

539. 4. 013

へん長回転だ円体状空かを有する厚板の二軸一様引張り*

土田 栄一郎**, 八重 檉 昭徳***
 Eiichiro TSUCHIDA, Akinori YAEGASHI
 中原 一郎****, 小玉 正雄**
 Ichiro NAKAHARA, Masao KODAMA

1. 緒 言

有限な厚さを有し無限の広がりをもった厚板内に空かや介在物が存在し引張荷重を受ける問題は、材料欠陥に対する強度を評価する上に重要であり古くから多くの研究がなされている。欠陥が球かあるいは球状介在物の場合については、1959年、Ling⁽¹⁾が球かを有する厚板が一様引張荷重を受ける問題を Michell の重調和応力関数を用いて解析しており、同じ問題を Fox⁽²⁾が円孔を有する帯板に対する Howland の方法を拡張して Boussinesq の応力関数を用いて解析している。さらに、球かあるいは球状介在物を有する厚板の一軸引張り⁽³⁾⁽⁴⁾、ならびに偏心球かを有する厚板の問題⁽⁵⁾⁽⁶⁾等が解析され強度設計上有用な結果が導かれてきた。しかるにより一般的な形状である回転だ円体状欠陥を有する厚板の問題は解析されていないようである。

さきに著者らは、へん長回転だ円体状空かを有する半無限体の引張り問題⁽⁷⁾を解析し自由表面の応力分布に及ぼす影響を明らかにした。本研究は、ひきつづいてへん長回転だ円体状空かを有する厚板が二軸一様引張りを受ける軸対称問題を、三次元弾性論に基づいて厳密に解析したものである。解析においては Boussinesq の応力関数を用い、これにへん長回転だ円体調和関数および円柱調和関数を与え、両者を互いに座標変換することにより空か面と厚板表面の境界条件を同時に満足させた。さらに数値計算を行い、空か近傍の

応力分布および最大引張応力に及ぼす空かの大きさや形状比の影響を明らかにするとともに球かの場合と比較検討した。

2. 解 析 法

図1に示されるように、板厚の半分を単位長さとしてすべての長さの基準にとり、へん長回転だ円体状空かの短軸および長軸の長さをそれぞれ $2a$, $2b$ とする。Oを座標原点として円柱座標 (r, θ, z) およびへん長回転だ円体座標 (α, β, γ) を採用すれば、両座標間には

$$\left. \begin{aligned} r &= c \sinh \alpha \sin \beta = c \bar{q} \bar{p}, & \theta &= \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$z = c \cosh \alpha \cos \beta = c q p$$

の関係がある。ここで

$$\begin{aligned} q &= \cosh \alpha, & \bar{q} &= \sinh \alpha \\ p &= \cos \beta, & \bar{p} &= \sin \beta \end{aligned}$$

であり $2c$ は焦点間距離である。

いま、円柱座標のもとで Boussinesq の調和応力関数 φ_0, φ_3 を用いて変位を次のように表せば、これは物体力のないねじりなし軸対称の場合の三次元弾性基礎方程式の解になる。

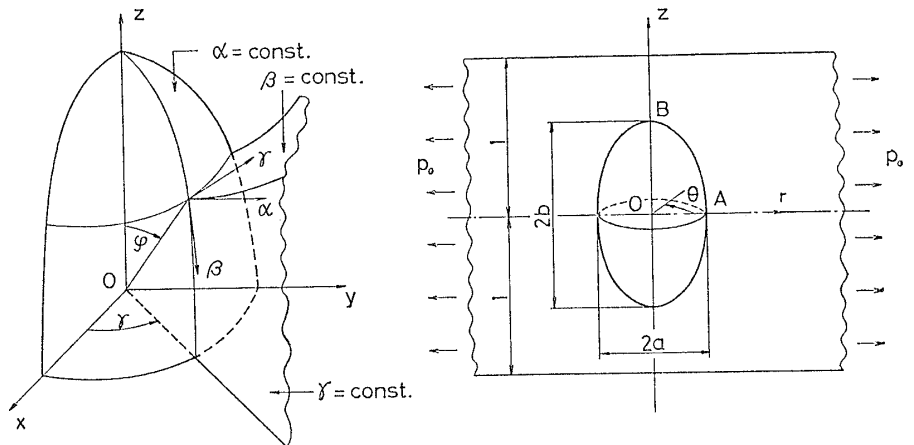


図 1 座 標 系

* 昭和 54 年 4 月 4 日 第 56 期通常総会講演会において論文講演として講演，原稿受付 昭和 53 年 10 月 6 日。

** 正員，埼玉大学工学部 (〒 338 浦和市下大久保 255)。

*** 学生員，埼玉大学工学部。

**** 正員，東京工業大学。

$$2Gu_r = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \quad 2Gw_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3 \dots\dots\dots (2)$$

ここで, u_r, w_z はそれぞれ r, z 方向の変位成分, $\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0$, $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial r^2 + (1/r)(\partial/\partial r) + \partial^2/\partial z^2$, ν はポアソン比, G は横弾性係数である.

