

へん長回転だ円体状空かを有する半無限体の二軸一様引張り\*

土田 栄一郎\*\*, 斉藤 義之\*\*\*  
Eiichiro TSUCHIDA, Yoshiyuki SAITO  
中原 一郎†, 小玉 正雄††  
Ichiro NAKAHARA, Masao KODAMA

1. 緒 言

溶接部にみられる巣やブローホールなどのように、表面近傍に空かが存在する場合は少なく、これらの欠陥近傍には応力集中を生じ、往々破壊の原因となっている。それゆえ表面近傍に存在する欠陥による応力集中を明らかにすることは強度設計上重要であり、すでに球状欠陥を有する半無限体については比較的よく解析されてきた<sup>(1)~(7)</sup>。

しかしながら、欠陥の形状がさらに複雑な回転だ円体状空かに関しては、半無限体表面近傍に存在する場合について西田らによる光弾性実験の結果<sup>(8)</sup>があるだけで、理論的には解析されていないようである。すでに著者らは回転だ円体状空かが有限な弾性体に存在する場合として、回転だ円体状空かを有する円柱が引張り<sup>(9)(10)</sup>およびねじり<sup>(11)</sup>を受ける場合について明らかにしてきた。

本研究は、へん長回転だ円体状空かを有する半無限体が二軸一様引張荷重を受ける軸対称問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析したものである。解析においては Boussinesq の調和応力関数にへん長回転だ円体調和関数ならびに円柱調和関数を与え、両者を互いに座標変換することによって空か面と半無限体表面の境界条件を同時に満足させた。さらに数値計算を行って、空か近傍の応力分布および最大引張応力に及ぼす空かの大きさならびに形状比の影響を明らかにした。

2. 解 析 法

図1に示すように、空か中心 O から半無限体表面までの距離を単位長さとして、すべての長さの基準にとり、へん長回転だ円体状空かの長軸および短軸の長さをそれぞれ  $2a$ ,  $2b$  とする。O を座標原点として円柱

座標  $(r, \theta, z)$  およびへん長回転だ円体座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  をとれば、両座標間には

$$r = c\bar{q}\bar{p}, \quad \theta = \gamma, \quad z = cq\bar{p} \dots\dots\dots(1)$$

の関係がある。ここで、 $q = \cosh \alpha$ ,  $\bar{q} = \sinh \alpha$ ,  $p = \cos \beta$ ,  $\bar{p} = \sin \beta$  であり、 $2c$  は焦点間距離を表す。

いま、円柱座標のもとで Boussinesq の調和応力関数  $\varphi_0, \varphi_3$  を用いて、変位を次のように表せば、これは物体力のないねじりなし軸対称の場合の三次元弾性基礎方程式の解になる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \\ 2Gw_z &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ここで、 $u_r, w_z$  はそれぞれ  $r, z$  方向の変位成分で、 $\nu$  はポアソン比、 $G$  は横弾性係数である。

また、座標間の関係式(1)を用いて式(2)をへん長回転だ円体座標に変換すれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_\alpha &= h\bar{q} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} + ch\bar{q}p \left\{ q \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \\ 2Gv_\beta &= -h\bar{p} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} - chq\bar{p} \left\{ p \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0$$

$$\nabla^2 \equiv h^2 \left\{ \bar{q}^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + 2q \frac{\partial}{\partial q} + \bar{p}^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2p \frac{\partial}{\partial p} \right\}$$

$$h^2 = \frac{1}{c^2(q^2 - p^2)}$$

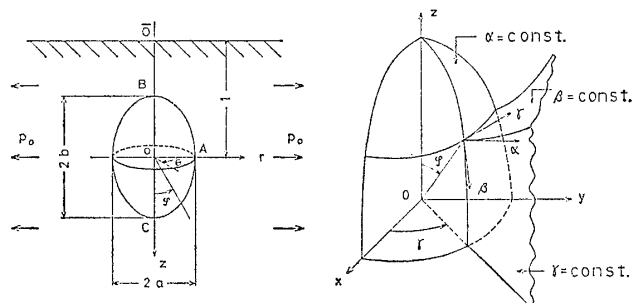


図1 座標系

\* 昭和53年4月4日 第55期通常総会講演会において講演，原稿受付 昭和55年4月2日。  
\*\* 正員，埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255)。  
\*\*\* 正員，防衛施設庁 (〒107 東京都港区赤坂 9-7)。  
† 正員，東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。  
†† 正員，(〒330 大宮市今羽町 477-9-101)。

ここで,  $u_\alpha, v_\beta$  はそれぞれ  $\alpha, \beta$  方向の変位成分である.

さらに変位とひずみ, ひずみと応力の関係を用いて式 (3) より応力成分を求めると次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= h^2 \left\{ \bar{q}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial q^2} + c^2 h^2 \bar{p}^2 \left( q \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \right) \right\} \\ &\quad + ch^2 \left[ q \bar{q}^2 p \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q^2} + \{c^2 h^2 q^2 \bar{p}^2 - 2(1-\nu) \bar{q}^2\} p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - (c^2 h^2 p^2 + 2\nu) q \bar{p}^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right] \\ \sigma_\beta &= h^2 \left\{ \bar{p}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial p^2} + c^2 h^2 \bar{q}^2 \left( q \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \right) \right\} \\ &\quad + ch^2 \left[ q p \bar{p}^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial p^2} - \{c^2 h^2 \bar{q}^2 p^2 + 2(1-\nu) \bar{p}^2\} q \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} + (c^2 h^2 q^2 - 2\nu) \bar{q}^2 p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} \right] \\ \sigma_r &= h^2 \left( q \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \right) + ch^2 \left\{ (q^2 - 2\nu \bar{q}^2) p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - (p^2 + 2\nu \bar{p}^2) q \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right\} \\ \tau_{\alpha\beta} &= h^2 \bar{q} \bar{p} \left\{ - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial q \partial p} + c^2 h^2 \left( q \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} \right) \right\} \\ &\quad - ch^2 \bar{q} \bar{p} \left[ q p \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q \partial p} + \{c^2 h^2 p^2 - (1-2\nu)\} q \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - \{c^2 h^2 q^2 + (1-2\nu)\} p \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

