

# 内外圧を受ける中空へん平回転だ円体および 円形き裂を有するへん平回転だ円体\*

藤田 輝昭\*\*, 土田栄一郎\*\*\*, 中原 一郎\*\*\*\*  
Teruaki FUJITA, Eiichiro TSUCHIDA, Ichiro NAKAHARA

## 1. 緒 言

圧力容器や深海用潜艇にみられるように球形あるいはだ円体状のかくが内外圧を受ける問題は実用上重要であり、境界応力が与えられた球かくの三次元弾性論における軸対称問題については Sternberg ら<sup>(1)</sup>により、中空へん長回転だ円体については牟岐<sup>(2)</sup>により解かれているが、いずれも具体的な数値計算例はなされていない。最近著者の一人<sup>(3)</sup>は牟岐と同じ問題を取り上げ、回転だ円体座標で表された単純な調和関数を与えることにより、牟岐の方法より簡明に解く方法を示した。

本研究は二つの同焦点へん平回転だ円体面で囲まれた中空へん平回転だ円体が、内面あるいは外面において一様な軸対称圧力を受ける問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析したものである。解析においては Boussinesq の調和応力関数にへん平回転だ円体調和関数を与えた円体の内外面における境界条件を満足させた。数値計算においては、一定の内圧あるいは外圧を受ける中空回転だ円体の長径軸上の厚さを一定し、内面における短径と長径との比すなわち形状比を変えた場合、および一定の内圧を受ける中空回転だ円体の内面における形状比を一定とし、長径軸上の厚さを変えたときの回転だ円体に生ずる応力分布を求め、さらに薄膜理論による結果と比較検討した。そして、内面の短半径が零となる極限の場合として、円形き裂を有するへん平回転だ円体の問題が同様に解析できることを示し、一定内圧を受ける場合について計算し応力拡大係数の値を求めた。

## 2. 解 析 法

### 2.1 一様な内外圧を受ける中空へん平回転だ円体

図 1 に示すように、中心を 0 とする二つの同焦点へ

ん平回転だ円体面で囲まれた中空回転だ円体を考え、内側の長半径を  $a_1$ 、短半径を  $b_1$ 、外側の長半径を  $a_2 (=a_1+t)$ 、短半径を  $b_2$  とする。そして内側の長半径を  $a_1=1$  としこれを基準としてすべての長さを表すものとする。中心 0 を座標原点として、円柱座標  $(r, \theta, z)$  およびへん平回転だ円体座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を用いれば、これらの間には、

$$\left. \begin{aligned} r &= c \cosh \alpha \sin \beta = c \xi \bar{\eta} \\ \theta &= \gamma \\ z &= c \sinh \alpha \cos \beta = c \xi \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

の関係がある。ここで、 $\xi = \sinh \alpha$ ,  $\bar{\xi} = \cosh \alpha$ ,  $\eta = \cos \beta$ ,  $\bar{\eta} = \sin \beta$  で、 $2c$  は焦点間距離である。また、だ円体の内面は  $\xi = \xi_1$  (一定)、外面は  $\xi = \xi_2$  (一定)、 $z$  軸上は  $\beta = 0$ ,  $xy$  平面は  $\beta = \pi/2$  で表される。

いま、へん平回転だ円体座標のもとで Boussinesq の調和応力関数  $\varphi_0, \varphi_3$  を用いて変位を次のように表せば、これらはねじりのない三次元軸対称弾性基礎方程式の互いに独立な解となる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_\alpha &= h \bar{\xi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + ch \bar{\xi} \eta \left\{ \xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} - (3-4\nu) \varphi_3 \right\} \\ 2Gv_\beta &= -h \bar{\eta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} - ch \xi \bar{\eta} \left\{ \eta \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} - (3-4\nu) \varphi_3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $u_\alpha, v_\beta$  はそれぞれ  $\alpha, \beta$  方向の変位成分で、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_0 &= \nabla^2 \varphi_3 = 0 \\ \nabla^2 &\equiv h^2 \left\{ \bar{\xi}^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\eta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right\} \\ c^2 h^2 &= 1/(\xi^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

であり、 $\nu$  はポアソン比、 $G$  は横弾性係数である。

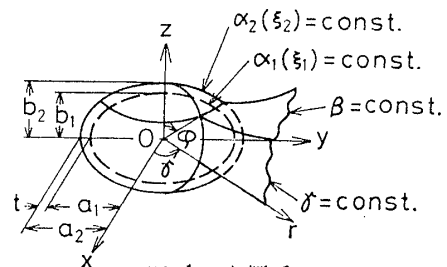


図 1 座標系

\* 昭和 55 年 8 月 22 日 第 58 期全国大会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和 55 年 2 月 6 日。

\*\* 正員、防衛大学校 (〒 239 横浜賀市走水 1-10-20)。

\*\*\* 正員、埼玉大学工学部 (〒 338 浦和市下大久保 255)。

\*\*\*\* 正員、東京工業大学 (〒 152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

さらに変位とひずみ、ひずみと応力の間の関係を用いれば、式(2)よりへん平回転だ円体座標における応力成分が求まる<sup>(4)</sup>。

さて、だ円体の内面あるいは外面が一様な軸対称圧力を受けるときの境界条件は以下の通りである。

境界条件;

$$\text{内圧の場合} \quad \xi = \xi_1 \quad \text{で} \quad \sigma_\alpha = -p_0 f(\eta), \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \xi = \xi_2 \quad \text{で} \quad \sigma_\alpha = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{外圧の場合} \quad \xi = \xi_1 \quad \text{で} \quad \sigma_\alpha = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \xi = \xi_2 \quad \text{で} \quad \sigma_\alpha = -p_0 g(\eta), \quad \tau_{\alpha\beta} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)'$$