また, 座標間の関係式 (1) を用いて, 式 (2) をへん長回転だ円体座標に変換すれば次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_\alpha &= h\bar{q} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} + ch\bar{q}p \left\{ q \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \\ 2Gv_\beta &= -h\bar{p} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} - chq\bar{p} \left\{ p \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで, u_α, v_β はそれぞれ α, β 方向の変位成分

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0, \quad \nabla^2 \equiv h^2 \bar{q}^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + 2h^2 q \frac{\partial}{\partial q} + h^2 \bar{p}^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2h^2 p \frac{\partial}{\partial p}, \quad h^2 = \frac{1}{c^2(q^2 - p^2)}$$

である. さらに, 変位とひずみの関係, ひずみと応力の関係を用いて, 式 (3) より応力成分を求めると次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= h^2 \left\{ \bar{q}^2 \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial q^3} + c^2 h^2 \bar{p}^2 \left(q \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial q^2} - p \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial p^2} \right) \right\} + ch^2 \left[q \bar{q}^2 p \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q^2} \right. \\ &\quad \left. + \{ c^2 h^2 q^2 \bar{p}^2 - 2(1-\nu)\bar{q}^2 \} p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - \{ c^2 h^2 p^2 + 2\nu \} q \bar{p}^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right] \\ \sigma_\beta &= h^2 \left\{ \bar{p}^2 \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial p^3} + c^2 h^2 \bar{q}^2 \left(q \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial q^2} - p \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial p^2} \right) \right\} + ch^2 \left[q p \bar{p}^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial p^2} \right. \\ &\quad \left. - \{ c^2 h^2 \bar{q}^2 p^2 + 2(1-\nu)\bar{p}^2 \} q \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} + \{ c^2 h^2 q^2 - 2\nu \} \bar{q}^2 p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} \right] \\ \sigma_r &= h^2 \left(q \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \right) + ch^2 \left\{ (q^2 - 2\nu \bar{q}^2) p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - (p^2 + 2\nu \bar{p}^2) q \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right\} \\ \tau_{\alpha\beta} &= h^2 \bar{q} \bar{p} \left\{ - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial q \partial p} + c^2 h^2 \left(q \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} \right) \right\} - ch^2 \bar{q} \bar{p} \left[q p \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q \partial p} \right. \\ &\quad \left. + \{ c^2 h^2 p^2 - (1-2\nu) \} q \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - \{ c^2 h^2 q^2 + (1-2\nu) \} p \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

まず, φ_0, φ_3 に空か中心 O を原点とする次のような調和関数を与える.

$$[I] \quad \varphi_0 = \frac{p_0}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} (r^2 - 2z^2) = \frac{p_0}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} c^2 (\bar{q}^2 \bar{p}^2 - 2q^2 p^2), \quad \varphi_3 = - \frac{p_0}{1+\nu} z = - \frac{p_0}{1+\nu} c q p \dots\dots\dots (5)$$

式 (5) より導かれる変位および応力成分は

$$u_r = (1-\nu) \frac{p_0}{E} r, \quad v_\theta = 0, \quad w_z = -2\nu \frac{p_0}{E} z, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = p_0, \quad \sigma_z = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここで E は縦弾性係数である. したがって, 応力関数 [I] から得られる解は, 厚板を無限遠方において単位面積当たり p_0 の力で r 方向に一様に引張った場合の応力状態を示している. いま, この厚板内にへん長回転だ円体面 ($\alpha = \alpha_0 = \text{const}$) を考えると, この面には次のような応力を生じている.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\alpha}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= -c^2 h_0^2 q_0^2 \bar{q}_0^2 + q_0^2, & \left(\frac{\sigma_\beta}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= c^2 h_0^2 q_0^2 \bar{q}_0^2 - \bar{q}_0^2 \\ \left(\frac{\sigma_r}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= 1, & \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= c^2 h_0^2 q_0 \bar{q}_0 p \bar{p} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで, $q_0 = (q)_{\alpha=\alpha_0}$, $\bar{q}_0 = (\bar{q})_{\alpha=\alpha_0}$, $h_0 = (h)_{\alpha=\alpha_0}$ である.

それゆえ, 無限遠方においてすべての変位・応力が消失し, 以下に示される境界条件を満足する解を導いて, 応力関数 [I] の解に重ね合わせれば, へん長回転だ円体状空かを有する厚板の二軸一様引張りに対する解が得られる.

境界条件: (i) 厚板上下面 $z = \pm 1$ において

$$(\sigma_z)_{z=\pm 1} = (\tau_{rz})_{z=\pm 1} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

(ii) 空か面 $\alpha = \alpha_0$ において

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{p_0}\right)_{\alpha=\alpha_0} = c^2 h_0^2 q_0^2 \bar{q}_0^2 - q_0^2, \quad \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0}\right)_{\alpha=\alpha_0} = -c^2 h_0^2 q_0 \bar{q}_0 p \bar{p} \dots\dots\dots(9)$$

境界条件式(8), (9)を満足する解を導くために, へん長回転だ円体状空かを有する厚板がへん長回転だ円体領域を除く無限体領域と厚板領域の共通領域であることに注目して, 前者に対してだ円体の焦点に特異点を持つへん長回転だ円体調和関数を, 後者に対して円柱調和関数を用いて, 応力関数 φ_0, φ_3 に次のような調和関数を与える.

$$[II] \quad \varphi_0 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m Q_{2m}(q) P_{2m}(p), \quad \varphi_3 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m Q_{2m+1}(q) P_{2m+1}(p) \dots\dots\dots(10)$$

$$[III] \quad \varphi_0 = p_0 \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) J_0(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda, \quad \varphi_3 = p_0 \int_0^{\infty} \lambda \phi_2(\lambda) J_0(\lambda r) \sinh \lambda z d\lambda \dots\dots\dots(11)$$

ここで, A_m, B_m および $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり, $P_n(p)$ および $Q_n(q)$ はそれぞれ n 次の第一種および第二種ルジャンドル関数, $J_n(\lambda r)$ は n 次の第一種ベッセル関数である.