まず, 空か中心 O を原点とする調和関数を用いて応力関数  $\varphi_0, \varphi_3$  を次のように表す.

$$[I] \quad \begin{cases} \varphi_0 = \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} p_0 (r^2 - 2z^2) = \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} p_0 c^2 (\bar{q}^2 \bar{p}^2 - 2q^2 p^2) \\ \varphi_3 = -\frac{p_0}{1+\nu} z = -\frac{p_0 c}{1+\nu} q p \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

これより導かれる変位, 応力成分は

円柱座標では

$$u_r = \frac{1-\nu}{E} p_0 r, \quad v_\theta = 0, \quad w_z = -\frac{2\nu}{E} p_0 z, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = p_0, \quad \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

へん長回転だ円体座標では

$$\frac{2Gu_\alpha}{p_0} = \frac{c^2 h q \bar{q}}{1+\nu} \{ (1-\nu) - (1+\nu) p^2 \}, \quad \frac{2Gu_\beta}{p_0} = \frac{-c^2 h p \bar{p}}{1+\nu} \{ (1-\nu) - (1+\nu) q^2 \} \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\sigma_\alpha}{p_0} = -(c^2 h^2 \bar{q}^2 - 1) q^2, \quad \frac{\sigma_\beta}{p_0} = (c^2 h^2 q^2 - 1) \bar{q}^2, \quad \frac{\sigma_r}{p_0} = 1, \quad \frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0} = c^2 h^2 q \bar{q} p \bar{p}$$

ここで,  $E$  は縦弾性係数である.

したがって応力関数 [I] は半無限体を  $z$  軸に対称に, 単位面積当たり  $p_0$  の荷重で一様に引張った場合の解である. この解は半無限体表面では応力自由であるから, 以下の境界条件を満足する解を導いて [I] の解に重ね合わせれば, へん長回転だ円体状空かを有する半無限体が二軸一様引張荷重を受ける場合の解が得られる.

境界条件:

(i) 半無限体の表面  $z = -1$  において

$$(\sigma_z)_{z=-1} = (\tau_{rz})_{z=-1} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

(ii) 空か面  $\alpha = \alpha_0$  において

$$\left( \frac{\sigma_\alpha}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} = (c^2 h_0^2 \bar{q}_0^2 - 1) q_0^2, \quad \left( \frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -c^2 h_0^2 q_0 \bar{q}_0 p \bar{p} \dots\dots\dots (9)$$

(iii) 無限遠方においてすべての応力が消失する.

ここで,  $q_0 = \cosh \alpha_0, \bar{q}_0 = \sinh \alpha_0, h_0^2 = 1/c^2 (q_0^2 - p^2)$  である.

さて, 境界条件 (i) ~ (iii) を満足する解を導くために, 弾性体領域が二つの単連結領域, すなわち空かを除く無限体領域と半無限体領域の共有領域であることに注目して, それぞれの領域に対し, 回転だ円体の焦点に特異点をもつへん長回転だ円体調和関数ならびに円柱調和関数を用い, 応力関数  $\varphi_0, \varphi_3$  を次のように与える.

$$[II] \quad \varphi_0 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m Q_m(q) P_m(p), \quad \varphi_3 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m Q_m(q) P_m(p) \dots\dots\dots (10)$$

$$[III] \quad \varphi_0 = p_0 \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda^2 d} d\lambda, \quad \varphi_3 = p_0 \int_0^{\infty} \lambda \phi_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda^2 d} d\lambda \dots\dots\dots (11)$$

ここで,  $A_m, B_m$  および  $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$  はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり,  $P_n(p)$  および  $Q_n(q)$  はそれぞれ  $n$  次の第1種ならびに第2種ルジャンドル関数,  $J_n(\lambda r)$  は  $n$  次の第1種ベッセル関数である. 応力関数 [II], [III] から求められる応力成分は無遠方において消失する.

特に空か中心から半無限体表面までの距離に比べて空かが十分小さい場合には, 応力関数 [I], [II] だけで解析でき

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{2c^2q_0}{3D} \left[ 3q_0^2 \left( Q_1 - \frac{1}{\bar{q}_0^2} \right) + 2 \left\{ (1-\nu)Q_1 + \frac{\nu}{\bar{q}_0^2} + 1 \right\} \right] \\ A_2 &= \frac{4c^2q_0}{3D} \left\{ (1-\nu)Q_1 + \frac{\nu}{\bar{q}_0^2} + 1 \right\}, \quad A_1=0, \quad A_m=0 \quad (m \geq 3) \\ B_1 &= \frac{2cq_0}{D} \left( Q_1 - \frac{1}{\bar{q}_0^2} \right), \quad B_0=0, \quad B_m=0 \quad (m \geq 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで

$$D \equiv 2 \left\{ (1+\nu)Q_1^2 + \frac{2(1-\nu)+3\bar{q}_0^2}{\bar{q}_0^2} Q_1 - \frac{q_0^2-\nu}{\bar{q}_0^4} \right\}, \quad Q_1 \equiv Q_1(q_0) = \frac{q_0}{2} \log \frac{q_0+1}{q_0-1} - 1 \quad \text{である.}$$

とおけば境界条件式 (9) は満足される.

この結果はへん長回転た円体状空か無限体中に存在する場合の解で, これより導かれる変位および応力の各成分は, Sadowsky-Sternberg<sup>(12)</sup> ならびに Edwards<sup>(13)</sup> が求めた結果に一致する.

まず, 平面境界の条件を満足させるためにへん長回転た円体調和関数と円柱調和関数の間に<sup>(14)</sup>

$$Q_n(q)P_n(p) = c \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) i_n(\lambda c) d\lambda \quad (z > 0) \dots\dots\dots (13)$$

で表される関係があることに注目する. ここで  $i_n(\lambda c)$  は複素数を変数とする第1種球ベッセル関数であり,  $n$  次の第1種変形球ベッセル関数と呼ぶことにする. なお  $n$  次の第1種球ベッセル関数  $j_n(z)$  および半奇数字の第1種変形ベッセル関数  $I_{n+1/2}(z)$  との間には

$$i_n(\lambda c) = i^{-n} j_n(i\lambda c) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda c}} I_{n+1/2}(\lambda c)$$

の関係がある.  $i$  は虚数単位である.