ここで、 $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_{\alpha\beta}$  はだ円体面上の垂直応力とせん断応力であり、 $p_0$  は定数である。また  $f(\eta)$ ,  $g(\eta)$  は  $\eta$  (または  $\beta$ ) のみの関数である。

これらの境界条件を満足する解として  $\varphi_0$ ,  $\varphi_3$  に次のような2組の調和関数を与える。

$$[\text{I}] \quad \varphi_0 = c^2 p_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n q_n(\xi) P_n(\eta), \quad \varphi_3 = c p_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n q_n(\xi) P_n(\eta) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$[\text{II}] \quad \varphi_0 = c^2 p_0 \sum_{n=2}^{\infty} C_n p_n(\xi) P_n(\eta), \quad \varphi_3 = c p_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n p_n(\xi) P_n(\eta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  および  $D_n$  は境界条件により決まる未定係数であり、また  $P_n(\eta)$  は第一種ルジャンドル関数である。また第一種および第二種変形ルジャンドル関数<sup>(5)</sup>は第一種および第二種ルジャンドル関数を用いて表せば  $p_n(\xi) = (-i)^n P_n(i\xi)$  および  $q_n(\xi) = i^{n+1} Q_n(i\xi)$  となる。ただし、 $i = \sqrt{-1}$  である。

式(4), (5)より応力成分を求め、境界条件(3)あるいは(3)'を満足させると次のようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma_\alpha}{p_0 c^4 h^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{s_{A1}(n, \xi) A_{n-2} + s_{A2}(n, \xi) A_n + s_{A3}(n, \xi) A_{n+2} + s_{B1}(n, \xi) B_{n-3} + s_{B2}(n, \xi) B_{n-1} \\ &\quad + s_{B3}(n, \xi) B_{n+1} + s_{B4}(n, \xi) B_{n+3} + s_{C1}(n, \xi) C_{n-2} + s_{C2}(n, \xi) C_n + s_{C3}(n, \xi) C_{n+2} \\ &\quad + s_{D1}(n, \xi) D_{n-3} + s_{D2}(n, \xi) D_{n-1} + s_{D3}(n, \xi) D_{n+1} + s_{D4}(n, \xi) D_{n+3}\} P_n(\eta) \\ &= \begin{cases} -(\xi^2 + \eta^2)^2 f(\eta) & ; \quad \xi = \xi_1 \\ 0 & ; \quad \xi = \xi_2 \end{cases} \quad (\text{内圧}) \quad \dots\dots\dots (6) \\ &= \begin{cases} 0 & ; \quad \xi = \xi_1 \\ -(\xi^2 + \eta^2)^2 g(\eta) & ; \quad \xi = \xi_2 \end{cases} \quad (\text{外圧}) \quad \dots\dots\dots (6)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0 c^4 h^4 \xi \bar{\eta}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{t_{A1}(n, \xi) A_{n-2} + t_{A2}(n, \xi) A_n + t_{A3}(n, \xi) A_{n+2} + t_{B1}(n, \xi) B_{n-3} + t_{B2}(n, \xi) B_{n-1} \\ &\quad + t_{B3}(n, \xi) B_{n+1} + t_{B4}(n, \xi) B_{n+3} + t_{C1}(n, \xi) C_{n-2} + t_{C2}(n, \xi) C_n + t_{C3}(n, \xi) C_{n+2} \\ &\quad + t_{D1}(n, \xi) D_{n-3} + t_{D2}(n, \xi) D_{n-1} + t_{D3}(n, \xi) D_{n+1} + t_{D4}(n, \xi) D_{n+3}\} P_n'(\eta) \\ &= \begin{cases} 0 & ; \quad \xi = \xi_1 \\ 0 & ; \quad \xi = \xi_2 \end{cases} \quad (\text{内圧}) \quad \dots\dots\dots (7) \\ &= \begin{cases} 0 & ; \quad \xi = \xi_1 \\ 0 & ; \quad \xi = \xi_2 \end{cases} \quad (\text{外圧}) \quad \dots\dots\dots (7)' \end{aligned}$$

ここで、 $P_n'(\eta) = \partial P_n(\eta) / \partial \eta$  であり、また式中の  $s_{A1}(n, \xi)$ ,  $\dots$ ,  $t_{A1}(n, \xi)$ ,  $\dots$  は以下に示す通りである。

