

539.382 : 539.4.013

2 球状介在物を有する弾性体の非軸対称問題*

土田栄一郎**, 中原 一郎***, 小玉正雄**

1. 緒 言

鋳鉄中の黒鉛, 鋼に含まれる硫化物, けい酸塩化物, アルミナ系介在物などにみられるように実用金属材料中には種々の介在物が存在し, そのために応力集中を生じ材料の強度低下の原因となっている. とくに荷重が繰返し作用する場合, 介在物が疲労き裂の発生および進展に関与し疲労寿命等に大きな影響を及ぼしている例が数多く報告されている^{(1)~(3)}.

それゆえ介在物による力学的挙動を明らかにすることは強度設計上重要である. 従来から1個の球状あるいはだ円体状介在物を有する無限体についてはかなり解析されてきたが, 有限体内に介在物が存在する場合^{(4)~(8)}や介在物同志の干渉についての解析^{(9)~(13)}がなされたのは最近のことである. ここでは介在物の干渉について考える. 二つの球状介在物の干渉問題は1966年 Shelley-Yi-Yuan Yu⁽⁹⁾が軸対称問題を解析したのを始め幾人かの研究者^{(10)~(12)}によって解かれているが, これらの研究はいずれも介在物を剛体とし回転双極座標を用い応力状態が軸対称の問題を扱っている. さらに Moschovidis-Mura⁽¹³⁾は固有ひずみ法により二つのだ円体状介在物の軸対称問題を解析している. 本報告は多数の球状介在物の干渉による応力集中現象を明らかにするために, 二つの球状介在物を有する弾性体が無限遠方で中心線に垂直に一軸引張りを受ける非軸対称問題を, 三次元弾性理論に基づいて解析したものである. 解析では, 無限体については既報の2球かの解⁽¹⁴⁾を用い, 介在物については球体に対する解を求め両者が完全接着しているとして境界条件を満足させた.

2. 解 法

2.1 応力関数と境界条件 図1に示すように二つの球状介在物の中心 O_1, O_2 を原点とし, 中心線を共通の z 軸とする二つの直角座標 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ および球座標 $(R_1, \theta, \varphi_1), (R_2, \theta, \varphi_2)$ をとる. 一般性

を失うことなく中心間距離を $\overline{O_1O_2}=1$ とすることができ, 両球状介在物の半径をそれぞれ a_1, a_2 とする. 二つの直角座標の間には

$$x_1=x_2, \quad y_1=y_2, \quad z_1=z_2+1 \quad \cdots \cdots (1)$$

の関係がある.

さて二つの中心 O_1, O_2 を原点として表した変位ベクトルをそれぞれ u_1, u_2 とすれば全体の変位 u は

$$u=u_1+u_2 \quad \cdots \cdots (2)$$

で表される. そこでノイバーの調和応力関数 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ を用いて変位を表示すると

$$2Gu_1 = \text{grad} [\varphi_{01} + x_1\varphi_{11} + y_1\varphi_{21} + z_1\varphi_{31}] - 4(1-\nu)[\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}] \quad \cdots \cdots (3)$$

$$2Gu_2 = \text{grad} [\varphi_{02} + x_2\varphi_{12} + y_2\varphi_{22} + z_2\varphi_{32}] - 4(1-\nu)[\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}] \quad \cdots \cdots (4)$$

となる. ここで $\varphi_0 \sim \varphi_3$ は調和関数であり後に付した添字 $i=1, 2$ は O_i を原点とする座標系に関する量を表す. また G は横弾性係数, ν はポアソン比である.

球面 $S_1(R_1=a_1)$ の境界条件を満足させるには式(4)を O_1 を原点とする座標 $(x_1, y_1, z_1), (R_1, \theta, \varphi_1)$ で表す. 式(1)を用い式(4)を変形すれば

$$2Gu_2 = \text{grad} [\varphi_{02} - \varphi_{32} + x_1\varphi_{12} + y_1\varphi_{22} + z_1\varphi_{32}] - 4(1-\nu)[\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}] \quad \cdots \cdots (5)$$

となる. 式(3)と(5)を比較すると φ_{01} に $\varphi_{02} - \varphi_{32}$ が対応する. すなわち z 方向の座標変換により φ_{02} に $-\varphi_{32}$ が付加されることになる.

同様に球面 $S_2(R_2=a_2)$ の境界条件を満足させるに

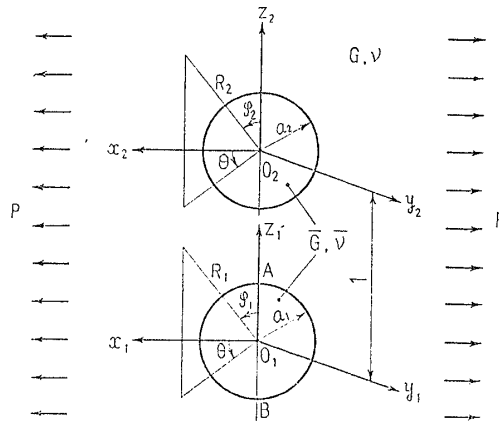


図1 座 標 系

* 昭和51年4月3日 第53期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和53年3月31日.

** 正員, 埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255).

*** 正員, 東京工業大学.

は式 (3) を O_2 を原点とする座標で表す。式 (1) を用い式 (5) を変形すれば

$$2G\mathbf{u}_1 = \text{grad} [\varphi_{01} + \varphi_{31} + x_2\varphi_{11} + y_2\varphi_{21} + z_2\varphi_{31}] - 4(1-\nu)[\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}] \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。この場合は φ_{01} に φ_{31} が付加されることが分かる。

さて二つの球状介在物を有する無限体が無限遠方で x 軸方向に単位面積当たり p の引張荷重を受ける場合、母材と介在物が完全に接着しているとすれば境界条件は次のようになる。

境界条件

(i) 無限遠方で

$$(\sigma_x)_{r \rightarrow \infty} = p, \text{ その他の応力成分は零 } \quad \dots\dots\dots (7)$$

(ii) 介在物境界面 $R_i = a_i$ ($i=1, 2$) で

$$\left. \begin{aligned} (u_R)_{R_i=a_i} &= (\bar{u}_R)_{R_i=a_i}, & (v_\theta)_{R_i=a_i} &= (\bar{v}_\theta)_{R_i=a_i} \\ (w_\varphi)_{R_i=a_i} &= (\bar{w}_\varphi)_{R_i=a_i}, & (\sigma_R)_{R_i=a_i} &= (\bar{\sigma}_R)_{R_i=a_i} \\ (\tau_{R\theta})_{R_i=a_i} &= (\bar{\tau}_{R\theta})_{R_i=a_i}, & (\tau_{R\varphi})_{R_i=a_i} &= (\bar{\tau}_{R\varphi})_{R_i=a_i} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで $\bar{}$ は介在物に関する諸量を表すものとする。

まず、 O_1 を原点として φ_{01} , φ_{31} に次のような調和関数を与える⁽¹⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{01} &= -\frac{p}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} R_1^2 P_2(\mu_1) \\ &\quad + \frac{p}{12} R_1^2 P_2^2(\mu_1) \cos 2\theta \\ \varphi_{31} &= -\frac{p}{2(1+\nu)} R_1 P_1(\mu_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで $P_n(\mu)$, $P_n^m(\mu)$ はそれぞれ n 次のルジャンドル関数ならびにルジャンドル陪関数であり $\mu = \cos \varphi$ である。これより導かれる変位および応力成分を直角座標で表すと