特に, 板厚に比べて空かが十分小さい場合には応力関数 [I], [II] だけで解析でき, 式(10)において

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{2c^2 q_0}{3D} \left[3q_0^2 \left(Q_1 - \frac{1}{q_0^2} \right) + 2 \left\{ (1-\nu) Q_1 + \frac{\nu}{q_0^2} + 1 \right\} \right] \\ A_1 &= \frac{4c^2 q_0}{3D} \left\{ (1-\nu) Q_1 + \frac{\nu}{q_0^2} + 1 \right\}, \quad A_m = 0 \quad (m \geq 2) \\ B_0 &= \frac{2c q_0}{D} \left\{ Q_1 - \frac{1}{q_0^2} \right\}, \quad B_m = 0 \quad (m \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

とおけば, 境界条件式(9)は満足される. ここで

$$D \equiv 2 \left\{ (1+\nu) Q_1^2 + \frac{2(1-\nu) + 3\bar{q}_0^2}{\bar{q}_0^2} Q_1 - \frac{q_0^2 - \nu}{\bar{q}_0^4} \right\}, \quad Q_1 \equiv Q_1(q_0) = \frac{q_0}{2} \log \frac{q_0 + 1}{q_0 - 1} - 1$$

である. この結果はへん長回転だ円体状空かが無限体中に存在する場合の解で, これより導かれる変位および応力成分は, Sternberg-Sadowsky⁽⁸⁾ および Edwards⁽⁹⁾ が求めた結果に一致する.

まず, 厚板上下面における境界条件(i)を満足させるために, 関係式⁽¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} Q_n(q) P_n(p) &= c \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) i^{-n} j_n(i\lambda c) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (z > 0) \\ Q_n(q) P_n(p) &= (-1)^n c \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) i^{-n} j_n(i\lambda c) e^{\lambda z} d\lambda \quad (z < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

を用いて応力関数 [II] を書き改めると

$$[IV] \quad \left. \begin{aligned} \varphi_0 &= p_0 \sum_{m=0}^{\infty} c A_m \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) i^{-2m} j_{2m}(i\lambda c) e^{-\lambda z} d\lambda \\ \varphi_3 &= p_0 \sum_{m=0}^{\infty} c B_m \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) i^{-(2m+1)} j_{2m+1}(i\lambda c) e^{-\lambda z} d\lambda \end{aligned} \right\} (z > 0) \dots\dots\dots(14)$$

となる. ここで i は虚数単位, $j_n(i\lambda c)$ は n 次の第一種球ベッセル関数である.

応力関数 [III], [IV] から応力成分を求め, 厚板上面の境界条件式(8)を満足させ, また $z < 0$ についても関係式(13)を用いて変換し, 同様にして厚板下面の条件を満足させると, 結局

$$\left(\frac{\sigma_z}{p_0}\right)_{z=\pm 1} = \int_0^{\infty} \lambda^2 J_0(\lambda r) \left[\phi_1(\lambda) \cosh \lambda + \phi_2(\lambda) \{ \lambda \sinh \lambda - 2(1-\nu) \cosh \lambda \} \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} c \left\{ A_m i^{-2m} j_{2m}(i\lambda c) + \frac{1}{\lambda} (\lambda + 2 - 2\nu) B_m i^{-(2m+1)} j_{2m+1}(i\lambda c) \right\} e^{-\lambda} \right] d\lambda = 0 \dots\dots\dots(15)$$

$$\pm \left(\frac{\tau_{rz}}{p_0}\right)_{z=\pm 1} = \int_0^{\infty} \lambda^2 J_1(\lambda r) \left[-\phi_1(\lambda) \sinh \lambda + \phi_2(\lambda) \{ (1-2\nu) \sinh \lambda - \lambda \cosh \lambda \} \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} c \left\{ A_m i^{-2m} j_{2m}(i\lambda c) + \frac{1}{\lambda} (\lambda + 1 - 2\nu) B_m i^{-(2m+1)} j_{2m+1}(i\lambda c) \right\} e^{-\lambda} \right] d\lambda = 0 \dots\dots\dots(16)$$

となる. 式(15), (16)にそれぞれハンケル逆変換をほどこし, 未知関数 $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$ を求めると次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} c \left\{ A_m i^{-2m} j_{2m}(i\lambda c) \frac{3-4\nu-2\lambda+e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda+2\lambda} + B_m i^{-(2m+1)} j_{2m+1}(i\lambda c) \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2}{\lambda(\sinh 2\lambda+2\lambda)} \right\} \\ \phi_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} c \left\{ A_m i^{-2m} j_{2m}(i\lambda c) \frac{2}{\sinh 2\lambda+2\lambda} + B_m i^{-(2m+1)} j_{2m+1}(i\lambda c) \frac{3-4\nu+2\lambda-e^{-2\lambda}}{\lambda(\sinh 2\lambda+2\lambda)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

次に、空か面における境界条件 (ii) を満足させるためにベッセル関数とルジャンドル関数の関係式⁽¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} J_0(\lambda r) \cosh \lambda z &= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) i^{-2n} j_{2n}(i\lambda c) P_{2n}(q) P_{2n}(p) \\ J_0(\lambda r) \sinh \lambda z &= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3) i^{-(2n+1)} j_{2n+1}(i\lambda c) P_{2n+1}(q) P_{2n+1}(p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

を用いて応力関数 [III] を書き改めると

$$[V] \quad \varphi_0 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_{2n}(q) P_{2n}(p), \quad \varphi_3 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_{2n+1}(q) P_{2n+1}(p) \dots\dots\dots(19)$$

となる。ここで

$$\alpha_n = (4n+1)c \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \int_0^{\infty} \frac{3-4\nu-2\lambda+e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda+2\lambda} i^{-(2n+2m)} j_{2n}(i\lambda c) j_{2m}(i\lambda c) d\lambda \right. \\ \left. + B_m \int_0^{\infty} \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2}{\lambda(\sinh 2\lambda+2\lambda)} i^{-(2n+2m+1)} j_{2n}(i\lambda c) j_{2m+1}(i\lambda c) d\lambda \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\beta_n = (4n+3)c \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \int_0^{\infty} \frac{2\lambda}{\sinh 2\lambda+2\lambda} i^{-(2n+2m+1)} j_{2n+1}(i\lambda c) j_{2m}(i\lambda c) d\lambda \right. \\ \left. + B_m \int_0^{\infty} \frac{3-4\nu+2\lambda-e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda+2\lambda} i^{-(2n+2m+2)} j_{2n+1}(i\lambda c) j_{2m+1}(i\lambda c) d\lambda \right\} \dots\dots\dots(21)$$