式 (13) で  $z$  を  $(-z)$ ,  $\beta$  を  $(\pi-\beta)$  とおけば

$$Q_n(q)P_n(p) = (-1)^n c \int_0^\infty e^{\lambda z} J_0(\lambda r) i_n(\lambda c) d\lambda \quad (z < 0) \dots\dots\dots (14)$$

となるから, これを用いて式 (10) を円柱座標に書き直せば

$$[IV] \quad \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=0}^\infty (-1)^m c A_m \int_0^\infty e^{\lambda z} J_0(\lambda r) i_m(\lambda c) d\lambda \\ \varphi_3 = p_0 \sum_{m=0}^\infty (-1)^m c B_m \int_0^\infty e^{\lambda z} J_0(\lambda r) i_m(\lambda c) d\lambda \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

となる. 応力関数 [III], [IV] より得られる応力を重ね合わせ, 平面境界の条件を満足させると次のようになる.

$$\left( \frac{\sigma_z}{p_0} \right)_{z=-1} = \int_0^\infty \lambda^2 \left[ \phi_1(\lambda) + (2-2\nu-\lambda)\phi_2(\lambda) + \sum_{m=0}^\infty (-1)^m c \left\{ A_m - \frac{(2-2\nu+\lambda)}{\lambda} B_m \right\} i_m(\lambda c) e^{-2\lambda} \right] e^{\lambda} J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\left( \frac{\tau_{rz}}{p_0} \right)_{z=-1} = \int_0^\infty \lambda^2 \left[ \phi_1(\lambda) + (1-2\nu-\lambda)\phi_2(\lambda) + \sum_{m=0}^\infty (-1)^m c \left\{ -A_m + \frac{1-2\nu+\lambda}{\lambda} B_m \right\} i_m(\lambda c) e^{-2\lambda} \right] e^{\lambda} J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots (17)$$

式 (16), (17) にハンケルの逆変換を施して未知関数  $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$  を求めると次のようになる.

$$\phi_1(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty \left[ (3-4\nu-\lambda)A_m - \frac{1}{\lambda} \{ 4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda \} B_m \right] (-1)^m c i_m(\lambda c) e^{-2\lambda} \dots\dots\dots (18)$$

$$\phi_2(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty \left\{ -2A_m + \frac{1}{\lambda} (3-4\nu+2\lambda) B_m \right\} (-1)^m c i_m(\lambda c) e^{-2\lambda} \dots\dots\dots (19)$$

式 (18), (19) の関係が成立すれば, 未定係数  $A_m, B_m$  に無関係に半無限体の平面境界における条件式 (8) が満足される.

次に空か面の境界条件を満足させるために, 円柱調和関数とへん長回転だ円体調和関数との関係式<sup>(15)</sup>

$$e^{-\lambda^2} J_0(\lambda r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) i_n(\lambda c) P_n(q) P_n(p) \dots\dots\dots (20)$$

を用いて応力関数 [III] をへん長回転だ円体座標に書き直す.

$$[V] \quad \varphi_0 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(q) P_n(p), \quad \varphi_3 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(q) P_n(p) \dots\dots\dots (21)$$

ここで,

$$\alpha_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} (2n+1) c \int_0^{\infty} \left[ (3-4\nu-2\lambda) A_m - \left\{ \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{\lambda} - 2\lambda \right\} B_m \right] e^{-2\lambda i_m(\lambda c)} i_n(\lambda c) d\lambda \dots\dots\dots (22)$$

$$\beta_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} (2n+1) c \int_0^{\infty} [-2\lambda A_m + (3-4\nu+2\lambda) B_m] e^{-2\lambda i_m(\lambda c)} i_n(\lambda c) d\lambda \dots\dots\dots (23)$$