$$\left. \begin{aligned} s_{A1}(n, \xi) &= \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \{ (n-2)^2 q_{n-2}(\xi) - \xi q_{n-2}'(\xi) \} \\ s_{A2}(n, \xi) &= (n+1) n \xi^2 q_n(\xi) - 2 \xi^3 q_n'(\xi) + \frac{2}{(2n+3)(2n-1)} \{ (n+1)^2 n^2 q_n(\xi) - (3n^2 + 3n - 2) \xi q_n'(\xi) \} \\ s_{A3}(n, \xi) &= \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+5)(2n+3)} \{ (n+3)^2 q_{n+2}(\xi) - \xi q_{n+2}'(\xi) \} \\ t_{A1}(n, \xi) &= -\frac{(n-1)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)} q_{n-2}'(\xi), \quad t_{A2}(n, \xi) = \xi q_n(\xi) - \xi^2 q_n'(\xi) - \frac{2(n+2)(n-1)}{(2n+3)(2n-1)} q_n'(\xi) \\ t_{A3}(n, \xi) &= -\frac{(n+4)(n+2)}{(2n+5)(2n+3)} q_{n+2}'(\xi) \\ &\dots\dots\dots (8) \\ s_{B1}(n, \xi) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \{ (n-3)(n-3+2\nu) \xi q_{n-3}(\xi) - (3\xi^2 + 2 - 2\nu \xi^2) q_{n-3}'(\xi) \} \\ s_{B2}(n, \xi) &= \frac{n}{2n-1} \{ (n-1)(n+2\nu) \xi^3 q_{n-1}(\xi) \} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -(3+4\xi^2-2\nu\xi^2)\xi^2q_{n-1}'(\xi) + \frac{n}{(2n+3)(2n-1)(2n-3)}[3(n^2-1)\{n(n-1)\xi q_{n-1}(\xi) \\
 & -(3\xi^2+2-2\nu\xi^2)q_{n-1}'(\xi)\} - (n-1)(n^2-n-3)(1-2\nu)\xi q_{n-1}(\xi)] \\
 s_{B3}(n, \xi) = & \frac{n+1}{2n+3}\{(n+2)(n+1-2\nu)\xi^3q_{n+1}(\xi) \\
 & -(3+4\xi^2-2\nu\xi^2)\xi^2q_{n+1}'(\xi) + \frac{n+1}{(2n+5)(2n+3)(2n-1)}[3(n^2+2n-1)\{(n+2)(n+1)\xi q_{n+1}(\xi) \\
 & -(3\xi^2+2-2\nu\xi^2)q_{n+1}'(\xi)\} + (n+2)(n^2+3n-1)(1-2\nu)\xi q_{n+1}(\xi)] \\
 s_{B4}(n, \xi) = & \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(2n+7)(2n+5)(2n+3)}\{(n+4)(n+4-2\nu)\xi q_{n+3}(\xi) - (3\xi^2+2-2\nu\xi^2)q_{n+3}'(\xi)\} \\
 t_{B1}(n, \xi) = & \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\{(1-2\nu)(n-3)q_{n-3}(\xi) - (n-5+2\nu)\xi q_{n-3}'(\xi)\} \\
 t_{B2}(n, \xi) = & \frac{1}{2n-1}\{(2-2\nu)(n-1)\xi^2q_{n-1}(\xi) \\
 & -(n-2+2\nu)\xi^3q_{n-1}'(\xi) + \frac{1}{(2n+3)(2n-1)(2n-3)}[3(n-1)(n^2-3)\{(1-2\nu)q_{n-1}(\xi) \\
 & -\xi q_{n-1}'(\xi)\} + (2-2\nu)(n^2+n-3)\xi q_{n-1}'(\xi)] \\
 t_{B3}(n, \xi) = & \frac{1}{2n+3}\{(2-2\nu)(n+2)\xi^2q_{n+1}(\xi) \\
 & -(n+3-2\nu)\xi^3q_{n+1}'(\xi) + \frac{1}{(2n+5)(2n+3)(2n-1)}[3(n+2)(n^2+2n-2)\{(1-2\nu)q_{n+1}(\xi) \\
 & -\xi q_{n+1}'(\xi)\} - (2-2\nu)(n^2+n-3)\xi q_{n+1}'(\xi)] \\
 t_{B4}(n, \xi) = & \frac{(n+3)(n+2)}{(2n+7)(2n+5)(2n+3)}\{(1-2\nu)(n+4)q_{n+3}(\xi) - (n+6-2\nu)\xi q_{n+3}'(\xi)\}
 \end{aligned}$$

.....(9)

ただし,  $q_n'(\xi) = \partial q_n(\xi) / \partial \xi$  である. 残りの  $s_{cl}(n, \xi)$ ,  $t_{cl}(n, \xi)$  ( $l=1, 2, 3$ ) および  $s_{dl}(n, \xi)$ ,  $t_{dl}(n, \xi)$  ( $l=1, 2, 3, 4$ ) は上述の  $s_{Al}(n, \xi)$ ,  $t_{Al}(n, \xi)$  ( $l=1, 2, 3$ ) 及び  $s_{Bl}(n, \xi)$ ,  $t_{Bl}(n, \xi)$  ( $l=1, 2, 3, 4$ ) の右辺において第二種変形ルジャンドル関数  $q_n(\xi)$  を第一種変形ルジャンドル関数  $p_n(\xi)$  で置き換えればよい.

いま内圧あるいは外圧が一定の場合を考えると  $f(\eta) = g(\eta) = 1$  となる. そして式 (6), (6)' の右辺を

$$\begin{aligned}
 -(\xi^2 + \eta^2)^2 = & \{-(\xi^4 + 2\xi^2/3 + 1/5)\delta_0^{(n)} \\
 & -(4\xi^2/3 + 4/7)\delta_2^{(n)} - (8/35)\delta_4^{(n)}\}P_n(\eta)
 \end{aligned}$$

とルジャンドル関数で表し, 式 (6), (6)', (7), (7)' における  $P_n(\eta)$ ,  $P_n'(\eta)$  の係数を等置すれば未定係数  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  に関する無限連立一次方程式が得られ, これより求めた係数を用いて, 一定の内圧あるいは外圧を受ける中空へん平回転だ円体の任意の点における応力を求めることができる. ただし  $\delta_m^{(n)}$  はクロネッカーのデルタである.