である。

そこで、応力関数 [II] および [V] より応力成分を求め、さらに境界条件式 (9) をルジャンドル関数で書き直した後満足させると次のようになる。

$$\left(\frac{\sigma_{\alpha}}{p_0 c^2 h^4} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (s_{A1} A_{n-1} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+1} + s_{B1} B_{n-2} + s_{B2} B_{n-1} + s_{B3} B_n + s_{B4} B_{n+1} \\ + s_{\alpha 1} \alpha_{n-1} + s_{\alpha 2} \alpha_n + s_{\alpha 3} \alpha_{n+1} + s_{\beta 1} \beta_{n-2} + s_{\beta 2} \beta_{n-1} + s_{\beta 3} \beta_n + s_{\beta 4} \beta_{n+1}) P_{2n}(p) \\ = -\frac{8}{35} c^2 q_0^2 P_4(p) + \left(\frac{2}{3} q_0^2 + \frac{2}{21} \right) c^2 q_0^2 P_2(p) - \left(\frac{2}{3} q_0^2 - \frac{2}{15} \right) c^2 q_0^2 P_0(p) \dots\dots\dots(22)$$

$$\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0 c^2 h^4 \bar{q} \bar{p}} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (t_{A1} A_{n-1} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+1} + t_{B1} B_{n-2} + t_{B2} B_{n-1} + t_{B3} B_n + t_{B4} B_{n+1} \\ + t_{\alpha 1} \alpha_{n-1} + t_{\alpha 2} \alpha_n + t_{\alpha 3} \alpha_{n+1} + t_{\beta 1} \beta_{n-2} + t_{\beta 2} \beta_{n-1} + t_{\beta 3} \beta_n + t_{\beta 4} \beta_{n+1}) P_{2n}'(p) \\ = \frac{2}{35} c^2 q_0 P_4'(p) - \left(\frac{1}{3} q_0^2 - \frac{1}{7} \right) c^2 q_0 P_2'(p) \dots\dots\dots(23)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} s_{A1} &= \frac{2n(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)} \{ (2n-2) Q_{2n-2}(q_0) - q_0 Q_{2n-2}'(q_0) - \bar{q}_0^2 Q_{2n-2}''(q_0) \} \\ s_{A2} &= -\frac{1}{(4n+3)(4n-1)} [(2n+1) 2n Q_{2n}(q_0) - 2(4n^2+2n-1) q_0 Q_{2n}'(q_0) \\ &\quad - \{ (4n+3)(4n-1) \bar{q}_0^2 + 2(4n^2+2n-1) \} \bar{q}_0^2 Q_{2n}''(q_0)] \\ s_{A3} &= -\frac{(2n+2)(2n+1)}{(4n+5)(4n+3)} \{ (2n+3) Q_{2n+2}(q_0) + q_0 Q_{2n+2}'(q_0) + \bar{q}_0^2 Q_{2n+2}''(q_0) \} \\ s_{B1} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)c}{(4n-1)(4n-3)(4n-5)} \{ (1-2\nu)(2n-3) q_0 Q_{2n-3}(q_0) \\ &\quad - (1-\bar{q}_0^2 + 2\nu \bar{q}_0^2) Q_{2n-3}'(q_0) - q_0 \bar{q}_0^2 Q_{2n-3}''(q_0) \} \\ s_{B2} &= \frac{2nc}{(4n+3)(4n-1)(4n-3)} [(2n-1) \{ 4n^2 - 2n - 3 + 2\nu(12n^2 + 2n - 6) \\ &\quad + [16n^2 - 9] \bar{q}_0^2 \} q_0 Q_{2n-1}(q_0) - \{ 2(1-\nu)(16n^2 - 9) \bar{q}_0^4 - (4n^2 - 3)(1 - \bar{q}_0^2 \\ &\quad + 2\nu \bar{q}_0^2 \} Q_{2n-1}'(q_0) + \{ 4n^2 - 3 + (16n^2 - 9) \bar{q}_0^2 \} q_0 \bar{q}_0^2 Q_{2n-1}''(q_0)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