である. 応力関数 [II] および [V] より応力成分を求め, さらに境界条件式 (9) をルジャンドル関数で書き直した後満足させると次のようになる.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma_{\alpha}}{p_0 c^2 h^4} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} (s_{A1} A_{n-2} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+2} + s_{B1} B_{n-3} + s_{B2} B_{n-1} + s_{B3} B_{n+1} \\ &\quad + s_{B4} B_{n+3} + s_{\alpha 1} \alpha_{n-2} + s_{\alpha 2} \alpha_n + s_{\alpha 3} \alpha_{n+2} + s_{\beta 1} \beta_{n-3} + s_{\beta 2} \beta_{n-1} + s_{\beta 3} \beta_{n+1} + s_{\beta 4} \beta_{n+3}) P_n(p) \\ &= -\frac{8}{35} c^2 q_0^2 P_4(p) + \left( \frac{2}{3} q_0^2 + \frac{2}{21} \right) c^2 q_0^2 P_2(p) - \left( \frac{2}{3} q_0^2 - \frac{2}{15} \right) P_0(p) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0 c^2 h^4 \bar{q} \bar{p}} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= \sum_{n=1}^{\infty} (t_{A1} A_{n-2} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+2} + t_{B1} B_{n-3} + t_{B2} B_{n-1} \\ &\quad + t_{B3} B_{n+1} + t_{B4} B_{n+3} + t_{\alpha 1} \alpha_{n-2} + t_{\alpha 2} \alpha_n + t_{\alpha 3} \alpha_{n+2} + t_{\beta 1} \beta_{n-3} + t_{\beta 2} \beta_{n-1} \\ &\quad + t_{\beta 3} \beta_{n+1} + t_{\beta 4} \beta_{n+3}) P_n'(p) = \frac{2}{35} c^2 q_0 P_4'(p) - \left( \frac{1}{3} q_0^2 - \frac{1}{7} \right) c^2 q_0 P_2'(p) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} s_{A1} &= \frac{(n-1)n}{(2n-3)(2n-1)} \{-\bar{q}_0^2 Q_{n-2}''(q_0) - q_0 Q_{n-2}'(q_0) + (n-2) Q_{n-2}(q_0)\} \\ s_{A2} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \{[-2n^2 - 2n + 1 + (2n-1)(2n+3)q_0^2] \bar{q}_0^2 Q_n''(q_0) \\ &\quad + 2(n^2 + n - 1) q_0 Q_n'(q_0) - n(n+1) Q_n(q_0)\} \\ s_{A3} &= \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} \{-\bar{q}_0^2 Q_{n+2}''(q_0) - q_0 Q_{n+2}'(q_0) - (n+3) Q_{n+2}(q_0)\} \\ s_{B1} &= \frac{(n-2)(n-1)nc}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)} [-q_0 \bar{q}_0^2 Q_{n-3}''(q_0) + \{2(1-\nu) \bar{q}_0^2 - q_0^2\} Q_{n-3}'(q_0) \\ &\quad + (1-2\nu)(n-3) q_0 Q_{n-3}(q_0)] \\ s_{B2} &= \frac{nc}{(2n-3)(2n-1)(2n+3)} \{[-3n^2 + 6 + (4n^2 - 9)q_0^2] q_0 \bar{q}_0^2 Q_{n-1}''(q_0) \\ &\quad + \{2(1-\nu) \bar{q}_0^2 (3n^2 - 6 - [4n^2 - 9]q_0^2) + (n^2 - 3)q_0^2\} Q_{n-1}'(q_0) \\ &\quad + (n-1) \{2\nu(4n^2 - 9)q_0^2 + (1-2\nu)(n^2 - n - 3)\} q_0 Q_{n-1}(q_0)\} \\ s_{B3} &= \frac{(n+1)c}{(2n-1)(2n+3)(2n+5)} \{[(2n-1)(2n+5)q_0^2 - 3n^2 - 6n + 3] q_0 \bar{q}_0^2 Q_{n+1}''(q_0) \\ &\quad + \{2(1-\nu) \bar{q}_0^2 (3n^2 + 6n - 3 - [2n-1][2n+5]q_0^2) + (n^2 + 2n - 2)q_0^2\} Q_{n+1}'(q_0) \\ &\quad - (n+2) \{2\nu(2n-1)(2n+5)q_0^2 + (1-2\nu)(n^2 + 3n - 1)\} q_0 Q_{n+1}(q_0)\} \\ s_{B4} &= \frac{-(n+1)(n+2)(n+3)c}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} [q_0 \bar{q}_0^2 Q_{n+3}''(q_0) - \{2(1-\nu) \bar{q}_0^2 - q_0^2\} Q_{n+3}'(q_0) \\ &\quad + (1-2\nu)(n+4) q_0 Q_{n+3}(q_0)] \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned}
 t_{A1} &= \frac{(n-3)(n-1)}{(2n-3)(2n-1)} Q_{n-2}'(q_0) \\
 t_{A2} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} [ \{2n^2+2n-4-(2n-1)(2n+3)q_0^2\} Q_n'(q_0) \\
 &\quad + (2n-1)(2n+3)q_0 Q_n(q_0) ] \\
 t_{A3} &= \frac{(n+2)(n+4)}{(2n+3)(2n+5)} Q_{n+2}'(q_0) \\
 t_{B1} &= \frac{(n-2)(n-1)c}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)} \{ (n-5+2\nu)q_0 Q_{n-3}'(q_0) - (1-2\nu)(n-3)Q_{n-3}(q_0) \} \\
 t_{B2} &= \frac{c}{(2n-3)(2n-1)(2n+3)} [ \{ (4n^2-9)(2-2\nu-n)q_0^2 + 3(n-1)(n^2-3) \\
 &\quad + 2(1-\nu)(n^2+n-3) \} q_0 Q_{n-1}'(q_0) + (n-1) \{ 2(1-\nu)(4n^2-9)q_0^2 \\
 &\quad - 3(1-2\nu)(n^2-3) \} Q_{n-1}(q_0) ] \\
 t_{B3} &= \frac{c}{(2n-1)(2n+3)(2n+5)} [ \{ -(2n-1)(2n+5)(3+n-2\nu)q_0^2 \\
 &\quad + 3(n+2)(n^2+2n-2) + 2(1-\nu)(n^2+n-3) \} q_0 Q_{n+1}'(q_0) \\
 &\quad + (n+2) \{ 2(1-\nu)(2n-1)(2n+5)q_0^2 - 3(1-2\nu)(n^2+2n-2) \} Q_{n+1}(q_0) ] \\
 t_{B4} &= \frac{(n+2)(n+3)c}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \{ (n+6-2\nu)q_0 Q_{n+3}'(q_0) - (1-2\nu)(n+4)Q_{n+3}(q_0) \}
 \end{aligned} \tag{27}$$

であり、' は  $q_0$  による微分を表す。また  $s_{ai}, s_{bi}, t_{ai}, t_{bi}$  はそれぞれ  $s_{AI}, s_{BI}, t_{AI}, t_{BI}$  に含まれる第2種ルジャンドル関数  $Q_n(q_0)$  を第1種ルジャンドル関数  $P_n(q_0)$  に置き換えたものになる。

式 (24), (25) でそれぞれ  $P_n(p), P_n'(p)$  の各係数を等置すれば  $A_n, B_n$  に関する無限連立一次方程式が得られ、これを解けば本問題の解は完全に決まる。そして、全体の変位および応力各成分は応力関数 [I], [II], [III] を重ね合わせて得られる。

### 3. 数 値 計 算

ポアソン比を  $\nu=0.3$  とし、まず形状比  $s=a/b=0.5$  として  $b=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  の各場合について計算し、さらに形状比をいくつか変化させた場合についても数値計算を行った。計算に当たっては式 (22), (23) の  $\alpha_n, \beta_n$  に含まれる積分値が必要となるが、これはシンプソン則によって数値積分を行って求めた。すべての無限級数の収束は良好であるが、空かが大きくなるとともに次第に悪くなる。そこで、最終的に得られる応力値の有効数字が三けた以上になるように  $A_n, B_n$  を 7~20 項で打ち切って連立一次方程式を解いた。

空か面ならびに空か近傍の応力分布は応力関数 [I], [II], [V] より求められる。しかしながら公式 (20) の展開範囲の制約から、空かからある程度離れると ( $|z|>1, r>1$ )、応力関数 [V] の代わりに応力関数 [III] を用いねばならない。