**2.2 円形き裂面に一定内圧を受けるへん平回転だ円体**  $\xi_1=0$  とおくと  $a_1=c$ ,  $b_1=0$  となり, 内側のへん平回転だ円体は原点 0 を中心とする半径  $c$  の円形き裂となる. したがって式 (6), (7) において  $\xi_1=0$  とおいた場合は, 長半径  $a_2$ , 短半径  $b_2$  のへん平回転だ円体が一定内圧を受ける半径  $c$  の円形き裂を含む

場合に相当する.

さて本問題のき裂の変形はモード I であるから, 応力拡大係数は円柱座標のもとでは次式で定義され,

$$K_I = \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2\pi(r-c)}(\sigma_z)_{z=0} \quad \text{.....(10)}$$

これをへん平回転だ円体座標で表すと<sup>(5)</sup>

$$K_I = \sqrt{\pi c} \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi(\sigma_\beta)_{\eta=0} \quad \text{.....(11)}$$

となる. 特に一定内圧  $p_0$  を受ける円形き裂が無限体中にある場合の応力拡大係数  $K_{I\infty}$  は

$$K_{I\infty} = 2p_0\sqrt{c/\pi} \quad \text{.....(12)}$$

で与えられる.

### 3. 数 値 計 算

ポアソン比  $\nu$  を 0.3 とし, まず一定内圧あるいは外圧を受ける厚さ  $t=0.1a_1$  の中空へん平回転だ円体を考え, 内面の形状比  $b_1/a_1$  を 0.1, 0.2, 0.4, 0.6 および 0.8 と変えたときの応力分布を計算した. 次に, 一定の内圧を受ける形状比  $b_1/a_1=0.5$  の中空へん平回転だ円体の厚さ  $t$  を  $0.1a_1$ ,  $0.25a_1$  および  $0.5a_1$  と変えた場合について数値計算を行った. なおここで未定係数  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  に関する無限連立一次方程式を解くにあたり, 内外面における残余の応力  $\sigma_\alpha/p_0$ ,  $\tau_{\alpha\beta}/p_0$  の値がすべて  $10^{-3}$  以下になる項数で無限級数を打ち切ったところ, 内外圧ともに  $t/a_1=$

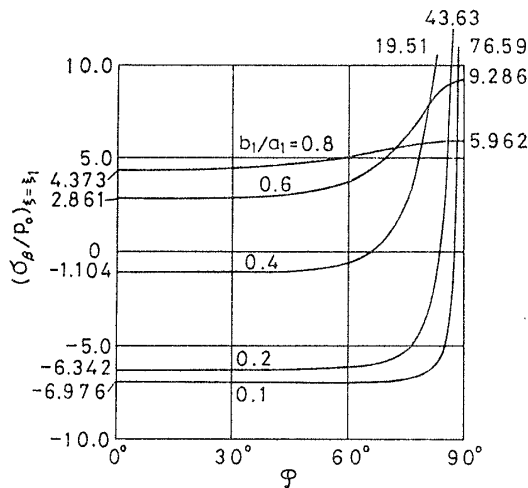
0.1 のとき  $b_1/a_1=0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  に対し打ち切り項数は 28, 24, 20, 14, 10 となり,  $b_1/a_1=0.5$  のときは  $t/a_1=0.1, 0.25, 0.5$  に対し 18, 16, 10 となった。

図 2~9 に一定内圧  $p_0$  を受ける厚さ  $t=0.1a_1$  の中空回転だ円体に生ずる応力分布を示す。なお参考のため  $t/a_1=0.1$  における形状比と  $z$  軸上の厚さとの関係を表 1 に示した。ただし  $a_1=1$  とする。

図 2 は中空回転だ円体内面における応力  $\sigma_\beta$  と  $\varphi$  との関係を示したものである。ここで,  $\varphi$  は  $z$  軸より測った角度で,  $\beta$  と  $\varphi$  の間には空か面上で  $\tan \beta = (b_1/a_1) \tan \varphi$  の関係がある。 $\varphi=0^\circ$  における応力は後述の図 11 の結果も参照すると,  $b_1/a_1 \geq 0.5$  では引張応力,  $b_1/a_1 \leq 0.4$  では圧縮応力となり, その値は  $\varphi$  のある角度まではほぼ一定値を保ち, さらに  $\varphi$  を増

表 1  $z$  軸上の厚さ

$b_1/a_1$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
$z$ 軸上の厚さ	0.369	0.300	0.208	0.155	0.122	0.110

図 2 内面上の応力  $\sigma_\beta$  の分布 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )

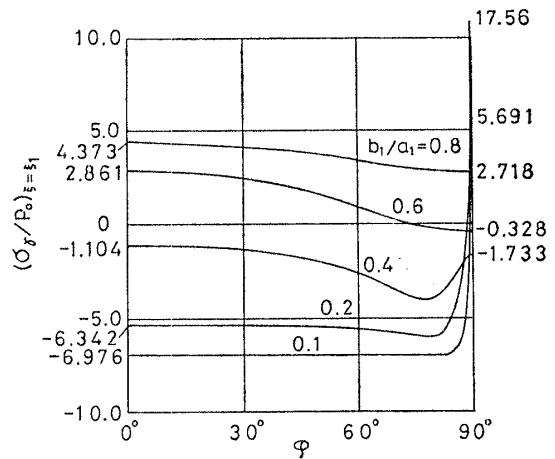
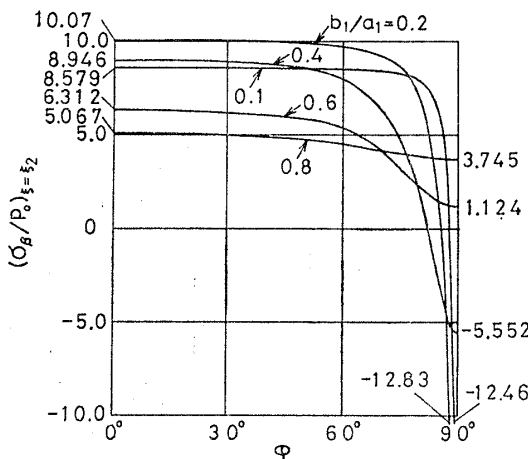
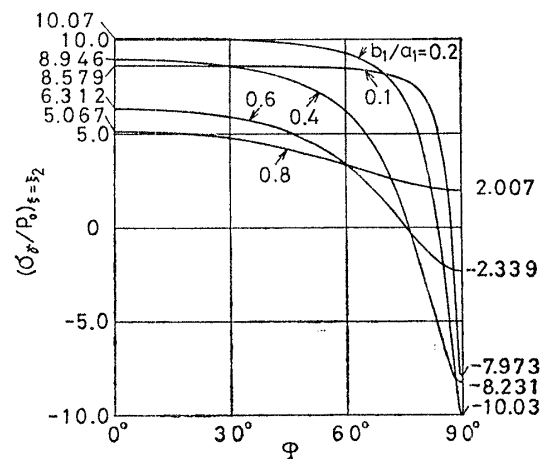
加すると形状比が小さいほど応力曲線の激しい立ち上りを示す。すなわち形状比が小さいほど応力集中が高くかつ局所的となる。

図 3 はだ円体外面における応力  $\sigma_\beta$  の分布を示したものである。応力  $\sigma_\beta$  は  $\varphi=0^\circ$  ではすべての形状比に対し引張応力であり, そのまま  $\varphi$  のある範囲まではほぼ一定値をとり, さらに  $\varphi$  を増加すると内面の場合とは逆に形状比が小さいほど急激に減少する。

図 4, 5 はそれぞれだ円体の内外面における応力  $\sigma_r$  の分布を示したものである。応力  $\sigma_r$  の分布は図 2, 3 に示した  $\sigma_\beta$  の分布とはほぼ同様の傾向を示しているが内面上では  $\varphi$  が大きくなると  $\sigma_r$  の値はゆるやかに減少している。

図 6 に  $z$  軸上の応力  $\sigma_\beta$  の分布を示した。すべての形状比に対し, 応力  $\sigma_\beta$  は内面から外面に向かって単調に増加する。

図 7~9 はそれぞれ  $r$  軸上の応力  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_r$  の分布を示したものである。応力  $\sigma_\alpha$  は形状比  $b_1/a_1 \geq 0.6$

図 4 内面上の応力  $\sigma_r$  の分布 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )図 3 外面上の応力  $\sigma_\beta$  の分布 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )図 5 外面上の応力  $\sigma_r$  の分布 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )

のときは内面から外面に向かって単調に増加するが、 $b_1/a_1 \leq 0.4$  では内面に近い位置で引張応力の極大値をもつ。これに対し応力  $\sigma_\beta$ ,  $\sigma_r$  の値は内面から外面に向かって単調に減少し、その減少の割合は  $b_1/a_1$  が小さいほど大きくなっている。特に応力  $\sigma_\beta$  は内面に

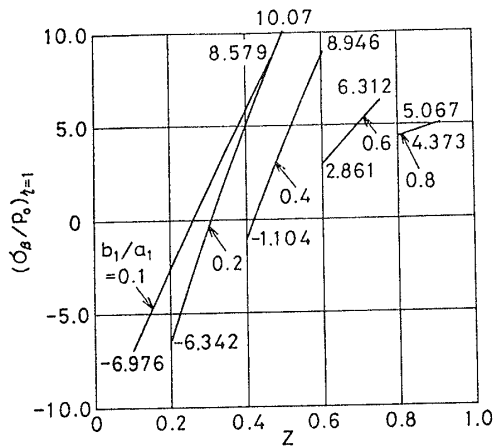


図 6  $z$  軸上の応力  $\sigma_\beta$  の分布 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )

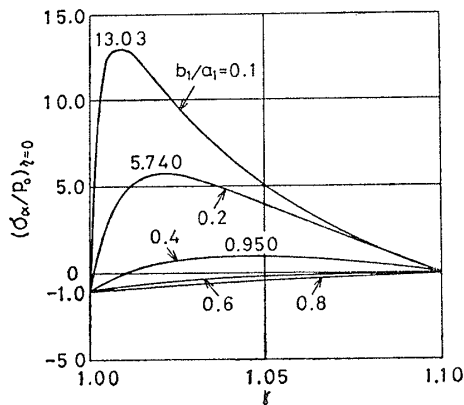


図 7  $r$  軸上の応力  $\sigma_\alpha$  の分布 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )

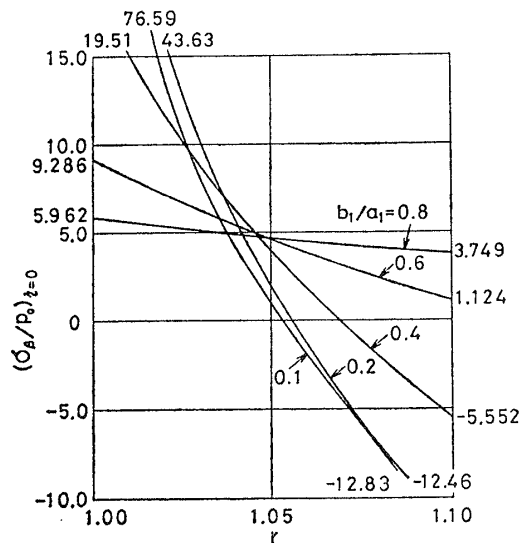


図 8  $r$  軸上の応力  $\sigma_\beta$  の分布 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )

において最大の引張応力を取り、その値はへん平化が進むにつれて非常に大きくなっている。以上図 2~9 で  $b_1/a_1=0.1$  の応力分布が他の形状比の場合と著しく異なっている。これはだ円体が円形き裂に近づくと応力集中が著しく大きくなるためである。

図 10 は一定外圧を受ける中空へん平回転だ円体の内面上の応力  $\sigma_\beta$  の分布を示したものである。 $\varphi=0^\circ$  における応力は  $b_1/a_1 \leq 0.4$  では引張応力,  $b_1/a_1 \geq 0.6$  では圧縮応力となり、その値は  $\varphi$  のある角度まではほぼ一定値を保ち、一定内圧を受ける場合の外面の応力分布 (図 3) によく似ている。これは一定外圧を受ける場合には、同じ大きさの一定内圧を受ける場合の応力値に 1 を加えたものの符号を逆転すれば得られるからである。したがって一定外圧を受ける場合の他の応力計算の結果については省略することとする。

次に、一定内圧がかかる形状比  $b_1/a_1=0.5$  の場合

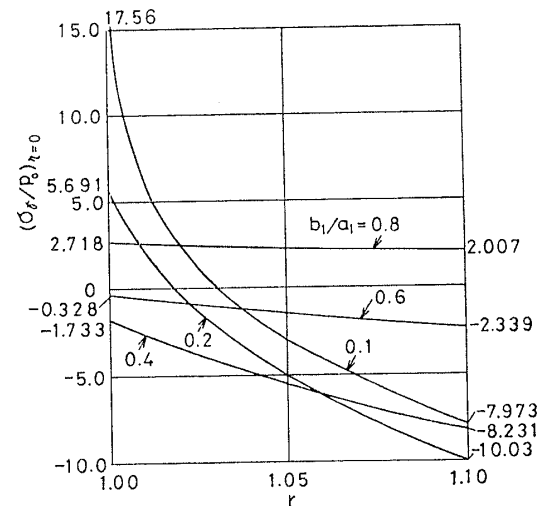


図 9  $r$  軸上の応力  $\sigma_r$  の分布 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )

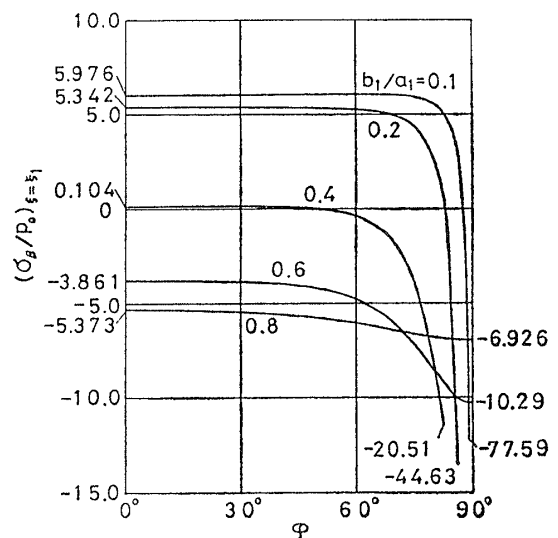


図 10 内面上の応力  $\sigma_\beta$  の分布 (外圧,  $t/a_1=0.1$ )

の中空回転だ円体の厚さ  $t$  を変えたときのだ円体の内面における応力分布を図 11, 12 に示した. いずれの場合も  $t/a_1$  が小さい程大きな応力値をとる. 特に  $t/a_1=0.1$  においてこの傾向は顕著である.