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_n^m(\mu_2) \cos m\theta}{R_2^{n+1} \sin m\theta} &= \sum_{s=m}^{\infty} m d_{n,s}' \frac{R_1^s P_s^m(\mu_1) \cos m\theta}{c^{n+s+1} \sin m\theta}, & \frac{R_n^m(\mu_1) \cos m\theta}{R_1^{n+1} \sin m\theta} &= \sum_{s=m}^{\infty} \frac{m d_{n,s}'' R_2^s P_s^m(\mu_2) \cos m\theta}{c^{n+s+1} \sin m\theta} \\ m d_{n,s}' &= (-1)^{n-m} m d_{n,s}, & m d_{n,s}'' &= (-1)^{s-m} m d_{n,s}, & m d_{n,s} &= \frac{(n+s)!}{(n-m)!(s+m)!} \quad (0 < R_1, R_2 < c) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで c は中心間距離 $\overline{O_1 O_2}$ を表し、 $m=0$ のときは添字を省略する。

式 (5), (14) を用い応力関数 [II] を O_1 を原点とする座標で表し、球面 S_1 の条件を満足させると以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (u_R)_{R_1=a_1} &= (\bar{u}_R)_{R_1=a_1} \text{ より} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{(n+1) A_n^1}{a_1^{n+2}} - \frac{n(n+3-4\nu)}{2n-1} \frac{B_{n-1}^1}{a_1^n} - \frac{(n+1)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}^1}{a_1^{n+2}} \right. \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\infty} (A_s^2 - B_s^2) d_{s,n}' n a_1^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) + \sum_{s=0}^{\infty} B_s^2 \left\{ d_{s,n-1}' \frac{n(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) \right. \\ &\quad \left. \left. + d_{s,n+1}' \frac{(n+1)(n-2+4\nu)}{2n+3} a_1^{n+2} \right\} \right] P_n(\mu_1) - \frac{1}{F} \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \bar{A}_n^1 a_1^{n-1} + \frac{n(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{B}_{n-1}^1 a_1^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)(n-2+4\nu)}{2n+3} \bar{B}_{n+1}^1 a_1^{n+2} \right] P_n(\mu_1) = -\frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} a_1 P_0(\mu_1) + \frac{a_1}{3} P_1(\mu_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{p}{E} x_1, & v_y &= -\nu \frac{p}{E} y_1, & w_z &= -\nu \frac{p}{E} z_1 \\ \sigma_x &= p, & \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。 E は縦弾性係数である。

これは介在物のない無限体を x 軸方向に一様に引張った場合の解である。この応力状態は二軸一様引張荷重と純粋せん断荷重が作用する場合に二分できるから、それぞれに対応する解を軸対称解、非軸対称解として別々に求めた後、両者を重ね合わせて2球状介在物を有する弾性体の一軸引張りの解を求めた。

2.2 軸対称解 軸対称解に対する応力関数として

φ_0 , φ_3 に次のような調和関数を与える。

(i) 母材領域 ($R_i > a_i$)

$$[I] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{01} &= -\frac{p}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} R_1^2 P_2(\mu_1) \\ \varphi_{31} &= -\frac{p}{2(1+\nu)} R_1 P_1(\mu_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$[II] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{0i} &= p \sum_{n=0}^{\infty} A_n^i \frac{P_n(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \\ \varphi_{3i} &= p \sum_{n=0}^{\infty} B_n^i \frac{P_n(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(ii) 介在物領域 ($R_i < a_i$)

$$[III] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{0i} &= p \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^i R_i^n P_n(\mu_i) \\ \varphi_{3i} &= p \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n^i R_i^n P_n(\mu_i) \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで A_n^i , B_n^i , \bar{A}_n^i , \bar{B}_n^i ($i=1, 2$) は境界条件から決定される未定係数である。

まず球面 S_1 ($R_1 = a_1$) の境界条件を満足させるために次の数学公式⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾を用いる。

$$\left. \begin{aligned} (w_\varphi)_{R_1=a_1} &= (\bar{w}_\varphi)_{R_1=a_1} \text{ より} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{A_n^1}{a_1^{n+2}} - \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} \frac{B_{n-1}^1}{a_1^n} - \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}^1}{a_1^{n+2}} - \sum_{s=0}^{\infty} (A_s^2 - B_s^2) d_{s,n}' \right. \\ &\quad \times a_1^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) - \sum_{s=0}^{\infty} B_s^2 \left\{ d_{s,n-1}' \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) + d_{s,n+1}' \right. \\ &\quad \times \left. \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} a_1^n \right\} \left. \right] P_n'(\mu_1) - \frac{1}{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\bar{A}_n^1 a_1^{n-1} - \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{B}_{n-1}^1 a_1^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \bar{B}_{n+1}^1 a_1^{n+1} \right] P_n'(\mu_1) = -\frac{P_2'(\mu_1)}{6} a_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_R)_{R_1=a_1} &= (\bar{\sigma}_R)_{R_1=a_1} \text{ より} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) \frac{A_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{n\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{B_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \right. \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\infty} (A_s^2 - B_s^2) d_{s,n}' n(n-1) a_1^{n-2} + \sum_{s=0}^{\infty} B_s^2 \left\{ d_{s,n-1}' \frac{n(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right. \\ &\quad + d_{s,n+1}' (n+1) \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} a_1^n \left. \right\} \left. \right] P_n(\mu_1) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1) \bar{A}_n^1 a_1^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-4-4\nu)}{2n-1} \bar{B}_{n-1}^1 a_1^{n-2} + (n+1) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} \bar{B}_{n+1}^1 a_1^n \right] P_n(\mu_1) = -\frac{P_0(\mu_1)}{3} + \frac{P_2(\mu_1)}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{R\varphi})_{R_1=a_1} &= (\bar{\tau}_{R\varphi})_{R_1=a_1} \text{ より} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2) \frac{A_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{n^2-2(1-\nu)\}}{2n-1} \frac{B_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \right. \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (A_s^2 - B_s^2) d_{s,n}' (n-1) a_1^{n-2} - \sum_{s=0}^{\infty} B_s^2 \left\{ d_{s,n-1}' \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right. \\ &\quad + d_{s,n+1}' \frac{\{(n+1)^2-2(1-\nu)\}}{2n+3} a_1^n \left. \right\} \left. \right] P_n'(\mu_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n-1) \bar{A}_n^1 a_1^{n-2} + \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} \right. \\ &\quad \times \left. \bar{B}_{n-1}^1 a_1^{n-2} + \frac{\{(n+1)^2-2(1-\nu)\}}{2n+3} \bar{B}_{n+1}^1 a_1^n \right] P_n'(\mu_1) = -\frac{P_2'(\mu_1)}{6} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ここで $\Gamma = \bar{G}/G$ であり, $\Gamma=0$ は球か, $\Gamma=\infty$ は球状剛介在物の場合を表す. また $\delta_n^{(m)}$ はクロネッカーのデルタ関数であり $\delta_n^{(m)}=0$ ($n \neq m$), $=1$ ($n=m$) を表す.

次に球面 $S_2(R_2=a_2)$ の境界条件を満足させるには式(6), (14)を用いて応力関数[II]を O_2 を原点とする座標で表し, 応力関数[III]と共に応力成分を求め境界条件から未定係数を求めればよいがその方法は全く球面 $S_1(R_1=a_1)$ に対するものと同じである. そこで二つの球状介在物の半径が等しく応力状態が中心間距離の二等分面に対して対称な場合には対称性を考慮して, 境界条件の一方を満足すれば他方は自然に満足される.