ここでは特に  $z$  軸上の応力  $\sigma_\beta, \sigma_r$  を示す。

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\sigma_\beta}{p_0} \right)_{r=0} &= \left( \frac{\sigma_r}{p_0} \right)_{r=0} = 1 + \left[ h^2 \sum_{n=0}^{\infty} [ \{ q Q_n'(q) P_n(p) - p Q_n(q) P_n'(p) \} A_n \right. \\
 &\quad + (1-2\nu) q p \{ q Q_n'(q) P_n(p) - p Q_n(q) P_n'(p) \} B_n - 2\nu c \{ q Q_n(q) P_n'(p) \\
 &\quad \left. - p Q_n'(q) P_n(p) \} B_n ] \right]_{p=\pm 1} - \frac{1}{2} c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [ \{ (3+4\nu)_{2\varepsilon_n} - 2(1+z)_{3\varepsilon_n} \} A_n \\
 &\quad + \{ -4(1-2\nu^2)_{1\varepsilon_n} + \{ 3-4\nu \} z - 8\nu \}_{2\varepsilon_n} + 2(1+z)_{3\varepsilon_n} \} B_n ] \dots \tag{28}
 \end{aligned}$$

ここで、 $p=1$  は正の  $z$  軸、 $p=-1$  は負の  $z$  軸を表す。また

$$m\varepsilon_n = \int_0^\infty \lambda^m e^{-(2+z)\lambda} i_n(\lambda c) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \int_0^\infty \lambda^{m-1/2} e^{-(2+z)\lambda} I_{n+1/2}(\lambda c) d\lambda \dots \tag{29}$$

であり、これは次の数学公式<sup>(16)</sup>により求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^\infty t^{\mu-1/2} e^{-at} I_{\nu+1/2}(bt) dt &= \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \frac{\sin \nu \pi (a^2 - b^2)^{-\mu/2}}{\sin [(\mu + \nu) \pi]} Q_\nu^\mu \left( \frac{a}{b} \right) \\
 \text{Re}(\mu + \nu) > -1, \quad \text{Re}(a) > |\text{Re}(b)| \\
 \int_0^\infty t^\nu e^{-at} I_\nu(bt) dt &= 2^\nu \pi^{-1/2} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) b^\nu (a^2 - b^2)^{-\nu-1/2} \\
 \text{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad \text{Re}(a) > |\text{Re}(b)| \\
 \int_0^\infty t^{\nu+1} e^{-at} I_\nu(bt) dt &= 2^{\nu+1} \pi^{-1/2} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) b^\nu a (a^2 - b^2)^{-\nu-3/2} \\
 \text{Re}(\nu) > -1, \quad \text{Re}(a) > |\text{Re}(b)|
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここで  $I_\nu(bt)$  は  $\nu$  次の第1種変形ベッセル関数,  $Q_\nu^\mu(a/b)$  は  $\mu$  階  $\nu$  次の第2種ルジャンドル陪関数,  $\Gamma(\nu)$  はガンマ関数,  $\text{Re}(a)$  は  $a$  の実部を表す.

を示したものである.  $\sigma_r$  は常に引張応力であり,  $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$  で極大値を  $\varphi = 90^\circ$  近傍で極小値をとる. 空か大きさによる影響は  $\varphi = 180^\circ$  近傍で最も

式 (30) を用いると

$$\left. \begin{aligned}
 1\varepsilon_n &= \begin{cases} \frac{1}{R_0^2} & (n=0) \\ -\frac{Q_n^1\{(2+z)/c\}}{cR_0} & (n \geq 1) \end{cases} \\
 2\varepsilon_n &= \begin{cases} \frac{2(2+z)}{R_0^4} & (n=0) \\ \frac{2c}{R_0^4} & (n=1) \\ \frac{Q_n^2\{(2+z)/c\}}{cR_0^2} & (n \geq 2) \end{cases} \\
 3\varepsilon_n &= \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{1}{R_0^3} \left\{ 6 \left( \frac{2+z}{c} \right)^2 + 2 \right\} \\ \quad \times \left\{ \left( \frac{2+z}{c} \right)^2 - 1 \right\}^{3/2} & (n=0) \\ \frac{8c(2+z)}{R_0^6} & (n=1) \\ \frac{8c^2}{R_0^6} & (n=2) \\ -\frac{1}{c} \frac{Q_n^3\{(2+z)/c\}}{R_0^3} & (n \geq 3) \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

となる. ここで  $R_0 = \sqrt{(2+z)^2 - c^2}$  である.

図2は形状比  $s=0.5$  の場合の空か面における  $\sigma_\beta$  の分布を示したものである. ここで,  $\varphi$  は  $z$  軸から測った角度で, 空か面においては  $\beta$  と  $\tan \varphi = a/b \tan \beta$  の関係がある. 応力  $\sigma_\beta$  は  $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$  (図1の点Cと点B)において引張応力の極大値をとり,  $\varphi = 35^\circ$  近傍で引張応力から圧縮応力へ,  $\varphi = 145^\circ$  近傍で圧縮応力から引張応力へ変化し,  $\varphi = 90^\circ$  付近に最大の圧縮応力  $\sigma_\beta = -0.33p_0$  を生ずる.  $\varphi = 0^\circ$  から  $90^\circ$  までの  $\sigma_\beta$  の値は空か大きさにはほとんど影響されないが,  $\varphi = 90^\circ$  を越えるとかなり影響を受け,  $\varphi = 180^\circ$  で引張応力は最大となる.

図3は  $s=0.5$  の場合の空か面における  $\sigma_r$  の分布

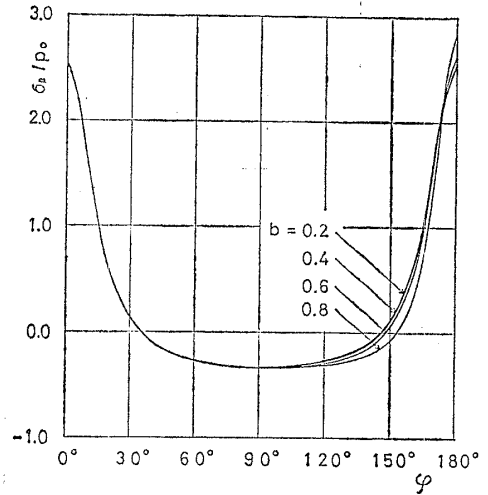


図2 空か面上の  $\sigma_\beta$  の分布 ( $s=0.5$ )