$$\begin{aligned}
 s_{B3} &= -\frac{(2n+1)c}{(4n+5)(4n+3)(4n-1)} [(2n+2)(4n^2+6n-1+2\nu(12n^2+10n-4) \\
 &\quad + [4n+5][4n-1]\bar{q}_0^2)q_0Q_{2n+1}(q_0) + \{2(1-\nu)(4n+5)(4n-1)\bar{q}_0^4 \\
 &\quad - (4n^2+4n-2)(1-\bar{q}_0^2+2\nu\bar{q}_0^2)Q_{2n+1}'(q_0) - \{4n^2+4n-2 \\
 &\quad + (4n+5)(4n-1)\bar{q}_0^2\}q_0\bar{q}_0^2Q_{2n+1}''(q_0)] \\
 s_{B4} &= -\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)c}{(4n+7)(4n+5)(4n+3)} \{(1-2\nu)(2n+4)q_0Q_{2n+3}(q_0) \\
 &\quad + (1-\bar{q}_0^2+2\nu\bar{q}_0^2)Q_{2n+3}'(q_0) + q_0\bar{q}_0^2Q_{2n+3}''(q_0)\} \\
 t_{A1} &= \frac{(2n-1)(2n-3)}{(4n-1)(4n-3)} Q_{2n-2}'(q_0) \\
 t_{A2} &= \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} [(4n+3)(4n-1)q_0Q_{2n}(q_0) + \{4(2n-1)(n+1) - (4n+3)(4n-1)q_0^2\}Q_{2n}'(q_0)] \\
 t_{A3} &= \frac{(2n+4)(2n+2)}{(4n+5)(4n+3)} Q_{2n+2}'(q_0) \\
 t_{B1} &= -\frac{(2n-1)(2n-2)c}{(4n-1)(4n-3)(4n-5)} \{(1-2\nu)(2n-3)Q_{2n-3}(q_0) + (5-2n-2\nu)q_0Q_{2n-3}'(q_0)\} \\
 t_{B2} &= -\frac{c}{(4n+3)(4n-1)(4n-3)} [(2n-1)\{(1-2\nu)(12n^2-9) - 2(1-\nu)(16n^2-9)q_0^2\}Q_{2n-1}(q_0) \\
 &\quad - \{2(1-n-\nu)(16n^2-9)\bar{q}_0^2 - (8n^3-12[1-2\nu]n^2+4[1-\nu]n+3[1-4\nu])\}q_0Q_{2n-1}'(q_0)] \\
 t_{B3} &= -\frac{c}{(4n+5)(4n+3)(4n-1)} [(2n+2)\{6(1-2\nu)(2n^2+2n-1) \\
 &\quad - 2(1-\nu)(4n+5)(4n-1)q_0^2\}Q_{2n+1}(q_0) + \{(3+2n-2\nu)(4n+5)(4n-1)\bar{q}_0^2 \\
 &\quad + (8n^3+24[1-\nu]n^2+2[11-14\nu]n+3+4\nu)\}q_0Q_{2n+1}'(q_0)] \\
 t_{B4} &= -\frac{(2n+3)(2n+2)c}{(4n+7)(4n+5)(4n+3)} \{(1-2\nu)(2n+4)Q_{2n+3}(q_0) - 2(3+n-\nu)q_0Q_{2n+3}'(q_0)\} \\
 &\dots\dots\dots(25)
 \end{aligned}$$

であり、' はそれぞれの変数による微分を表す。また、 $s_{\alpha i}$, $s_{\beta i}$, $t_{\alpha i}$, $t_{\beta i}$ はそれぞれ $s_{\alpha i}$, $s_{\beta i}$, $t_{\alpha i}$, $t_{\beta i}$ に含まれる第二種ルジャンドル関数 $Q_n(q_0)$ を第一種ルジャンドル関数 $P_n(q_0)$ に置き換えたものとなる。

式 (22), (23) でそれぞれ $P_{2n(p)}$, $P_{2n(p)}'$ の各係数を等置すれば、 A_n , B_n に関する無限連立方程式が得られる。これらを A_n , B_n について解けば、へん長回転た円体状空かを有する厚板の二軸一様引張りの解は完全に求まる。そして、全体の変位および応力各成分は応力関数 [I], [II], [III] を重ね合わせて得られる。

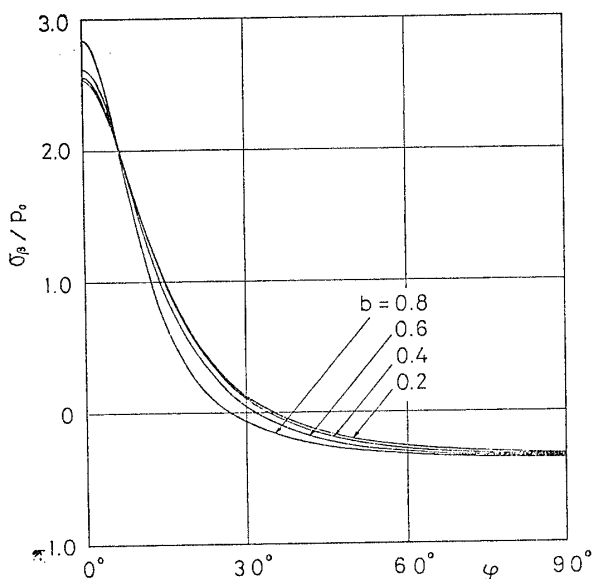


図 2 空か面上の σ_β の分布 ($s=0.5$)

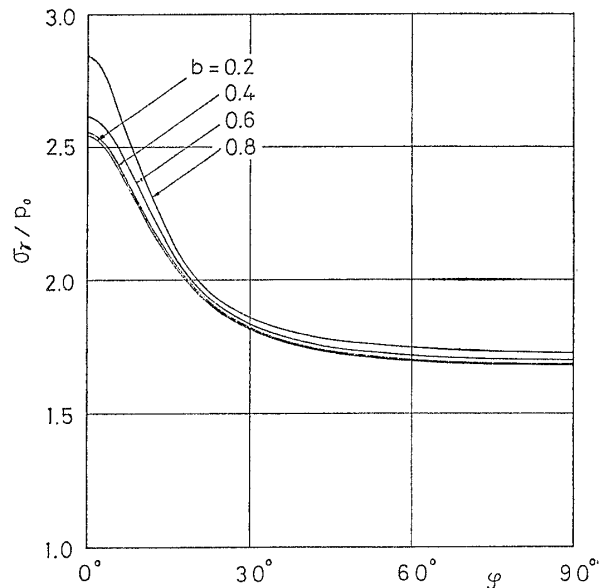


図 3 空か面上の σ_γ の分布 ($s=0.5$)

3. 数 値 計 算

ポアソン比を $\nu=0.3$ とし、まず形状比 $s=a/b=0.5$ として $a=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の各場合について計算し、さらに形状比をいくつか変化させた場合について数値計算を行った。計算にあたっては、式 (20), (21) の α_n, β_n に含まれる積分値が必要となるが、これはシンプソン則によって数値積分を行って求めた。すべての無限級数の収束は良好であるが、空かが大きくなるとともに次第に悪くなるので、最終的に得られる応力値の有効数字が3けた以上になるように、 A_n, B_n を8~10項とって計算を行った。以下にこれらの係数より得られる空か近傍の応力を示す。