すなわち

$$\left. \begin{aligned} a_1=a_2=a, \quad A_n^1 &= (-1)^n A_n^2 = A_n, \quad B_n^1 = (-1)^{n+1} B_n^2 = B_n \\ \bar{A}_n^1 &= (-1)^n \bar{A}_n^2 = \bar{A}_n, \quad \bar{B}_n^1 = (-1)^{n+1} \bar{B}_n^2 = \bar{B}_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

とおけば式(15)~(18)から得られる関係式は次のようになる.

$$\begin{aligned} &-(n+1) \frac{A_n}{a^{n+2}} - \frac{n(n+3-4\nu)}{2n-1} \frac{B_{n-1}}{a^n} - \frac{(n+1)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}}{a^{n+2}} + \sum_{s=0}^{\infty} (A_s + B_s) \\ &\quad \times d_{s,n} a^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) - \sum_{s=0}^{\infty} B_s \left\{ d_{s,n-1} \frac{n(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) \right. \\ &\quad + d_{s,n+1} \frac{(n+1)(n-2+4\nu)}{2n+3} a^{n+1} \left. \right\} - \frac{1}{\Gamma} \left[n \bar{A}_n a^{n-1} + \frac{n(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{B}_{n-1} a^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) \right. \\ &\quad + \left. \frac{(n+1)(n-2+4\nu)}{2n+3} \bar{B}_{n+1} a^{n+1} \right] = -\frac{(1-2\nu)}{3(1+\nu)} \delta_n^{(1)} a + \frac{a}{3} \delta_n^{(2)} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{A_n}{a^{n+2}} - \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} \frac{B_{n-1}}{a^n} - \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}}{a^{n+2}} - \sum_{s=0}^{\infty} (A_s + B_s) d_{s,n} a^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) \\
& + \sum_{s=0}^{\infty} B_s \left\{ d_{s,n-1} \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) + d_{s,n+1} \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} a^{n+1} \right\} \\
& + \frac{1}{f} \left[\bar{A}_n a^{n-1} + \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{B}_{n-1} a^{n-1} (\delta_n^{(1)} - 1) + \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \bar{B}_{n+1} a^{n+1} \right] = -\frac{a}{6} \delta_n^{(2)} \\
& (n=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+1)(n+2) \frac{A_n}{a^{n+3}} + \frac{n(n(n+3)-2\nu)}{2n-1} \frac{B_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}}{a^{n+3}} \\
& + \sum_{s=0}^{\infty} (A_s + B_s) d_{s,n} n(n-1) a^{n-2} - \sum_{s=0}^{\infty} B_s \left\{ d_{s,n-1} \frac{n(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-2} \right. \\
& + d_{s,n+1} (n+1) \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} a^n \left. \right\} - \left[n(n-1) \bar{A}_n a^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} \right. \\
& \times \bar{B}_{n-1} a^{n-2} + (n+1) \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} \bar{B}_{n+1} a^n \left. \right] = -\frac{\delta_n^{(0)}}{3} + \frac{\delta_n^{(2)}}{3} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\
& \dots\dots\dots (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+2) \frac{A_n}{a^{n+3}} + \frac{\{n^2-2(1-\nu)\}}{2n-1} \frac{B_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}}{a^{n+3}} - \sum_{s=0}^{\infty} (A_s + B_s) d_{s,n} \\
& \times (n-1) a^{n-2} + \sum_{s=0}^{\infty} B_s \left\{ d_{s,n-1} \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-2} + d_{s,n+1} \frac{\{(n+1)^2-2(1-\nu)\}}{2n+3} a^n \right\} \\
& + \left[(n-1) \bar{A}_n a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{B}_{n-1} a^{n-2} + \frac{\{(n+1)^2-2(1-\nu)\}}{2n+3} \bar{B}_{n+1} a^n \right] = -\frac{\delta_n^{(2)}}{6} \\
& (n=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (23)
\end{aligned}$$

なお上式で母材の剛体変位を零としているため、母材に生じる剛体変位の項は $(\delta_n^{(1)} - 1)$ を乗じて除去した。介在物においては \bar{A}_1, \bar{B}_0 が剛体変位を表すがこれらは介在物境界面における母材の変形に対応して介在物に剛体変位を生じさせるために必要であり両者をまとめて \bar{A}_1 に等置した。式 (22), (23) で $n=1$ とおいた関係より $B_0=0$ となることが分かる。式 (20)~(23) の無限連立一次方程式を解けば未定係数 $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ は完全に決まる。

2.3 非軸対称解 純粋せん断荷重を受ける非軸対称問題に対しノイバーの応力関数に以下のような調和関数を与える。

(i) 母材領域 ($R_i > a_i$)

$$[IV] \quad \varphi_{01} = \frac{p}{12} R_1^2 P_2^2(\mu_1) \cos 2\theta \dots\dots\dots (24)$$

$$[V] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{0i} = p \sum_{n=2}^{\infty} C_n^i \frac{P_n^2(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos 2\theta, & \varphi_{1i} = p \sum_{n=1}^{\infty} D_n^i \frac{P_n^1(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos \theta \\ \varphi_{2i} = -p \sum_{n=1}^{\infty} D_n^i \frac{P_n^1(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \sin \theta, & \varphi_{3i} = p \sum_{n=2}^{\infty} E_n^i \frac{P_n^2(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos 2\theta \end{array} \right\} \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (25)$$

(ii) 介在物領域 ($R_i < a_i$)

$$[VI] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{0i} = p \sum_{n=2}^{\infty} \bar{C}_n^i R_i^n P_n^2(\mu_i) \cos 2\theta, & \varphi_{1i} = p \sum_{n=2}^{\infty} \bar{D}_n^i R_i^n P_n^1(\mu_i) \cos \theta \\ \varphi_{2i} = -p \sum_{n=2}^{\infty} \bar{D}_n^i R_i^n P_n^1(\mu_i) \sin \theta, & \varphi_{3i} = p \sum_{n=3}^{\infty} \bar{E}_n^i R_i^n P_n^2 \cos 2\theta \end{array} \right\} \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (26)$$

ここで $C_n^i, D_n^i, E_n^i, \bar{C}_n^i, \bar{D}_n^i, \bar{E}_n^i$ ($i=1, 2$) はそれぞれ境界条件から決定される未定係数である。