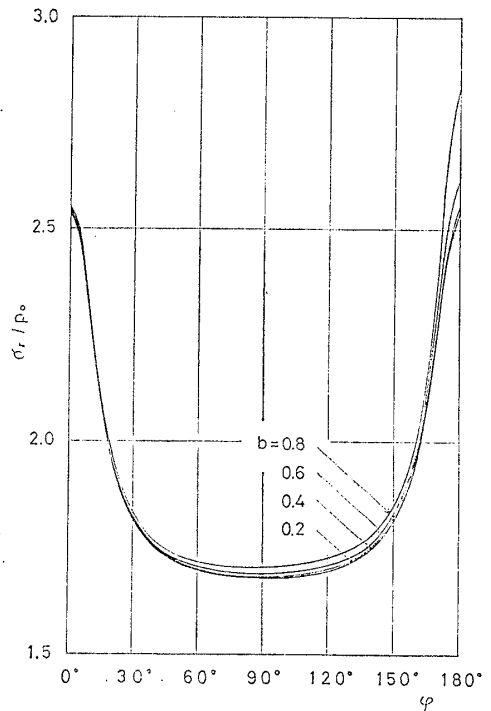


図3 空か面における  $\sigma_r$  の分布 ( $s=0.5$ )

顯著であり,  $\varphi=180^\circ$  で最大引張応力となる.

図4, 5は  $s=0.5$  のときの  $z$  軸上の応力  $(\sigma_\beta)_{r=0} = (\sigma_r)_{r=0}$  の分布をそれぞれ  $z < 0$  および  $z > 0$  の場合について示したものである.  $\sigma_\beta$  は空か面上, 半無限体平面に最も近い点 B で最大引張応力を生じ, 半無限体表面では  $\sigma_\beta = p_0$  より小さい値をとる. 図5では  $\sigma_\beta$  は空か面で最大の引張応力を取り, 空かから離れるにつれ急速に減少し  $\sigma_\beta = p_0$  に近づく.

図6, 7は  $b=0.2$  とし, 形状比を  $s=0.25, 0.5,$

$0.75, 1$  と変えた場合の空か面における  $\sigma_\beta$  および  $\sigma_r$  の分布を示したものである. ここで  $s=1$  は球かの場合であり, 土田・中原<sup>(2)</sup>の文献にしたがって  $\nu=0.3$  の場合について計算したものである.  $\sigma_\beta$  については, 点 B で最大引張応力, 点 A 付近で最大圧縮応力を取り, 最大引張応力は形状比  $s$  が小さくなる(針状き裂に近づく)につれて増大する. これに

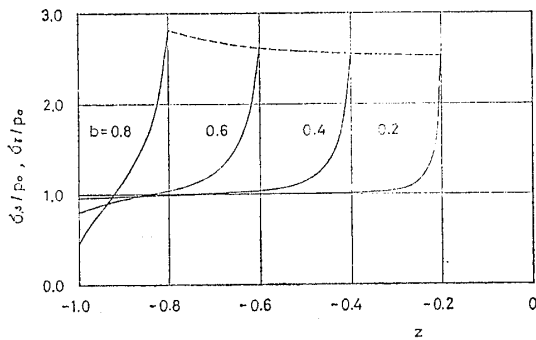


図4  $z$  軸上の  $\sigma_\beta, \sigma_r$  の分布 ( $s=0.5$ )

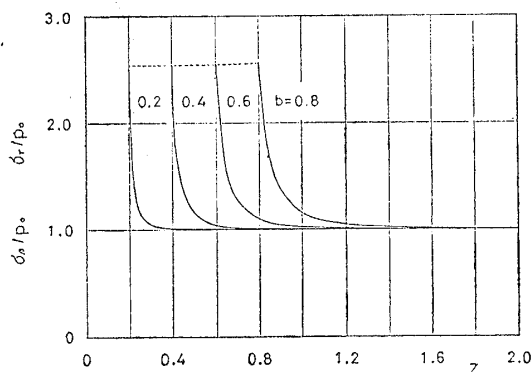


図5  $z$  軸上の  $\sigma_\beta, \sigma_r$  の分布 ( $s=0.5$ )

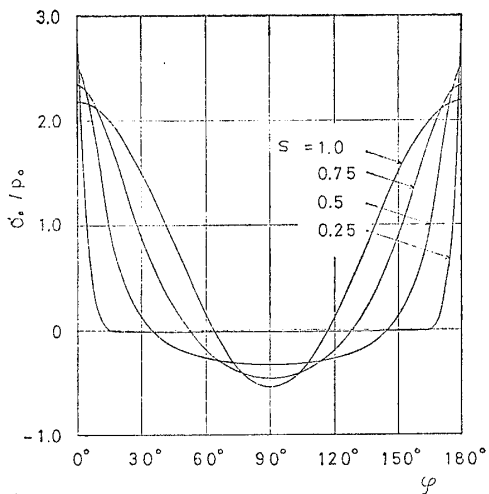


図6 空か面における  $\sigma_\beta$  の分布 ( $b=0.2$ )

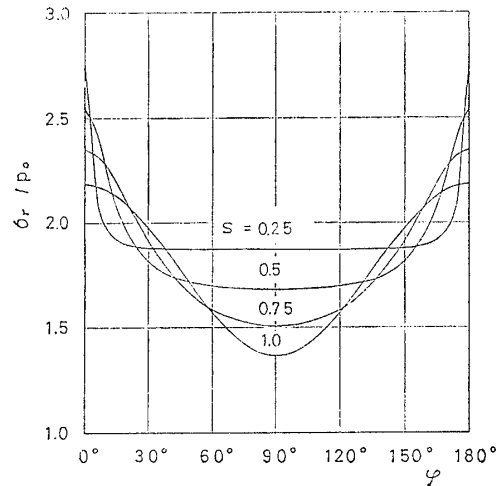


図7 空か面上の  $\sigma_r$  の分布 ( $b=0.2$ )