図2は $s=0.5$ の場合の空か面における σ_β の分布を示したものである。ここで、 φ は z 軸から測った角

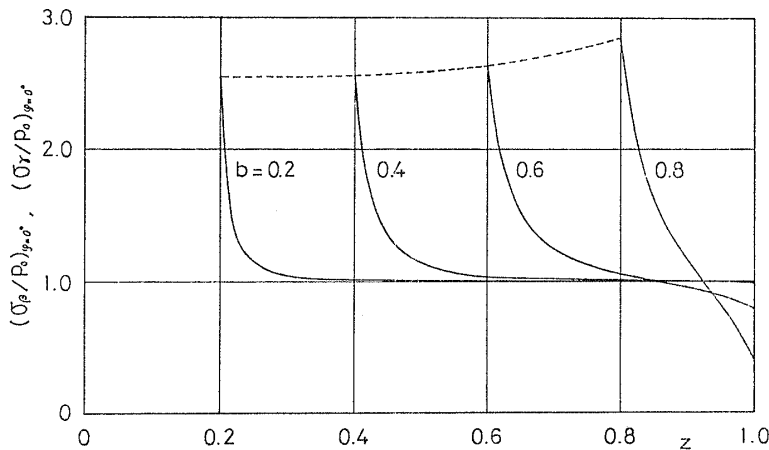


図4 z 軸上の σ_β, σ_r の分布 ($s=0.5$)

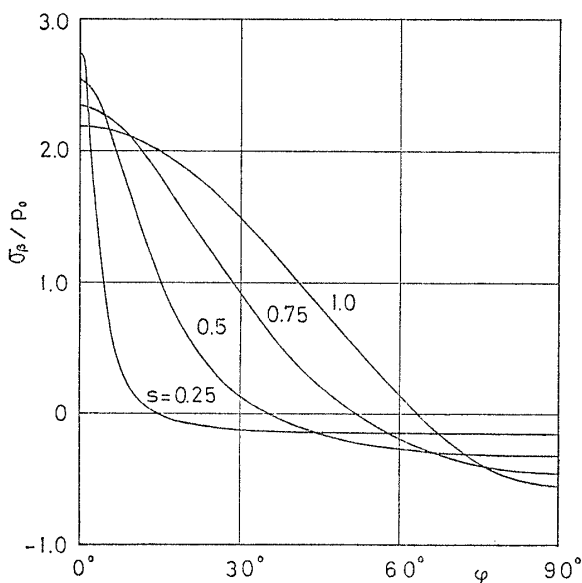


図5 空か面上の σ_β の分布 ($b=0.2$)

度で、空か面においては β と $\tan \varphi = (a/b) \tan \beta$ なる関係がある。応力 σ_β は、 $\varphi=0^\circ$ (図1の点B) で引張応力の極大値をとり、 $\varphi=30^\circ$ 近傍で零となる。さらに φ が大きくなると圧縮応力となり、 $\varphi=90^\circ$ (点A) で圧縮応力は最大となるがその値は点Bに生じる引張応力に比べて非常に小さい。また、 $\varphi=60^\circ$ 以上ではあまり空かの大きさの影響を受けない。

図3は $s=0.5$ の場合の空か面における σ_r の分布を示したものである。 φ の全域にわたり引張応力であり、 b の大きさによる影響は $\varphi < 10^\circ$ で顕著である。また、 σ_β と同様引張応力の極大値は $\varphi=0^\circ$ (点B) で生じる。

図4に $s=0.5$ の場合の z 軸上の応力 $(\sigma_\beta)_{\varphi=0^\circ} = (\sigma_r)_{\varphi=0^\circ} = (\sigma_r)_{r=0}$ の分布を示す。 σ_β, σ_r は空か面において最大引張応力 $(\sigma_r)_{\max}$ を生じ、空か面から離れるにしたがって急速に減少し、厚板表面で最小となる。また、 b が小さい場合には空かの影響は空かのごく近傍にしか及ばないが、 b が大きくなるにつれて空かの影響の及ぶ範囲はしだいに広がっている。また、図に示した点線は $(\sigma_r)_{\max}$ の b の大きさによる変化を示しており、この値は b の増加とともに漸増する。

図5, 6は $b=0.2$ とし、形状比 $s=a/b$ を $s=0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させた場合の空か面における σ_β および σ_r の分布を示したものである。ここで、 $s=1.0$ は球かの

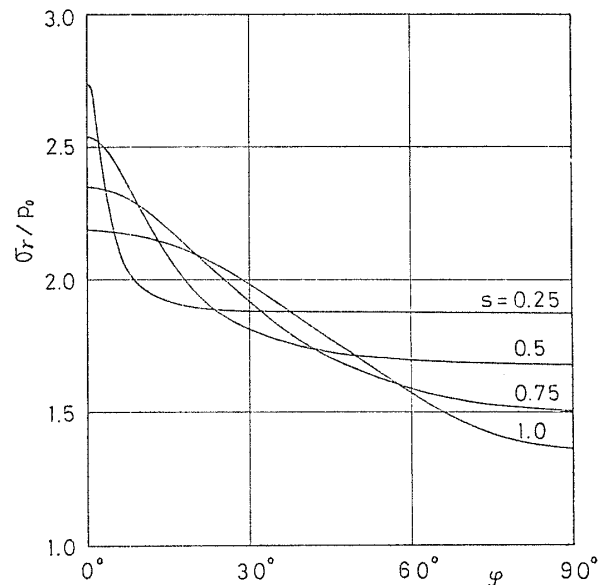


図6 空か面上の σ_r の分布 ($b=0.2$)

場合であり, 土田ら⁽³⁾によって求められた結果を使用した. σ_β については, 点A ($\varphi=90^\circ$) に生じる最大圧縮応力は形状比 s が減少するとともに値は減少しているが, 点B ($\varphi=0^\circ$) に生じる最大引張応力は逆に球かの場合が最も小さく s が減少するにしたがって増加する. また球かの場合と比べると, 形状比 s が減少するにしたがって φ が小さい範囲を除いて一定値に近づく. σ_r については φ のすべての範囲にわたって引張応力であるが, その傾向は σ_β と似ている.