まず球面 $S_1 (R_1=a_1)$ の境界条件を満足させるために式 (5), (16) を用い、応力関数 [V] を O_1 を原点とする座標で表し応力成分を求め、さらにルジャンドル陪関数の漸化式を用いて球面 S_1 の条件を満足させると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
(u_R)_{R_1=a_1} &= (\bar{u}_R)_{R_1=a_1} \quad \text{よ り} \\
&\left. \begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} \left[-(n+1) \frac{C_n^1}{a_1^{n+2}} - \frac{(n+3-4\nu)}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^n} + \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+2}} - \frac{(n-2)(n+3-4\nu)}{2n-1} \right. \\
&\quad \times \frac{E_{n-1}^1}{a_1^n} - \frac{(n+3)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+2}} + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' n a_1^{n-1} \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{s,n-1}' \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-1} - {}_1d_{s,n+1}' \frac{(n-2+4\nu)}{2n+3} a_1^{n+1} \right\} \\
&\quad + \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-1} + {}_2d_{s,n+1}' \frac{(n+3)(n-2+4\nu)}{2n+3} a_1^{n+1} \right\} \Big] \\
&\quad \times P_n^2(\mu_1) - \frac{1}{\Gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left[n \bar{C}_n^1 a_1^{n-1} + \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{D}_{n-1}^1 a_1^{n-1} - \frac{(n-2+4\nu)}{2n+3} \right. \\
&\quad \times \bar{D}_{n+1}^1 a_1^{n+2} + \frac{(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{E}_{n-1}^1 a_1^{n-1} + \frac{(n+3)(n-2+4\nu)}{2n+3} \bar{E}_{n+1}^1 a_1^{n+1} \Big] \\
&\quad \times P_n^2(\mu_1) = -\frac{a_1}{6} P_2^2(\mu_1)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_\theta)_{R_1=a_1} &= (\bar{v}_\theta)_{R_1=a_1} \quad \text{よ り} \\
&\left. \begin{aligned}
&-\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{C_n^1}{a_1^{n+2}} - \frac{(1-2\nu)}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^n} + \frac{(1-2\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+2}} + \frac{(n-2)}{2n-1} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^n} + \frac{(n+3)}{2n+3} \right. \\
&\quad \times \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+2}} + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' a_1^{n-1} - (1-2\nu) \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{s,n-1}' \frac{a_1^{n-1}}{2n-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{{}_1d_{s,n+1}'}{2n+3} a_1^{n+1} \right\} + \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-2)}{2n-1} a_1^{n-1} + {}_2d_{s,n+1}' \frac{(n+3)}{2n+3} a_1^{n+1} \right\} \Big] \\
&\quad \times P_n^2(\mu_1) + \frac{1}{\Gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\bar{C}_n^1 a_1^{n-1} - \frac{(1-2\nu)}{2n-1} \bar{D}_{n-1}^1 a_1^{n-1} + \frac{(1-2\nu)}{2n+3} \bar{D}_{n+1}^1 a_1^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n-2)}{2n-1} \bar{E}_{n-1}^1 a_1^{n-1} + \frac{(n+3)}{2n+3} \bar{E}_{n+1}^1 a_1^{n+1} \right] P_n^2(\mu_1) = \frac{a_1}{12} P_2^2(\mu_1)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(w_\varphi)_{R_1=a_1} &= (\bar{w}_\varphi)_{R_1=a_1} \quad \text{よ り} \\
&\left. \begin{aligned}
&-\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{C_n'}{a_1^{n+2}} - \frac{(1-2\nu)}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^n} + \frac{(1-2\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n-2)}{2n-1} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^n} + \frac{(n+3)}{2n+3} \right. \\
&\quad \times \frac{E_{n+1}'}{a_1^{n+2}} + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' a_1^{n-1} - (1-2\nu) \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{s,n-1}' \frac{a_1^{n-1}}{2n-1} \right. \\
&\quad \left. - {}_1d_{s,n+1}' \frac{a_1^{n+1}}{2n+3} \right\} + \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-2)}{2n-1} a_1^{n-1} + {}_2d_{s,n+1}' \frac{(n+3)}{2n+3} a_1^{n+1} \right\} \Big] \\
&\quad \times P_n^{2'}(\mu_1) - 2(1-\nu) \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{D_n^1}{a_1^{n+1}} - 2 \frac{E_n^1}{a_1^{n+1}} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 {}_1d_{s,n}' a_1^n \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 {}_2d_{s,n}' a_1^n \right] P_n^2(\mu_1) + \frac{1}{\Gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\bar{C}_n^1 a_1^{n-1} - (1-2\nu) \frac{\bar{D}_{n-1}^1}{2n-1} a_1^{n-1} \right. \\
&\quad \left. + (1-2\nu) \frac{\bar{D}_{n+1}^1}{2n+3} a_1^{n+1} + \frac{(n-2)}{2n-1} \bar{E}_{n-1}^1 a_1^{n-1} + \frac{(n+3)}{2n+3} \bar{E}_{n+1}^1 a_1^{n+1} \right] P_n^{2'}(\mu_1) \\
&\quad + \frac{2(1-\nu)}{\Gamma} \sum_{n=2}^{\infty} [\bar{D}_n^1 a_1^n - 2\bar{E}_n^1 a_1^n] P_n^2(\mu_1) = \frac{a_1}{12} P_2^{2'}(\mu_1)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_R)_{R_1=a_1} &= (\bar{\sigma}_R)_{R_1=a_1} \quad \text{よ り} \\
&\left. \begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) \frac{C_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} - \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \right. \\
&\quad + (n-2) \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n+2)(n+3)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \\
&\quad + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' n(n-1) a_1^{n-2} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s^1 \left\{ {}_1d_{s,n}' \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right.
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -{}_1d_{s,n+1}' \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} a_1^n \Big\} + \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-1)(n-2)}{2n-1} \right. \\
& \times (n-4+4\nu) a_1^{n-2} + {}_2d_{s,n+1}' (n+3) \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} a_1^n \Big\} \Big] P_n^2(\mu_1) \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1) \bar{C}_n^1 a_1^{n-2} + \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{D}_{n-1}^1 a_1^{n-2} - \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} \right. \\
& \times \bar{D}_{n+1}^1 a_1^n + \frac{(n-1)(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{E}_{n-1}^1 a_1^{n-2} + (n+3) \\
& \times \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} \bar{E}_{n+1}^1 a_1^n \Big] P_n(\mu_1) = -\frac{P_2^2(\mu_1)}{6}
\end{aligned} \tag{30}$$

$(\tau_{R\varphi})_{R_1=a_1} = (\bar{\tau}_{R\varphi})_{R_1=a_1}$ より

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2) \frac{C_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} - \frac{\{1+\nu(n+1)\}}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \right. \\
& \times \frac{E_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' (n-1) a_1^{n-2} \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{s,n-1}' \frac{\{1-\nu n\}}{2n-1} a_1^{n-2} - {}_1d_{s,n+1}' \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} a_1^n \right\} \\
& - \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} + {}_2d_{s,n+1}' \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} a_1^n \right\} \Big] \\
& \times P_n^{2'}(\mu_1) + (1-\nu) \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2) \frac{D_n^1}{a_1^{n+2}} - 2(n+2) \frac{E_n^1}{a_1^{n+2}} - \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 {}_1d_{s,n}' (n-1) \right. \\
& \times a_1^{n-1} + \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 {}_2d_{s,n}' 2(n-1) a_1^{n-1} \Big] P_n^2(\mu_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\bar{C}_n^1 (n-1) a_1^{n-2} \right. \\
& - \frac{(1-n\nu)}{2n-1} \bar{D}_{n-1}^1 a_1^{n-2} + \frac{\{1-(n+2)\nu\}}{2n+3} \bar{D}_{n+1}^1 a_1^n + \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} \bar{E}_{n-1}^1 a_1^{n-2} \\
& + \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} \bar{E}_{n+1}^1 a_1^n \Big] P_n^{2'}(\mu_1) + (1-\nu) \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1) \bar{D}_n^1 a_1^{n-1} \right. \\
& \left. - 2(n-1) \bar{E}_n^1 a_1^{n-1} \right] P_n^2(\mu_1) = \frac{P_2^{2'}(\mu_1)}{12}
\end{aligned} \tag{31}$$

