

539.382 : 539.4.013

半へん長回転だ円体状ピットを有する半無限体の二軸一様引張り*

藤田 輝昭**, 土田 栄一郎***, 中原 一郎****

1. 緒 言

金属表面に存在するブローホールや砂傷等の表面欠陥による応力集中の問題は強度設計上重要であり、表面に半球ピットを有する半無限体については、1954年 Eubanks⁽¹⁾が二軸一様引張荷重を受ける場合を解いたのが最初である。その後半球ピットを有する半無限体ならびに厚板が種々の荷重を受ける場合について解析されてきた^{(2)~(5)}。また Eubanks による応力集中係数の計算値は若干大きすぎることも指摘された⁽⁶⁾⁽⁷⁾。ところで半球ピットの場合はくぼみ表面の曲率が一定であるが、実際には複雑な形のくぼみが存在する場合が多い。本研究は曲率の変化する半へん長回転だ円体状ピットを有する半無限体が二軸一様引張荷重を受ける軸対称問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析したものである。特にその極限の場合として底のついた深い円筒状くぼみの場合は立て坑に相当する問題として重要である。

解析においては Boussinesq の調和応力関数と回転だ円体座標を用いて解を表し、自由表面の境界条件を満足する3組の解を結合し、半区間展開の方法を用いてピット面の境界条件を満足させた。数値計算では半回転だ円体の短径と長径の比を0.2, 0.4, 0.6および0.8としてピット近傍の応力を計算し、形状比が1の半球ピットの場合も含めて、形状比が応力集中係数におよぼす影響を明らかにした。

2. 解 析 法

図1に示されるように、半無限体の表面に短半径 a 、長半径 b の半回転だ円体状ピットを考え、短半径を $a=1$ としてこれを基準としてすべての長さを表すものとする。そして中心 O を座標原点とし、円柱座標 (r, θ, z) およびへん長回転だ円体座標 (α, β, γ) を採用すれば、これらの間には

$$\left. \begin{aligned} r &= c \sinh \alpha \sin \beta = c \bar{q} \bar{p}, & \theta &= \gamma \\ z &= c \cosh \alpha \cos \beta = c q p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

の関係がある。ここで $q = \cosh \alpha$, $\bar{q} = \sinh \alpha$, $p = \cos \beta$, $\bar{p} = \sin \beta$ で、 $2c$ は焦点間距離である。また半無限体表面は $z=0$ ($\beta=\pi/2$)、ピット面は $\alpha=\alpha_0$ (一定) で表される。

いま、円柱座標のもとで Boussinesq の調和応力関数 φ_0, φ_3 を用いて変位を次のように表せば、これらはねじりなし軸対称問題の解となる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \\ 2Gw_z &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 u_r, w_z はそれぞれ r, z 方向の変位成分で、

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

であり、 ν はポアソン比、 G は横弾性係数である。

いま、座標間の関係式(1)を用いて式(2)をへん長回転だ円体座標に変換すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_\alpha &= h\bar{q} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} + ch\bar{q}p \left\{ q \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \\ 2Gv_\beta &= -h\bar{p} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} - chq\bar{p} \left\{ p \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} - (3-4\nu)\varphi_3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで u_α, v_β はそれぞれ α, β 方向の変位成分で、

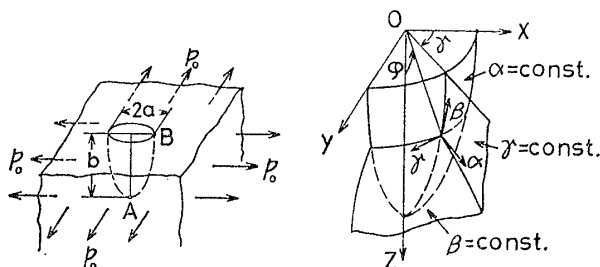


図 1 座標系

* 昭和 54 年 4 月 3 日 第 56 期通常総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和 53 年 9 月 28 日。