以上の結果から, 一定内圧を受ける厚さ  $t=0.1a_1$  の中空回転だ円体の主要な点における応力集中係数の値を図 13 に示した. ただし,

$$\sigma_A = (\sigma_\beta)_{\xi=\xi_1, \beta=0} = (\sigma_\gamma)_{\xi=\xi_1, \beta=0}$$

$$\sigma_B = (\sigma_\beta)_{\xi=\xi_2, \beta=0} = (\sigma_\gamma)_{\xi=\xi_2, \beta=0}$$

$$\sigma_C = (\sigma_\beta)_{\xi=\xi_1, \beta=\pi/2}, \quad \sigma_C' = (\sigma_\gamma)_{\xi=\xi_1, \beta=\pi/2}$$

$$\sigma_D = (\sigma_\beta)_{\xi=\xi_2, \beta=\pi/2}, \quad \sigma_D' = (\sigma_\gamma)_{\xi=\xi_2, \beta=\pi/2}$$

である. また薄膜理論<sup>(7)</sup>を用いて一定内圧を受ける回

転だ円体かくの応力  $(\sigma_\beta)_{\beta=\pi/2}$  および  $(\sigma_\gamma)_{\beta=\pi/2}$  を求め, 比較のために図中に破線で示した.  $1.0 \geq b_1/a_1 \geq 0.6$  の範囲では厳密解と薄膜理論による結果とほぼ一致するが,  $0.6 \geq b_1/a_1$  では両者の間にかかなりの相違が認められる. 著者の一人は既に中空へん長回転だ円体の場合, 厳密解と薄膜理論による結果とは厚さが薄い場合に比較的良く一致していることを示した<sup>(3)</sup>. しかし中空へん平回転だ円体の場合には薄膜理論が適用できるのは比較的へん平度の低い  $b_1/a_1 \geq 0.6$  の範囲に限られる.

次に応力拡大係数を求めるために, 極限値  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi(\sigma_\beta)_{\eta=0}$  を計算すると

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi(\sigma_\beta)_{\eta=0} = \Sigma_1 + \frac{\Sigma_2}{\xi^2} \dots \dots \dots (13)$$

となる. ここで

表 2 応力拡大係数  $K_I/K_{I\infty}$  ( $\nu=0.3$ )

$c/a_2$	$b_2/a_2$				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	1.745	1.141	1.048	1.022	1.011
0.4	4.312	1.745	1.289	1.141	1.079
0.6	8.645	2.807	1.745	1.384	1.223
0.8	15.14	4.313	2.403	1.745	1.447

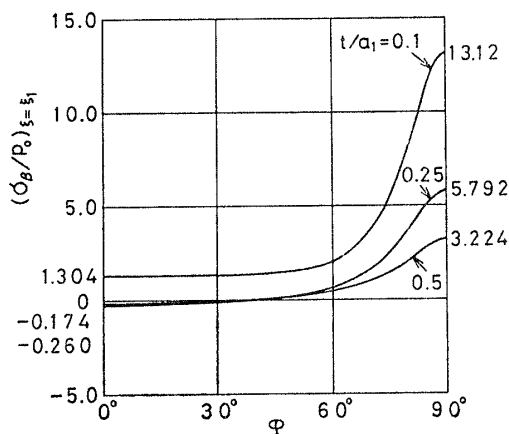


図 11 内面上の応力  $\sigma_\beta$  の分布 (内圧,  $b_1/a_1=0.5$ )

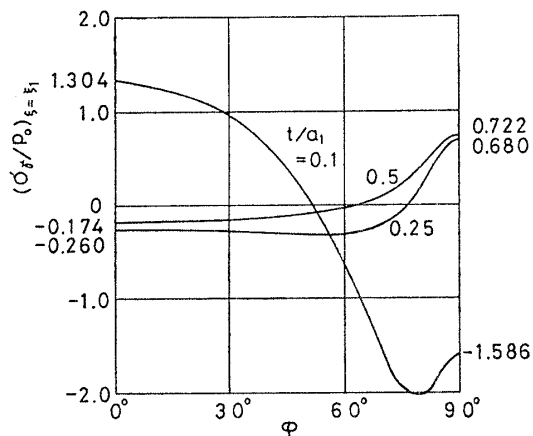


図 12 内面上の応力  $\sigma_\gamma$  の分布 (内圧,  $b_1/a_1=0.5$ )

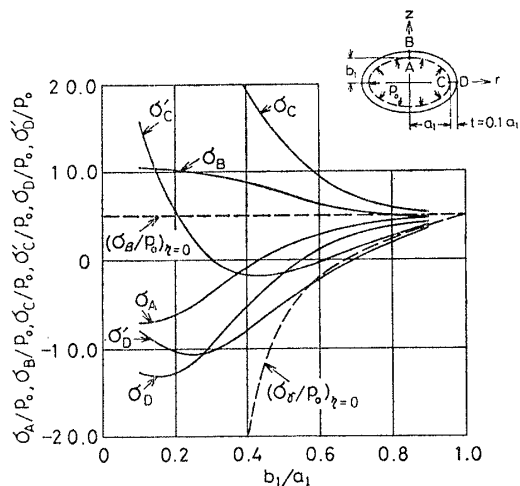


図 13 形状比による応力集中係数の変化 (内圧,  $t/a_1=0.1$ )

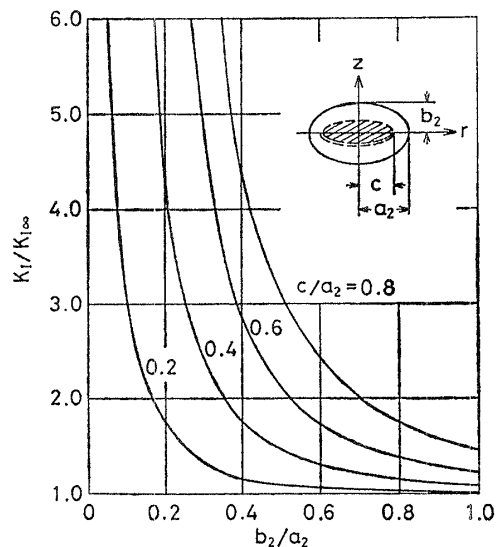


図 14 応力拡大係数 ( $\nu=0.3$ )