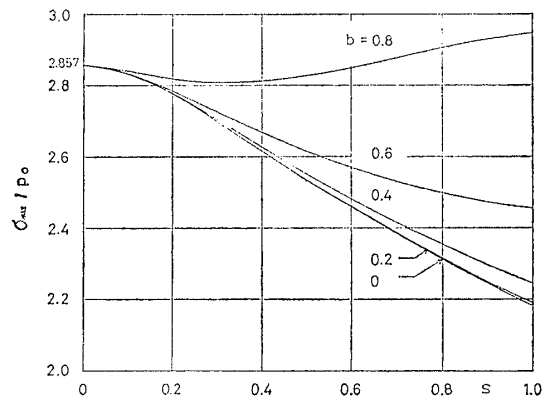


図8  $\sigma_{\max}$  の形状比  $s$  による変化

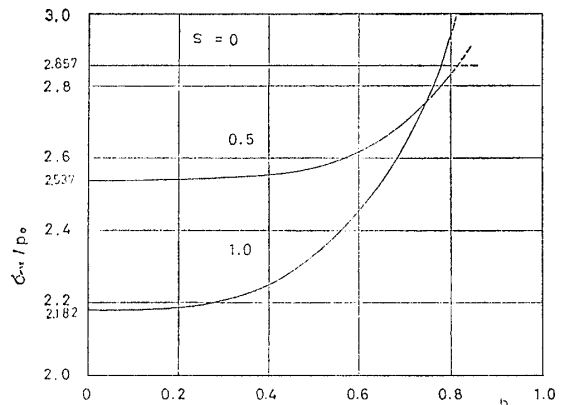


図9  $\sigma_{\max}$  の長軸の長さによる変化

対して最大圧縮応力は形状比が大きくなる（球かに近づく）につれて増大する。 $\sigma_r$  も  $\sigma_\theta$  同様点 B で最大引張応力となり、その値は針状き裂に近づくにつれ増大する。

以上の計算結果より、最大引張応力は空か面上の点 B に生ずる  $\sigma_\theta$  (あるいは  $\sigma_r$ ) であることがわかる。そこで、この最大引張応力を

$$\sigma_{\max} = (\sigma_\theta)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=180^\circ} = (\sigma_r)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=180^\circ}$$

とし、 $\sigma_{\max}$  と形状比および  $\sigma_{\max}$  と空かの大きさ  $b$  との関係を求めたのが図 8 および 9 である。 $\sigma_{\max}$  の値は  $b$  が小さいときは  $s=0$  すなわち針状き裂の場合が最も大きく、 $b$  が大きくなり  $b=0.75$  を越えると球か ( $s=1$ ) の場合に最大値をとる。そして針状き裂の場合には全く自由平面の影響はみられず、無限体中に針状き裂が存在するときの応力

$$\sigma_{\max} = \frac{2}{1-\nu} p_0 = 2.857 p_0 \quad (\nu=0.3)$$

に一致する。これに対し、平面境界の影響は  $s$  が大きくなるほど増大し、球かの場合が最も大きくなることかわかる。

#### 4. 結 言

1 個のへん長回転だ円体状空かを有する半無限体が、二軸一様引張荷重を受ける軸対称問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析する方法を示した。理論解に基づいて数値計算を行い、空か近傍の応力分布ならびに応力集中に及ぼす形状比の影響を明らかにした。

得られた結果を要約すると以下のようになる。

(1) 最大引張応力は空か面上の半無限体表面に最も近い点に生じ、その値は空かが小さいときは針状き裂の場合が最も大きく、空かが大きくなると球かの場合が最大となる。

(2) 平面境界の影響は球かの場合が最も大きく、形状比  $s=a/b$  が小さくなるにつれ減少し、針状き裂になると平面境界の影響はなくなる。

なお、数値計算には東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 を使用した。

#### 文 献

- (1) Mitchell, T.P. and Weese, J.A., *Trans. ASME, Ser. E*, **27-4** (1960), 726.
- (2) 土田・中原, 機論, **35-276** (昭 44), 1607.
- (3) 土田・中原, 機論, **37-297** (昭 46), 843.
- (4) 土田・中原, 機論, **40-330** (昭 49), 285.
- (5) 筒井・ほか 3 名, 機論, **40-337** (昭 49), 2485.
- (6) Tsuchida, E., ほか 3 名, *Proc. 23rd Jpn Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1975), 531.
- (7) Atsumi, A. and Itou, S., *Trans. ASME, Ser. E*, **41-3** (1974), 708.
- (8) 西田, 応力集中, (昭 42), 735, 森北書店.
- (9) 土田・内山, 機論, **44-384** (昭 53), 2577.
- (10) 土田・内山, 機論, **45-393, A** (昭 54), 455.
- (11) 内山・ほか 3 名, 機論, No. 780-12 (昭 53-10), 26.
- (12) Sadowsky, M.A. and Sternberg, E., *Trans. ASME*, **14-3** (1947), 191.
- (13) Edwards, R.H., *Trans. ASME*, **18-1** (1951), 19.
- (14) Nicholson, J.W., *Phil. Trans. R. Soc., Ser. A*, **224** (1924), 320.
- (15) Cook, J.C., *Monatshefte für Math.*, **60** (1956), 322.
- (16) Erdélyi, A., ほか 3 名, *Tables of Integral Transforms*, Vol. I (1954), 195, 196, McGraw-Hill.

#### 討 論

〔質問〕 宮尾 嘉寿 (富山大学工学部)

従来実験による資料しかなかったこの種の問題を初めて理論的に解析され、多くの具体的なデータを示されたことは工学的に大きい意義があると評価している。次のことをお尋ねする。

(1) 基本的な単軸引張り問題を取扱わないで二軸一様引張り問題を解かれた理由は何か。

(2) 西田氏の光弾性実験によって得られた応力値と、本解析の数値計算値と比較できないか。

(3) 数値例として形状比が  $s \leq 1$  の場合について詳細に示してあるが、平面境界方向に長い回転だ円体の場合  $s > 1$  についても数値計算可能であるか。この場合に平面境界の空か面上応力に及ぼす影響はどのようになるか。

〔回答〕 (1) 単軸引張りの問題は二軸一様引張

りと純粋せん断荷重が作用する場合の重ね合わせで得られる。前者は本論文で示した軸対称問題であり、後者は非軸対称問題になる。軸対称問題に比べて非軸対称問題は応力関数の選定と解法が非常にはん雑になる。本研究では比較的解析しやすい軸対称問題を扱ったもので、ご指摘の問題については基本的な問題であるので、ぜひ解析したいと思う。