** 正員、防衛大学校 (〒239 横須賀市走水 1-10-20)。

*** 正員、埼玉大学工学部。

**** 正員、東京工業大学。

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0, \quad \nabla^2 \equiv h^2 \left\{ \bar{q}^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + 2q \frac{\partial}{\partial q} + \bar{p}^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2p \frac{\partial}{\partial p} \right\}, \quad h^2 = \frac{1}{c^2(q^2 - p^2)}$$

である。

さらに変位とひずみ、ひずみと応力の間の関係を用いて式 (3) より応力成分を求めると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= h^2 \left\{ \bar{q}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial q^2} + c^2 h^2 \bar{p}^2 \left(q \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \right) \right\} + ch^2 \left[q \bar{q}^2 p \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q^2} \right. \\ &\quad \left. + \{ c^2 h^2 q^2 \bar{p}^2 - 2(1-\nu) \bar{q}^2 \} p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - (c^2 h^2 p^2 + 2\nu) q \bar{p}^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right] \\ \sigma_\beta &= h^2 \left\{ \bar{p}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial p^2} + c^2 h^2 \bar{q}^2 \left(q \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \right) \right\} + ch^2 \left[q p \bar{p}^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial p^2} \right. \\ &\quad \left. - (c^2 h^2 \bar{q}^2 p^2 + 2(1-\nu) \bar{p}^2) q \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} + (c^2 h^2 q^2 - 2\nu) \bar{q}^2 p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} \right] \\ \sigma_r &= h^2 \left(q \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \right) + ch^2 \left\{ (q^2 - 2\nu \bar{q}^2) p \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - (p^2 + 2\nu \bar{p}^2) q \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right\} \\ \tau_{\alpha\beta} &= h^2 \bar{q} \bar{p} \left\{ - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial q \partial p} + c^2 h^2 \left(q \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} \right) \right\} - ch^2 \bar{q} \bar{p} \left[q p \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q \partial p} \right. \\ &\quad \left. + \{ c^2 h^2 p^2 - (1-2\nu) \} q \frac{\partial \varphi_3}{\partial q} - \{ c^2 h^2 q^2 + (1-2\nu) \} p \frac{\partial \varphi_3}{\partial p} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となる。いま原点 O を中心として、 φ_0 , φ_3 に次のような調和関数を与える。

$$[I] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} p_0 (r^2 - 2z^2) = \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} p_0 c^2 (\bar{q}^2 \bar{p}^2 - 2q^2 p^2) \\ \varphi_3 &= - \frac{p_0}{1+\nu} z = - \frac{p_0}{1+\nu} c q p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式 (5) より導かれる変位および応力成分は次のようになる。

$$u_r = \frac{1-\nu}{E} p_0 r, \quad v_\theta = 0, \quad w_z = - \frac{2\nu}{E} p_0 z, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = p_0, \quad \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで E は縦弾性係数である。したがって応力関数 [I] は半無限体を無限遠方で単位面積当たり p_0 の荷重で一様に引張った場合の解である。この解は半無限体表面で応力自由であるが、仮想した半回転だ円体面上 ($\alpha = \alpha_0$) で、式 (6) を座標変換することにより、以下のような応力が生ずることがわかる。

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\alpha}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= c^2 h_0^2 q_0^2 \bar{p}^2, & \left(\frac{\sigma_\beta}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= c^2 h_0^2 \bar{q}_0^2 p^2 \\ \left(\frac{\sigma_r}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= 1, & \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= c^2 h_0^2 \bar{q}_0 \bar{p} q_0 p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $q_0 = \cosh \alpha_0$, $\bar{q}_0 = \sinh \alpha_0$, $h_0^2 = \frac{1}{c^2(q_0^2 - p^2)}$ である。

それゆえ、無限遠方ですべての変位と応力が消失し、かつ以下に与えられる二つの境界条件を満足する解を求めて、応力関数 [I] の解に重ね合わせれば、半へん長回転だ円体状ピットを有する半無限体が二軸一様引張荷重を受ける場合の解が得られる。

境界条件；

(i) 自由表面 $\beta = \pi/2$ で

$$(\sigma_\beta)_{\beta=\pi/2} = 0, \quad (\tau_{\alpha\beta})_{\beta=\pi/2} = 0, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi \quad \dots\dots\dots (8)$$