以上の結果より, 最大引張応力は空か面上の点Bに

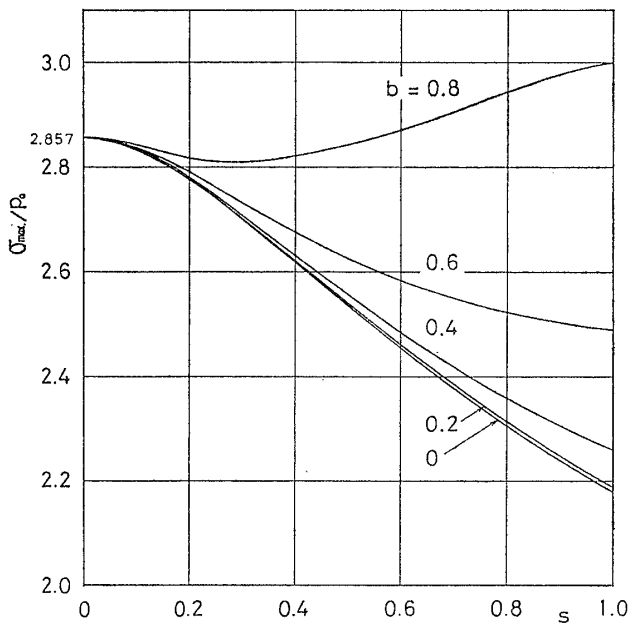


図7 σ_{\max} の形状比 s による変化

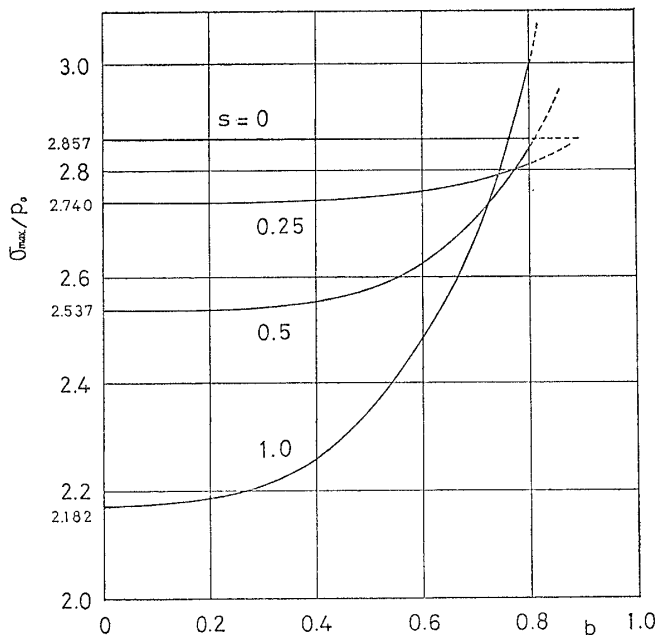


図8 σ_{\max} の長軸の長さによる変化

生じる σ_β , σ_r であることがわかった. そこで, この最大引張応力を

$$\sigma_{\max} = (\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=0^\circ} = (\sigma_r)_{\alpha=\alpha_0, \varphi=0^\circ}$$

として, これと形状比 s および長軸の長さ $2b$ との関係求めたのがそれぞれ図7, 8である. σ_{\max} は空かの大きさにより傾向が異なり, ほぼ b が 0.75 付近を境としてこれより大きい範囲では $s=1$ すなわち球かの場合が最大であるのに対し, これより小さい範囲では球かの場合が最も小さく σ_{\max} は s の減少とともに増加し $s=0$ の針状き裂の場合が最大となる. また, s は小さいほど空かの大きさの影響は少なくなり, $s=0$ では空かの大きさの影響は見られず無限体中に存在する針状き裂の場合の $\sigma_{\max}=2.857 p_0$ に一致する.

4. 結 言

1個のへん長回転だ円体状空かを有する厚板が二軸一様引張りを受ける軸対称問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析する方法を示した. 理論解に基づいて数値計算を行い, 空か近傍の応力分布ならびに応力集中に及ぼす空かの大きさあるいは形状比による影響を明らかにした.

得られた結果を要約すると以下のとおりである.

(1) 最大引張応力は空か面上の厚板表面に最も近い点で生じ, 空かが大きくなるにしたがって増加する. 最大圧縮応力は空か面上の曲率半径の最も大きい点で生じ形状比の影響は受けるが空かの大きさにはあまり影響を受けない.

(2) 空か面における応力 σ_β および σ_r の分布曲線は, 形状比 $s=a/b$ が零に近づくにつれ, φ が小さい範囲を除いて一定に近づく.

(3) 空か面に生じる最大引張応力は, 空かが小さい範囲では形状比 $s=0$ の針状き裂の場合が最も大きい, 空かがかなり大きくなると逆に $s=1.0$ の球かの場合が最も大きくなる.

なお, 数値計算には東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 を使用した.

文 献

- (1) Ling, C.B., *Trans. ASME, Ser. E*, 26-2 (1959-6), 235.
- (2) Fox, N., *J. Mech. Appl. Math.*, 13-2(1960), 228.
- (3) 土田・中原, 機論, 42-354 (昭51-2), 377.
- (4) 土田・ほか3名, *Proc. 26th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1976), 137.