$(\tau_{R\theta})_{R_1=a_1} = (\bar{\tau}_{R\theta})_{R_1=a_1}$ より

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2) \frac{C_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} - \frac{\{1+\nu(n+1)\}}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \right. \\
& + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) \\
& \times {}_2d_{s,n}' (n-1) a_1^{n-2} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{s,n-1}' \frac{\{1-\nu n\}}{2n-1} a_1^{n-2} - {}_1d_{s,n+1}' \right. \\
& \times \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} a_1^n \Big\} - \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right. \\
& \left. + {}_2d_{s,n+1}' \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} a_1^n \right\} \Big] P_n^2(\mu_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1) \bar{C}_n^1 a_1^{n-2} \right. \\
& - \frac{(1-n\nu)}{2n-1} \bar{D}_{n-1}^1 a_1^{n-2} + \frac{\{1-(n+2)\nu\}}{2n+3} \bar{D}_{n+1}^1 a_1^n + \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} \\
& \times \bar{E}_{n-1}^1 a_1^{n-2} + \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} \bar{E}_{n+1}^1 a_1^n \Big] P_n^2(\mu_1) = \frac{P_2^2(\mu_1)}{12}
\end{aligned} \tag{32}$$

式 (27)~(32) でそれぞれ ルジャンドル陪関数およびその微係数の係数を等置すれば C_n^i , D_n^i , E_n^i , \bar{C}_n^i , \bar{D}_n^i , \bar{E}_n^i ($i=1, 2$) に関する無限連立一次方程式が得られる. そして式 (29), (31) で $P_n^{2'}(\mu_1)$ の係数を等置して得られる関係式はそれぞれ式 (28) および式 (32) から得られる関係式と同一である.

次に球面 $S_2(R_2=a_2)$ の境界条件を満足させるためには式 (6), (14) を用いて応力成分を求め境界条件から

未定係数を決定すればよいが, その方法は全く球面 S_1 に対するものと同じである. 2.2 節と同様に二つの球状介在物の半径が同じで応力状態が中心間距離の二等分面に対称な場合を考える.

すなわち

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2 = a, & C_n^1 &= (-1)^{n-2} C_n^2 = C_n, & D_n^1 &= (-1)^{n-1} D_n^2 = D_n \\ E_n^1 &= (-1)^{n-1} E_n^2 = E_n, & \bar{C}_n^1 &= (-1)^{n-2} \bar{C}_n^2 = \bar{C}_n \\ \bar{D}_n^1 &= (-1)^{n-2} \bar{D}_n^2 = \bar{D}_n, & \bar{E}_n^1 &= (-1)^{n-1} \bar{E}_n^2 = \bar{E}_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

とおけば式 (27)~(32) から得られる関係式は次のようになる.

$$\begin{aligned} & -(n+1) \frac{C_n}{a^{n+2}} - \frac{(n+3-4\nu)}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^n} + \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}}{a^{n+2}} - \frac{(n-2)(n+3-4\nu)}{2n-1} \\ & \times \frac{E_{n-1}}{a^n} - \frac{(n+3)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+2}} + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s + E_s) {}_2d_{s,n} a^{n-1} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \left\{ {}_1d_{s,n-1} \right. \\ & \times \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-1} {}_1d_{s,n+1} a^{n+1} \frac{(n-2+4\nu)}{2n+3} a^{n+1} \left. \right\} - \sum_{s=2}^{\infty} E_s \left\{ {}_2d_{s,n-1} \frac{(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \right. \\ & \times a^{n-1} + {}_2d_{s,n+1} \frac{(n+3)(n-2+4\nu)}{2n+3} a^{n+1} \left. \right\} - \frac{1}{\Gamma} \left[n \bar{C}_n a^{n-1} + \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{D}_{n-1} a^{n-1} \right. \\ & \left. - \frac{(n-2+4\nu)}{2n+3} \bar{D}_{n+1} a^{n+1} + \frac{(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{E}_{n-1} + a^{n-1} \frac{(n+3)(n-2+4\nu)}{2n+3} \bar{E}_{n+1} a^{n+1} \right] \\ & = -\frac{a}{6} \delta_n^{(2)} \quad (n=2, 3, \dots) \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{C_n}{a^{n+2}} + \frac{(1-2\nu)}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^n} - \frac{(1-2\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}}{a^{n+2}} - \frac{(n-2)}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^n} - \frac{(n+3)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+2}} \\ & - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s + E_s) {}_2d_{s,n} a^{n-1} + (1-2\nu) \sum_{s=1}^{\infty} D_s \left\{ \frac{{}_1d_{s,n-1}}{2n-1} a^{n-1} - \frac{{}_1d_{s,n+1}}{2n+3} a^{n+1} \right\} + \sum_{s=2}^{\infty} E_s \\ & \times \left\{ {}_2d_{s,n-1} \frac{(n-2)}{2n-1} a^{n-1} + {}_2d_{s,n+1} \frac{(n+3)}{2n+3} a^{n+1} \right\} + \frac{1}{\Gamma} \left[\bar{C}_n a^{n-1} - \frac{(1-2\nu)}{2n+1} \bar{D}_{n+1} a^{n+1} \right. \\ & \left. + \frac{(1-2\nu)}{2n+3} \bar{D}_{n+1} a^{n+1} + \frac{(n-2)}{2n-1} \bar{E}_{n-1} a^{n-1} + \frac{(n+3)}{2n+3} \bar{E}_{n+1} a^{n+1} \right] = \frac{a}{12} \delta_n^{(2)} \\ & \quad (n=2, 3, \dots) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2(1-\nu) \frac{D_n}{a^{n+1}} + 4(1-\nu) \frac{E_n}{a^{n+1}} - 2(1-\nu) \sum_{s=1}^{\infty} D_s {}_1d_{s,n} a^n \\ & - 4(1-\nu) \sum_{s=2}^{\infty} E_s {}_2d_{s,n} a^n + \frac{2(1-\nu)}{\Gamma} [\bar{D}_n a^n - 2\bar{E}_n a^n] = 0 \quad (n=2, 3, \dots) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n+1)(n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} - \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} \\ & + (n-2) \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+2)(n+3)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} \\ & + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s + E_s) {}_2d_{s,n} n(n-1) a^{n-2} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \left\{ {}_1d_{s,n-1} \frac{(n-1)}{2n-1} (n-4+4\nu) \right. \\ & \times a^{n-2} {}_1d_{s,n+1} \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} a^n \left. \right\} - \sum_{s=2}^{\infty} E_s \left\{ {}_2d_{s,n-1} \frac{(n-1)(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \right. \\ & \times a^{n-2} + {}_2d_{s,n+1} (n+3) \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} a^n \left. \right\} - \left[\bar{C}_n n(n-1) a^{n-2} \right. \\ & \left. + \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} \bar{D}_{n-1} a^{n-2} - \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} \bar{D}_{n+1} a^n + \frac{(n-1)(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \right. \\ & \left. \times \bar{E}_{n-1} a^{n-2} + (n+3) \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} \bar{E}_{n+1} a^n \right] = -\frac{1}{6} \delta_n^{(2)} \quad (n=2, 3, \dots) \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} - \frac{\{1+\nu(n+1)\}}{2n+3} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \\
& \times \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s + E_s) d_{s,n} (n-1) a^{n-2} \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \left\{ d_{s,n-1} \frac{\{1-\nu n\}}{2n-1} a^{n-2} - d_{s,n+1} \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} a^n \right\} \\
& + \sum_{s=2}^{\infty} E_s \left\{ d_{s,n+1} \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n+1} a^{n-2} + d_{s,n+1} \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} a^n \right\} \\
& + \left[(n-1) \bar{C}_n a^{n-2} - \frac{(1-\nu n)}{2n-1} \bar{D}_{n-1} a^{n-1} + \frac{\{1-(n+2)\nu\}}{2n+3} \bar{D}_{n+1} a^n \right. \\
& \left. + \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} \bar{E}_{n-1} a^{n-2} + \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} \bar{E}_{n+1} a^n \right] = \frac{1}{12} \delta_n^{(2)} \quad (n=2, 3, \dots)
\end{aligned}
\tag{38}$$