(ii) ピット面 $\alpha = \alpha_0$ で

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -c^2 h_0^2 q_0^2 \bar{p}^2, \quad \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -c^2 h_0^2 \bar{q}_0 q_0 \bar{p} p, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

境界条件 (8), (9) を満足する解として次の 2 組の応力関数を考える。

$$[II] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= 2(1-\nu) c^2 p_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \{ Q_{2n+2}(q) P_{2n+2}(p) - Q_{2n}(q) P_{2n}(p) \} \\ \varphi_3 &= c p_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n (4n+3) Q_{2n+1}(q) P_{2n+1}(p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$[\text{III}] \begin{cases} \varphi_0 = (1-2\nu)c^2p_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \{Q_{2n+3}(q)P_{2n+3}(p) - Q_{2n+1}(q)P_{2n+1}(p)\} \\ \varphi_3 = cp_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n (4n+5)Q_{2n+2}(q)P_{2n+2}(p) \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

ここで A_n および B_n は境界条件によりきまる未定係数であり, また $P_n(p)$ および $Q_n(q)$ はそれぞれ第1種および第2種ルジャンドル関数である.

上述の応力関数[II], [III] から得られる解はピット中心を除いて半無限体表面で応力自由となり, 無限遠方で消失するから, [I], [II] および [III] から導かれる解を一次結合したものは未定係数 A_n, B_n に無関係に境界条件式(8)を自動的に満足する. したがって残りの回転円体状ピット表面の境界条件から未定係数 A_n, B_n を決定すればよい. 境界条件式(9)をルジャンドル関数で書きなおすと

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\alpha}{p_0 c^4 h^4} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= -\frac{8}{35} q_0^2 P_4(p) + q_0^2 \left(\frac{2}{3} q_0^2 + \frac{2}{21} \right) P_2(p) - q_0^2 \left(\frac{2}{3} q_0^2 - \frac{2}{15} \right) P_0(p) \\ \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0 c^4 h^4 \bar{q} \bar{p}} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= \frac{2}{35} q_0 P_4'(p) - \left(\frac{1}{3} q_0^2 - \frac{1}{7} \right) q_0 P_2'(p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる. そこで応力関数[II] および [III] より応力成分を求め, 境界条件式(12)を満足させると以下のようになる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\alpha}{p_0 c^4 h^4} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{s_{A1}(n, q_0) A_{n-2} + s_{A2}(n, q_0) A_{n-1} + s_{A3}(n, q_0) A_n \\ &\quad + s_{A4}(n, q_0) A_{n+1}\} P_{2n}(p) + \sum_{n=0}^{\infty} \{s_{B1}(n, q_0) B_{n-2} + s_{B2}(n, q_0) B_{n-1} \\ &\quad + s_{B3}(n, q_0) B_n + s_{B4}(n, q_0) B_{n+1}\} P_{2n+1}(p) = -q_0^2 \left(\frac{2}{3} q_0^2 - \frac{2}{15} \right) P_0(p) \\ &\quad + q_0^2 \left(\frac{2}{3} q_0^2 + \frac{2}{21} \right) P_2(p) - \frac{8}{35} q_0^2 P_4(p) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{p_0 c^4 h^4 \bar{q} \bar{p}} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{t_{A1}(n, q_0) A_{n-2} + t_{A2}(n, q_0) A_{n-1} + t_{A3}(n, q_0) A_n \\ &\quad + t_{A4}(n, q_0) A_{n+1}\} P_{2n}'(p) + \sum_{n=0}^{\infty} \{t_{B1}(n, q_0) B_{n-2} + t_{B2}(n, q_0) B_{n-1} \\ &\quad + t_{B3}(n, q_0) B_n + t_{B4}(n, q_0) B_{n+1}\} P_{2n+1}'(p) = -q_0 \left(\frac{1}{3} q_0^2 - \frac{1}{7} \right) P_2'(p) + \frac{2}{35} q_0 P_4'(p) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ただし $P_n'(p) = \frac{\partial P_n(p)}{\partial p}$ であり