- (5) Ling, C. B. and Tsai, C. P., *Acta Mechanica*, 7-2/3 (1969), 169; 7-4 (1969), 262.
 (6) 土田・ほか 3 名, 機論, 41-352 (昭 50-12), 3366.
 (7) 土田・ほか 3 名, 機講論, No. 780-3 (昭 53-4), 140.
 (8) Sadowsky, M. A. and Sternberg, E., *J. Appl. Mech.*, 16-2 (1949), 149.
 (9) Edwards, R. H., *J. Appl. Mech.*, 18-1 (1951), 19.
 (10) Nicholson, J. W., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, Ser. A, 224 (1924), 320.

討 論

〔質問〕 長谷川久夫 (広島電機大学)

(1) Boussinesq の応力関数を軸対称の場合に変形して応用した論文, 興味深く拝見させていただいた. 明解な解法であるが, これを一軸一様引張りの場合に拡張することは容易か. 非軸対称のとき, 式(2)などを式(3), (4)の形に変換しても解法の不便さは生じないか.

(2) 空かが大きくなると無限級数の収束性が悪くなることの原因(数学的, 物理的)をお伺いできれば幸いである. また, 無限積分の収束性は, 空かの大きさには関係しなかったか.

(3) 式(10)の応力関数〔II〕はどのような特異性をもっているのか. また, その特異性の性質にあまり神経質にならずに(それが考察領域からはずれていれば), 普通, 妥当な結果が得られるようであるが, これは, そこにどのような原理(たとえばサン・ブナンの原理)が働いているからか.

〔回答〕 (1) 一軸一様引張りの非軸対称問題は, これを二軸一様引張りと同様に純粋せん断荷重が作用する場合に分け, 文献(3)に示した六つの応力関数を用いて同様な手法で解析できると考えるが, そのプロセスはかなり複雑なものになると思う. この問題も, 是非解析したいと思っている. また非軸対称のときの, 式(2)等の式(3), (4)への変換は特に支障はないと思う.

(2) 物理的な原因としては, 空かが大きくなると空か面と厚板表面との干渉により複雑な変形をするようになるためである. この複雑な変形を表すためには, その変形が複雑であればあるほど数学的には無限級数の項数が多く必要となり, 結局級数の収束性が悪くなる. 無限積分の収束性も空かの大きさに影響を受け, 空かが大きくなるにつれて収束は悪くなる. 実際の数値積分では, あらかじめ被積分関数の形状を調べ被積分関数の値が 10^{-17} 程度になれば十分収束したものとみなしそこで積分を打ち切った.

(3) 第二種ルジャンドル関数 $Q_n(q)$ の性質から, 応力関数〔II〕は回転だ円体の焦点に特異点をもつ関数である. また, 特異性は解析に重要な役割を果たしている. 実部と虚部が調和関数である複素解析関数が全平面上で必ず特異点をもつことから分かるように, 三次元の調和関数も全空間において一つ以上の特異点をもつ. この特異点を考察領域からはずし, かつ与えら

付表 1

b	s	σ_{\max}/p_0
0	0	2.857
0.1938	0.0394	2.854
0.52	0.0385	2.854
0.775	0.0323	2.855

れた境界面に都合のよい応力分布を生じるように, 適当に配置して解を求めている. 特異性は数学的には集中荷重に対応したもので, 配置されたこれらの集中荷重の干渉によって境界条件を満たしているわけである. ただし, 集中荷重が作用する場合にはこの特異性を利用する.

〔質問〕 石川博将 (北海道大学工学部)

へん長回転だ円体調和関数と円柱調和関数を用いた精力的な研究に対し敬意を表する.

(1) 417 ページ左欄 3 行め, $a=0.2, \dots$ は $b=0.2, \dots$ の誤記ではないか.

(2) $s=0$ の結果は無限体中に存在する針状き裂の場合の $\sigma_{\max}=2.857 p_0$ と一致するとあるが, $b=0 \sim 0.8$ とし $a=0$ としたときの実際の計算結果か. 図 8 からはそのように理解されるが, また, $b > 0.8$ ではどうか.

〔回答〕 (1) ご指摘のとおり, $a=0.2, \dots$ は $b=0.2, \dots$ の誤りである.

(2) $s=0$ の針状き裂の場合は, 式(22), (23)で $\alpha_0=0(q_0=1)$ とおくと $Q_n(q_0)$ は無限大になるため直接は求められず次のように変形する. すなわち式(22), (23)で, $\bar{q}_0^2 s_{Ai} = \bar{s}_{Ai}$, $\bar{q}_0^2 s_{Bi} = \bar{s}_{Bi}$, $\bar{q}_0^2 s_{a1} = \bar{s}_{a1}$, $\bar{q}_0^2 s_{b1} = \bar{s}_{b1}$ ($\bar{t}_{Ai}, \bar{t}_{Bi}, \dots$ についても同じ), および $A_n/\bar{q}_0^2 = \bar{A}_n$, $B_n/\bar{q}_0^2 = \bar{B}_n$, $\alpha_n/\bar{q}_0^2 = \bar{\alpha}_n$, $\beta_n/\bar{q}_0^2 = \bar{\beta}_n$ とおく. そこで $q_0=1$ とすると \bar{s}_{a1} , \bar{s}_{b1} , \bar{t}_{a1} , \bar{t}_{b1} はすべて零になる. したがって $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$ の項は消失し \bar{A}_n , \bar{B}_n だけが残る. この解は無限体中に針状き裂が存在する場合と同じになる. このように式の上で無限体の解と一致するため, 図で示した結果は実際に式(22), (23)において $b=0 \sim 0.8$ とし, $a=0$ とした計算結果ではない. また, $b > 0.8$ でも無限体の解に一致する. 以上の結果を検証するために, 式(22), (23)において s を零に近づけたときの σ_{\max} の値を付表 1 に示した. この表からいずれの b の値に対しても, s が零に近づくとき無限体の結果に近づくことが分かる.