$$\begin{aligned}
& (1-\nu)(n+2) \frac{D_n}{a^{n+2}} - 2(1-\nu)(n+2) \frac{E_n}{a^{n+2}} - (1-\nu) \sum_{s=1}^{\infty} D_s d_{s,n} (n-1) a^{n-1} \\
& - 2(1-\nu) \sum_{s=2}^{\infty} E_s d_{s,n} (n-1) a^{n-1} + (1-\nu) [(n-1) \bar{D}_n a^{n-1} - 2(n-1) \bar{E}_n a^{n-1}] = 0 \\
& (n=2, 3, \dots) \tag{39}
\end{aligned}$$

3. 数 値 計 算

二つの球状介在物の半径が同じ場合を考え、ポアソン比を $\nu=\bar{\nu}=0.3$ とし介在物半径 $a=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ および横弾性係数比 $\Gamma=0, 0.1, 0.5, 2, 10, \infty$ について数値計算を行った。式 (20)~(23) および式 (34)~(39) から未定係数 $A_n \sim E_n, \bar{A}_n \sim \bar{E}_n$ を求める場合、最終的に得られる応力値が有効数字 3 けた以上になるように $n=11 \sim 31$ で打ち切って連立一次方程式を解いた。応力計算は応力状態が 2 球状介在物の中心間距離の二等分面に対称なことを考慮し、 O_1 を原点とする球状介在物を含む半空間において行った。まず柔らかい介在物、硬い介在物の代表として剛性率比 Γ をそれぞれ 0.5, 2 と選び介在物近傍の応力分布を求めたのが図 2~7 である。図 2, 3 は介在物境界面にお

ける応力 $\sigma_\varphi, \bar{\sigma}_\varphi$ の $\theta=0$ に対する分布を示したものである。両図をみると母材側における柔らかい介在物 ($\Gamma=0.5$) の分布が介在物側における硬い介在物 ($\Gamma=2$) のグラフに対応し、その逆も対応している。したがって $\varphi=0^\circ$ における引張応力の極大値ならびに $\varphi=90^\circ$ における圧縮応力の極大値は介在物が柔らかい場合には母材側に生じ、硬い場合には介在物側に生じる。

また介在物半径の大きさによる影響は $\varphi=0^\circ \sim 60^\circ$ において顕著である。図 4, 5 に介在物境界面における応力 $\sigma_\theta, \bar{\sigma}_\theta$ の $\theta=\pi/2$ に対する分布を示した。いずれも引張応力であり、最大引張応力は境界面上のある φ の値で生ずるがその値は $\varphi=0^\circ$ あるいは 180° の値にほとんど近い。最大引張応力の傾向ならびに介在物半径の影響は $\theta=0$ に対する $\sigma_\varphi, \bar{\sigma}_\varphi$ と同様のことが

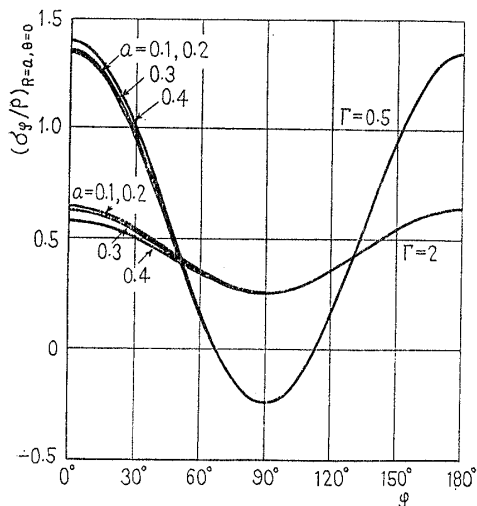


図 2 介在物境界面の σ_φ の分布 ($\theta=0$)

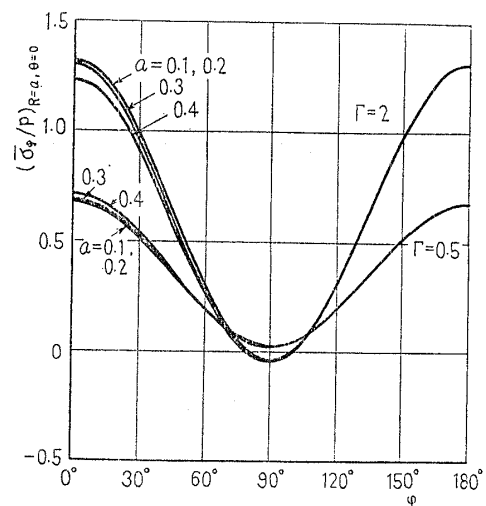


図 3 介在物境界面の $\bar{\sigma}_\varphi$ の分布 ($\theta=0$)

言える. z 軸上では円柱座標における応力 σ_r, σ_θ は σ_1, σ_2 をそれぞれ軸対称部分, 非軸対称部分とすれば

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_r}{p}\right)_{r=0} &= \sigma_1 + \sigma_2 \cos 2\theta \\ \left(\frac{\sigma_\theta}{p}\right)_{r=0} &= \sigma_1 - \sigma_2 \cos 2\theta, \quad r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

で表され, かつ z 軸上で σ_r と σ_θ は等しいことから母材における $\theta=0$ に対する σ_r の分布を $\varphi=0^\circ$ と $\varphi=180^\circ$ の場合に求め, 図 6, 7 に示した. 図 6 をみると介在物が柔らかい場合, 介在物境界面で σ_r は最大引張応力を生じ介在物から離れるにつれて減少する. これに対し介在物が硬い場合, 介在物境界面で引

張応力は最小で中央面 $z_1=0.5$ で最大となる. 図 7 の場合も同様の傾向を示しているが $|z_1|$ が大きくなると介在物が柔らかい場合も硬い場合も $\sigma_r=p$ に近づく. 以上の計算結果から母材, 介在物における最大引張応力は図 4, 5 に示した介在物境面上の $\sigma_\theta, \bar{\sigma}_\theta$ であり, その生ずる位置は介在物半径によって異なる. 前述したようにこの値は点 A, B に生ずる引張応力のいずれかに近似されるから, それぞれ

$$\sigma_A = (\sigma_\theta)_{R=a, \varphi=0, \theta=\pi/2}$$

$$\sigma_B = (\sigma_\theta)_{R=a, \varphi=\pi, \theta=\pi/2}$$

$$\bar{\sigma}_A = (\bar{\sigma}_\theta)_{R=a, \varphi=0, \theta=\pi/2}$$

$$\bar{\sigma}_B = (\bar{\sigma}_\theta)_{R=a, \varphi=\pi, \theta=\pi/2}$$

として a に対する変化を求めたのが図 8, 9 である. 図 8 より $\Gamma=1$ を境として, 介在物が柔らかい場合 ($\Gamma < 1$) には母材に応力集中を生じ, 介在物が硬い場合 ($\Gamma > 1$) には介在物に応力集中を生じていることがわかる. また介在物半径が $a < 0.3$ の範囲では $\sigma_A, \bar{\sigma}_A$ とも a による影響はほとんど受けず, かつ母材と介在物で Γ と $1/\Gamma$ に対する曲線が対応している. a が