(2) 西田氏の論文では回転軸が半無限体平面に平行な  $x$  軸の回転だ円体状空かを含む半無限体が一軸引張りを受ける非軸対称問題を扱っている。したがってこの場合半無限体平面に平行に細長い場合がへん長回転だ円体で、直角に細長い場合がへん平回転だ円体となり本解析とは逆の形状になる。ここでは特に半無限体平面に最も近い空か面上の応力値について比較して付表 1 に示した。



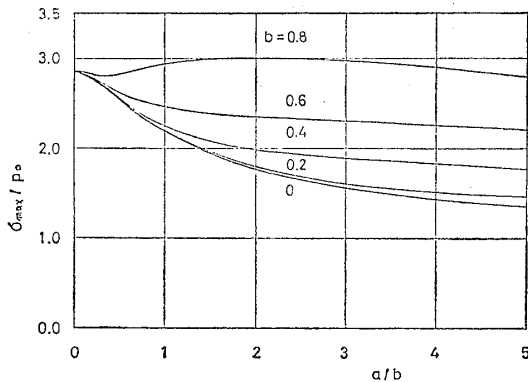
付表 1  $\sigma_B/p_0$  の値

$s = a/b$	0.286	0.333	0.4	0.5	0.667	1.0
0.333	5.313 2.712	4.625 2.671	3.978 0.624	3.250 2.544	2.625 2.425	2.083 2.227
0.4	5.375 2.714	4.667 2.674	4.042 2.627	3.292 2.550	2.667 2.434	2.084 2.245
0.5	5.542 2.724	4.833 2.689	4.133 2.648	3.375 2.583	2.750 2.488	2.125 2.350
0.667	— 2.753	5.667 2.740	4.708 2.716	3.833 2.686	3.042 2.651	2.354 2.618

[注] 上段 西田氏の結果 ( $\nu=0.25$ )  
下段 本論文の結果 ( $\nu=0.3$ )

付表 2

$s$	0.25		0.5	
	$\sigma_B/p_0$	$\sigma_C/p_0$	$\sigma_B/p_0$	$\sigma_C/p_0$
0.2	2.740 523	2.740 366	2.538 520	2.537 801
0.4	2.743 805 84	2.741 105 99	2.552 86	2.540 52
0.6	2.758 004 88	2.742 196 38	2.615 495 7	2.544 382 1
0.8	2.809 8	2.743 0	2.829 3	2.547 4



付図 1  $\sigma_{max}$  の形状比  $a/b$  による変化

なお西田氏の結果はポアソン比  $\nu=0.25$  であり, 本論文では  $\nu=0.3$  としている。

この結果から, 問題が異なるため最大応力値は西田氏の方が高くなっているが, 最大応力の形状比  $b/a$  に対する傾向は似ていることが分かる。

(3)  $s > 1$  の場合はへん平回転だ円体状空かの場合であり, これについても数値計算は可能で文献(付1)に報告したのでご参照願いたい。

最大応力に及ぼす平面境界の影響について  $0 < s < \infty$  の場合を示したのが付図1である。

[質問] 伊藤勝悦(八戸工業大学)

(付1) 土田・斉藤, 第30回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭55-10), 263.

著者らは本研究を含めた一連の研究(9)~(11)(付2)において, 円柱座標と回転だ円体座標との変換式である式(13), (20)などを巧みに用いて従来困難視されてきた三次元弾性問題の解析に成功し, しかも厳密解を与えている。この点に関して敬意を表したい。

(1) 細かいことではあるが, 例えば図2において,  $\varphi=0^\circ, 180^\circ$  に対しては  $d\sigma_B/d\varphi=0$  となると思うが, 著者らのコメントをいただきたい。

(2)  $s=0$  の場合には,  $\sigma_{max}$  値に対して, 自由境界の効果の影響は存在しないことが結論されている。これは, 物理的には, 応力集中が針状き裂周囲のきわめて微小部分に限定されることに起因すると考えてよいか。

[回答] (1) 例えば  $x-z$  軸を含む面で切断して得られるだ円上の  $\sigma_B$  の分布を描くと  $\varphi=0^\circ \sim 180^\circ$  ( $\theta=0^\circ$ ),  $\varphi=180^\circ \sim 0^\circ$  ( $\theta=180^\circ$ ) について連続に分布するのでご指摘のとおり,  $\varphi=0^\circ, 180^\circ$  で  $d\sigma_B/d\varphi=0$  である。図2では明確に図示できず誤解を招いたが,  $\varphi=0^\circ, 180^\circ$  で曲線は縦軸に水平に交わる。

(2)  $s=0$  の場合は二とおり考えられる。一つは  $\overline{OO}$  を自由にとり  $a$ —一定とし  $b$  を  $\infty$  としたとき, すなわち底のついた無限円筒状空かの場合であり, 他方は  $\overline{OO}$  を一定とし  $a \rightarrow 0$  とした針状き裂の場合である。いずれも  $s \rightarrow 0$  の極限として  $\sigma_{max}$  は有限値となる。針状き裂に対する平面境界の影響についてはご質問のとおりと考える。この場合, 針状き裂の先端では応力が無限大に向かうと同時に, その生じている面積が無限小に向かい結果として応力値が有限になる。これは二次元における線き裂が板の厚さ方向に有限の長さをもつため, き裂先端の応力が無限大になるのに対比され, これと区別するために針状き裂という名前を採用した。なお文献(付2)の石川氏の討論を参照願いたい。

[質問] 石田 誠(九州大学工学部)

実用に便利のため, 点 B, C の応力の数値と推定精度についてお示し願いたい。

[回答] 点 B, C の応力を

$$\sigma_B = (\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=180^\circ} = (\sigma_\tau)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=180^\circ}$$

$$\sigma_C = (\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=0^\circ} = (\sigma_\tau)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=0^\circ}$$

とし,  $s=0.25, 0.5$  の場合について付表2に示した。精度は得られた係数により境界面の応力の式[式(24), (25)ではなく  $P_n(\eta)$  でまとめられていない式]に代入し, その満足度により判定したもので表には有効なけたまで表示した。

(付2) 土田・ほか3名, 機論, 46-404, A(昭55), 412.