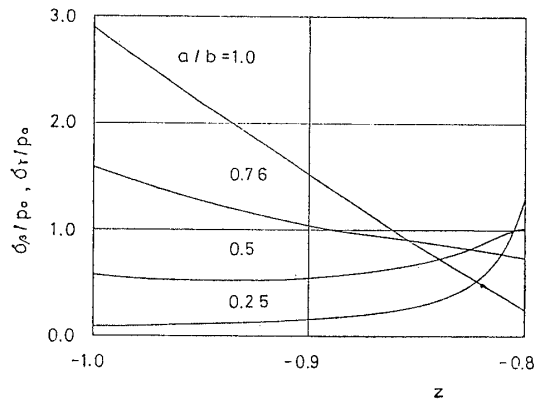


図9 z 軸上の $\sigma_\beta, \sigma_\tau$ の分布 ($b=0.8$)

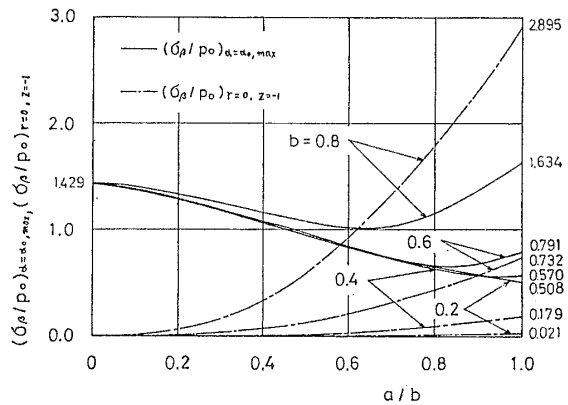


図10 $(\sigma_\beta / p_0)_{\alpha=\alpha_0, \max}, (\sigma_\beta / p_0)_{r=0, z=-1}$ の形状比による変化

つれて増大し、球かの場合が最大となることが分かる。

4. 結 言

1個のへん長回転だ円体状空かを有する半無限体が空か面に軸対称圧力を受ける場合について解析し、等分布圧力の場合について数値計算を行い、空か近傍の応力分布に及ぼす形状比ならびに空かの大きさの影響を明らかにした。結果を要約すると次のようになる。

(1) 最大引張応力の値は b が小さいときは針状き裂の場合が最も大きく、 b が大きくなると球かの場合に最大となる。

(2) 最大引張応力の生じる位置は、 b が小さい場合には常に空か面上にあり、 b が大きくなりかつ形状

が球に近づくと自由平面上の点Dに移る。

(3) 平面境界の影響は球かの場合が最も大きく、形状比が小さくなって針状き裂に近づくとつれて減少する。

なお、数値計算には東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 を使用した。

文 献

- (1) 土田・ほか3名, 機論, 47-420, A (昭 56), 818.
- (2) Mitchell, T.P. and Weese, J.A., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-4 (1960), 726.
- (3) 土田・中原, 機論, 37-297 (昭 46), 843.
- (4) Cooke, J.C., *Monatshefte für Math.*, 60(1956), 322.
- (5) Nicholson, J.W., *Phil. Roy. Soc., Ser. A*, 224 (1924), 320.
- (6) 土田・内山, 機論, 45-393, A (昭 54), 455.