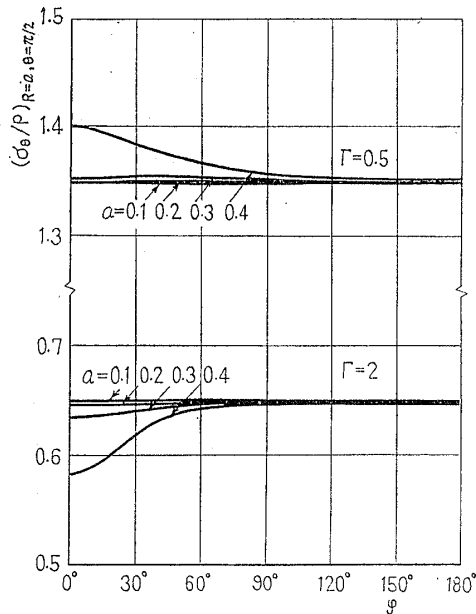


図 4 介在物境界面の σ_θ の分布 ($\theta=\pi/2$)

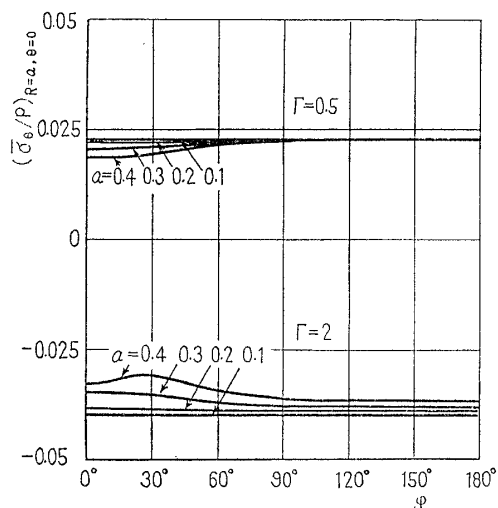


図 5 介在物境界面の $\bar{\sigma}_\theta$ の分布 ($\theta=0$)

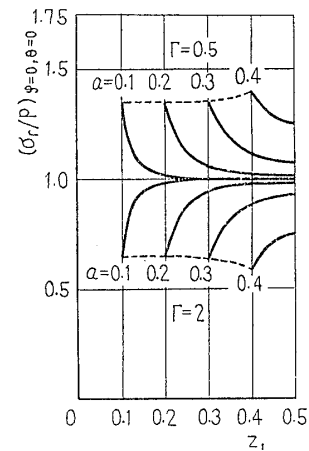


図 6 母材の z 軸上の σ_r の分布 ($\varphi=0, \theta=0$)

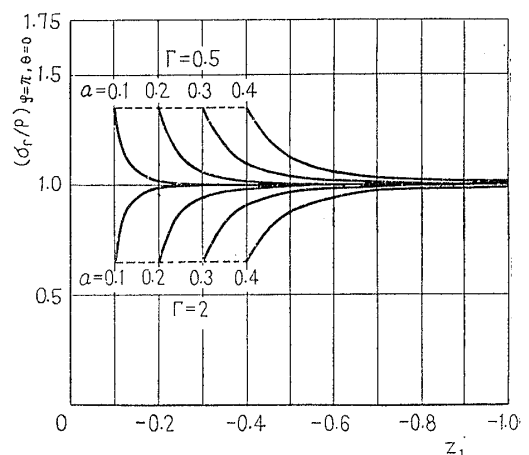
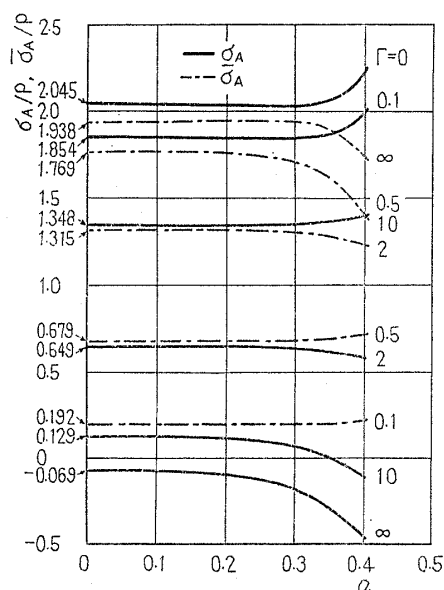


図 7 母材の z 軸上の σ_r の分布 ($\varphi=\pi, \theta=0$)

図 8 点 A における σ_A , $\bar{\sigma}_A$ と介在物半径の関係

0.3 を越えると a による影響が現れるが特に Γ が特別の場合、すなわち球か ($\Gamma=0$), 剛介在物 ($\Gamma=\infty$) において著しい。

図 9 の点 B の応力 σ_B , $\bar{\sigma}_B$ もほぼ同様の傾向を示すが介在物が剛体 ($\Gamma=\infty$) のときを除いてはほとんど a による影響は受けない。

4. 結 言

二つ以上の球状介在物の干渉による応力集中を明らかにするために 2 球状介在物を有する無限体が介在物の中心線に対し直角な面に一軸一様引張荷重を受ける非軸対称問題を三次元弾性理論に基づき厳密に解析した。本解析で得られた主な結果は以下のとおりである。

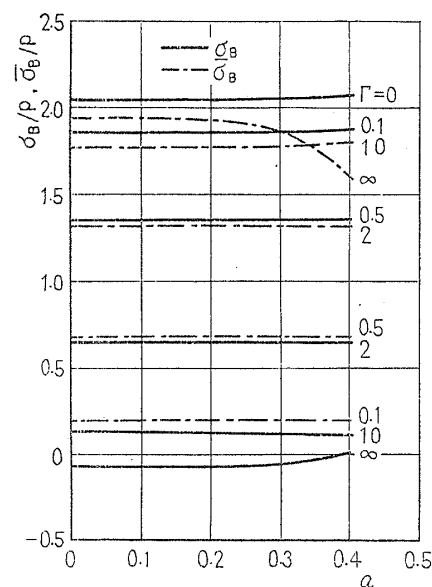
(1) 最大引張応力は介在物境界面上に生じ点 A, B のいずれかの引張応力で近似される。

(2) 介在物境界に生ずる応力集中は、介在物がない場合の球かによる応力集中を基本とし介在物と母材がこの応力集中を分担する。

すなわち Γ を一定としたとき介在物と母材に生ずる応力集中の和は球かの応力集中にほぼ等しく、その分担の割合は $1:1/\Gamma$ になる。

したがって、介在物が柔らかい場合 ($\Gamma < 1$) には母材側に、硬い場合 ($\Gamma > 1$) には介在物側に応力集中を生ずる。また介在物と母材とでそれぞれ Γ と $1/\Gamma$ の曲線が対応する。