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} P_{2m}(0) \left[ \{2m(2m+1)-1\} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{4m-4k-1}{(2k+1)(2m-k)} \frac{(2m-2k)!}{2^{2m-2k-1}(m-k-1)!(m-k)!} \right. \\ & \left. - \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m-1)!m!} \right] - \sum_{m=2}^{\infty} A_{2m} P_{2m}(0) \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k \frac{4m-4k-1}{(2k+1)(2m-k)} \frac{(2m-2k+1)!}{2^{2m-2k-1}(m-k-2)!(m-k)!} \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1} P_{2m}(0) (2-2\nu)(2m+1) \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{4m-4k+1}{(2k+1)(2m-k+1)} \frac{(2m-2k)!}{2^{2m-2k}(m-k)!(m-k)!} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\Sigma_2 = -A_0 - \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} P_{2m}(0) \left[ \frac{(2m)!}{2^{2m}m!m!} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{4m-4k-1}{(2k+1)(2m-k)} \frac{(2m-2k)!}{2^{2m-2k-1}(m-k-1)!(m-k)!} \right] \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここで項数を多くするにしたがって,  $\Sigma_2 \rightarrow 0$  となるので  $\Sigma_2/\xi^2$  の項を省略すると, 結局  $K_I$  は式 (11) より  $K_I = p_0 \sqrt{\pi c} \Sigma_1 \dots\dots\dots(16)$

となる. 式 (16) より応力拡大係数を求めて表 2 および図 14 に示した. 表中  $b_2/a_2=1.0$  は円形き裂を有する球体の場合に相当するが, これは既に Srivastava ら<sup>(6)</sup>により与えられており, その結果と本解法による結果とは完全に一致した.

#### 4. 結 言

中空へん平回転だ円体が軸対称の内圧あるいは外圧を受ける問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析し, 一定の内圧あるいは外圧を受ける場合を取り上げ数値計算を行い, だ円体内部における応力分布状態を明らかにした. さらに特別の場合として, 円形き裂面に一定内圧を受けるへん平回転だ円体の応力拡大係数も求めた. 結果を要約すると次のようになる.

- (1) 中空回転だ円体の内面あるいは外面上の応力  $\sigma_\theta$  および  $\sigma_r$  は  $\varphi=0^\circ$  から  $\varphi=90^\circ$  近くまではあまり変化しないが,  $\varphi=90^\circ$  近傍で急激に増加または減少し, その傾向は形状比の小さいほど顕著である.
- (2) 中空回転だ円体の  $z$  軸あるいは  $r$  軸上の応

力  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\sigma_r$  はそれぞれの軸に沿って単調に減少あるいは増大する. ただし応力  $\sigma_\alpha$  の場合, 形状比が小さくなると軸上の途中で極値をとる.

(3) 厚さが薄い場合, 本研究と薄膜理論による結果と比較すると, 中空へん平回転だ円体の形状比  $b_1/a_1 \geq 0.6$  のときは比較的良く一致するが,  $b_1/a_1$  が小さくなるにしたがい両者の差が大きくなる.

(4) 応力拡大係数  $K_I$  は円形き裂の半径  $c$  の増加とともに増加し, まただ円体の形状比  $b_2/a_2$  の減少とともに増大する. なお表 1 は北海道大学岸田路也先生のご示唆により掲載したものであり, ここに謝意を表する.

#### 文 献

- (1) Sternberg, E., ほか 2 名, *Proc. 1st Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1952), 209.
- (2) Muki, R., *Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1954), 135.
- (3) 藤田, *Proc. 29th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1979), 105.
- (4) 藤田・土田, 機論, **46**-405, A (昭 55), 525.
- (5) 土田・内山, 機論, **45**-393 (昭 54), 455.
- (6) Srivastava, K. N. and Dwivedi, J. P., *Int. J. Eng. Sci.*, **9** (1971), 399.
- (7) Timoshenko, S., *Theory of Plates and Shells*, (1954), McGraw-Hill.

#### 討 論

〔質問〕 岸田路也 (北海道大学工学部)

薄膜理論による解との比較について

結言 (3) は, ここで扱われた特別な場合に言えることなのか. つまり,  $t/a_1$  の他の場合はどうなのか. 又, 薄膜理論による解が良い近似を与える  $b_1/a_1$  の限界は, いかなる量を基準として設けられたものか. (図 6~9, 13 が考慮の対象となっていると思う.)

〔回答〕 深海用船艇では, その形状, 潜水する深さ, 用いる材料にもよるが  $t/a_1=0.1 \sim 0.05$  の程度である. 本論文では安全側をとり  $t/a_1=0.1$  として数

値計算を行った. また,  $t/a_1=0.5, 0.05$  の場合についても数値計算を行ったところ, やはり  $t/a_1=0.1$  の場合と同様に薄膜理論が適用出来るのは  $b_1/a_1 > 0.6$  までである.

なお, 薄膜理論が良い近似を与える形状比の限界は, たとえば図 13 において, 内外面におけるすべての応力値が薄膜理論による値とほぼ同じオーダーであれば近似的な値を与えているとして決めたもので, 数値的にこの値と一致するには  $b_1/a_1 \geq 0.9$  以上の非常に限られた場合になる.