(3) 介在物が極端に大きい場合 ($a > 0.3$) を除い

図 9 点 B における σ_B , $\bar{\sigma}_B$ と介在物半径の関係

ては点 A, B に生ずる応力集中は介在物半径の影響をほとんど受けない。これは介在物が存在することにより応力集中が介在物と母材に分散されるためであり、介在物の応力集中緩和作用と考えられる。

終わりに、数値計算に協力された当時埼玉大学学生赤芝悦朗君に感謝の意を表します。

また数値計算には東京大学大型計算機センターの HITAC 8800 を使用した。

文 献

- (1) 日本金属学会強度委員会編, 金属材料の強度と破壊, (昭 39), 383, 丸善。
- (2) 川田・ほか 2 名, 機論, 29-206 (昭 38-10), 1674。
- (3) Yokobori, T. and Nanbu, N., *Proc. 1st Int. Conf. on Fracture*, 3 (1965), 1529。
- (4) 筒井・ほか 2 名, 機論, 40-337 (昭 49-9), 2484。
- (5) Kawashima, K., ほか 2 名, *Proc. 24th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1974), 357。
- (6) Kawashima, K., ほか 2 名, *Proc. 27th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1977), 79。
- (7) 川島・ほか 2 名, 機論, 45-392, A (昭 54-4), 397。
- (8) Tsuchida, E., ほか 3 名, *Proc. 26th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1976), 95。
- (9) Shelley, J.F. and Yi-Yuan Yu, *Trans. ASME, Ser. E*, 33-1 (1966-3), 68。
- (10) Hill, J.L., 文献 (9) の 201 ページ。
- (11) Goree, J.G., and Wilson, H.B., *Trans. ASME, Ser. E*, 34-2 (1967-6), 313。
- (12) Warren, W.E., *Trans. ASME, Ser. E*, 44-2 (1977-6), 340。
- (13) Moschovidis, Z.A. and Mura, T., *Trans. ASME, Ser. E*, 42-4 (1975-12), 847。
- (14) 土田・ほか 2 名, 機論, 42-353 (昭 51-1), 46。
- (15) Robin, L., *Fonctions Spheriques de Legendre et Fonctions Spheroidales*, Tome 1 (1957), 164, Gauthier-Villars。

討

論

〔質問〕 長谷川久夫 (広島電機大学)

(1) 2個の弾性介在物問題の論文として興味深く拝見させていただいた。2個の場合が解決できたのであるから、任意に配置された N 個の場合も解法的には解決したと言ってよい。

(2) 介在物間の干渉について図から大ざっぱに言えば、2個の球状介在物の表面と表面の最短距離が介在物直径の約1.5倍以上になれば、 Γ の値にかかわらず干渉はほとんどないと見なしてよい。

(3) 本論文の解法もまえがきで述べられている文献(13)もともに特異性をもつ解を応用しているが、その方法は全く異なっているように思われる。両方法の長短に関して何かお考えがあったら、ご教示願いたい。

〔回答〕 (1) N 個の介在物が一直線上に並んだ場合は文献(14)に示した方法にしたがって解析できる。また任意に配置された N 個の介在物の場合については本文の式(14)を任意配置の式におきかえれば同様に解析できる。したがって解法的には解決したと考えられるが、たとえ原理的に解決されたとしても実際の解析においてはそれぞれ固有の困難さがありさらに個々に解析する必要があると考える。

(2) 図8, 9より $a \leq 0.2$ の範囲では1個の介在物の場合と同じとみなせる。したがって介在物の最短距離と介在物直径の比が $(1-2a)/2a > 1.5$ になれば Γ の値にかかわらず、干渉はほとんどないとみなしてよいと思う。

(3) eigen ひずみ法については十分に勉強していないので考え違いをしているかも知れないが下記のように考える。

(i) 両方法の相違は弾性基礎方程式の解を積分形で表すか、無限級数形で表すかにあって、解が閉じた形で表されるような簡単な問題については、積分計算だけでその解に到達するという点では前者の方が有利であろう。しかし複雑な境界値問題に対してはグリーン関数を見出すことが難しくなり、文献(13)のようにグリーン関数を用いて表された簡単な問題の解を重ね合わせて境界条件を満足させることになる。このような方法を採用しなければならない場合には後者の方が有利となる。

(ii) 介在物同志が接近すると eigen ひずみの次数を増す必要があり、その場合には、本解析法の方が有利となるであろう。

(iii) eigen ひずみ法が発展すれば、将来外部境界

をもつ問題に対しても適用できると思うが現状では、本解析法の方が有利であろう。

〔質問〕 畑 俊明 (静岡大学教育学部)

(1) 本解析は、 x 軸方向の一様引張りを、二軸一様引張荷重と純粋せん断荷重の作用する二つの場合に分けて解析されているが、各場合の境界条件をご教示願いたい。

(2) 本解析で、 Γ を一定としたとき、介在物と母材に生ずる応力集中の和は、球かの応力集中にほぼ等しく、その分担の割合は、 $1:1/\Gamma$ になるという面白い結果を得られているが、この結果は2球状介在物を有する弾性体の一軸引張り以外の他の介在物を有する場合においても、類似の結果が得られているか。

〔回答〕 (1) x 軸方向の一軸引張りに対する境界条件式(7), (8)は以下の場合の重ね合わせから成る。

(a) 二軸一様引張り

(i) 無限遠方で

$(\sigma_x)_{r \rightarrow \infty} = (\sigma_y)_{r \rightarrow \infty} = p/2$, その他の応力成分は零

(ii) 介在物境界面 $R_i = a_i$ ($i=1, 2$) で

$$(u_R)_{R_i=a_i} = (\bar{u}_R)_{R_i=a_i}$$

$$(w_\varphi)_{R_i=a_i} = (\bar{w}_\varphi)_{R_i=a_i}$$

$$(\sigma_R)_{R_i=a_i} = (\bar{\sigma}_R)_{R_i=a_i}$$

$$(\tau_{R\varphi})_{R_i=a_i} = (\bar{\tau}_{R\varphi})_{R_i=a_i}$$

(b) 純粋せん断

(i) 無限遠方で

$(\sigma_x)_{r \rightarrow \infty} = -(\sigma_y)_{r \rightarrow \infty} = p/2$, その他の応力成分は零

(ii) 介在物境界面 $R_i = a_i$ ($i=1, 2$) で

$$(u_R)_{R_i=a_i} = (\bar{u}_R)_{R_i=a_i}$$

$$(v_\theta)_{R_i=a_i} = (\bar{v}_\theta)_{R_i=a_i}$$

$$(w_\varphi)_{R_i=a_i} = (\bar{w}_\varphi)_{R_i=a_i}$$

$$(\sigma_R)_{R_i=a_i} = (\bar{\sigma}_R)_{R_i=a_i}$$

$$(\tau_{R\varphi})_{R_i=a_i} = (\bar{\tau}_{R\varphi})_{R_i=a_i}$$

$$(\tau_{R\theta})_{R_i=a_i} = (\bar{\tau}_{R\theta})_{R_i=a_i}$$

(2) 球状介在物をもつ半無限体の二軸一様引張り⁽⁴⁾球状介在物をもつ厚板の一軸引張り(付1)および球状介在物を有する円柱の引張り⁽⁶⁾の場合にも介在物半径が極端に大きくない範囲で同様の傾向がみられる。しかし、曲げを受ける場合⁽⁷⁾⁽⁸⁾や、ねじりを受ける場合⁽⁹⁾にはこの結果と異なっている。

(付1) 竹崎, 埼玉大学修士論文, (昭 52)。