$$\left. \begin{aligned} s_{A1}(n, q) &= \nu_1 \frac{2n(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)} \{qQ_{2n-2}'(q) - (2n-2)^2 Q_{2n-2}(q)\} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(4n-1)(4n-3)} \\ &\quad \times [\{(3-2\nu)q^2 - 2(1-\nu)\} Q_{2n-3}'(q) - (2n-3)(2n-3+2\nu)qQ_{2n-3}(q)] \\ s_{A2}(n, q) &= -\nu_1 \left[2q^3 Q_{2n}'(q) - (2n+1)2nq^2 Q_{2n}(q) - \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \right. \\ &\quad \times \{4(6n^2+3n-1)qQ_{2n}'(q) - 2(2n+1)^2(2n)^2 Q_{2n}(q)\} \\ &\quad \left. + \frac{2n(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)} \{qQ_{2n-2}'(q) - (2n-2)^2 Q_{2n-2}(q)\} \right] \\ &\quad + 2nq^2 [\{(3-2\nu) - (4-2\nu)q^2\} Q_{2n-1}'(q) + (2n-1)(2n+2\nu)qQ_{2n-1}(q)] \\ &\quad + \frac{6n(4n^2-2)}{(4n+3)(4n-3)} [\{(3-2\nu)q^2 - 2(1-\nu)\} Q_{2n-1}'(q) - 2n(2n-1)qQ_{2n-1}(q)] \\ &\quad + \frac{2n(2n-1)(4n^2-2n-3)}{(4n+3)(4n-3)} (1-2\nu)qQ_{2n-1}(q) \\ s_{A3}(n, q) &= \nu_1 \left[2q^3 Q_{2n}'(q) - (2n+1)2nq^2 Q_{2n}(q) - \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \right. \\ &\quad \times \{4(6n^2+3n-1)qQ_{2n}'(q) - 2(2n+1)^2(2n)^2 Q_{2n}(q)\} + \frac{(2n+2)(2n+1)}{(4n+5)(4n+3)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{aligned}
& \times \{qQ_{2n+2}'(q) - (2n+3)^2 Q_{2n+2}(q)\} + (2n+1)q^2 \{ (3-2\nu) - (4-2\nu)q^2 \} Q_{2n+1}'(q) \\
& + (2n+2)(2n+1-2\nu)qQ_{2n+1}(q) + \frac{3(2n+1)(4n^2+4n-1)}{(4n+5)(4n-1)} \\
& \times \{ (3-2\nu)q^2 - 2(1-\nu) \} Q_{2n+1}'(q) - (2n+2)(2n+1)qQ_{2n+1}(q) \\
& - \frac{(2n+2)(2n+1)(4n^2+6n-1)}{(4n+5)(4n-1)} (1-2\nu)qQ_{2n+1}(q) \\
s_{A4}(n, q) = & -\nu_1 \frac{(2n+2)(2n+1)}{(4n+5)(4n+3)} \{qQ_{2n+2}'(q) - (2n+3)^2 Q_{2n+2}(q)\} \\
& + \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{(4n+5)(4n+3)} \{ (3-2\nu)q^2 - 2(1-\nu) \} Q_{2n+3}'(q) \\
& - (2n+4)(2n+4-2\nu)qQ_{2n+3}(q) \\
t_{A1}(n, q) = & \frac{(2n-1)(2n-3)}{(4n-1)(4n-3)} \nu_1 Q_{2n-2}'(q) + \frac{(2n-1)(2n-2)}{(4n-1)(4n-3)} \{ (2n-5+2\nu)qQ_{2n-3}'(q) \\
& - (2n-3)(1-2\nu)Q_{2n-3}(q) \} \\
t_{A2}(n, q) = & -\nu_1 \left\{ q^2 Q_{2n}'(q) - \frac{(2n+2)(4n-2)}{(4n+3)(4n-1)} Q_{2n}'(q) - qQ_{2n}(q) \right. \\
& + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(4n-1)(4n-3)} Q_{2n-2}'(q) \left. \right\} + (2n-1)2(1-\nu)q^2 Q_{2n-1}(q) \\
& - (2n-2+2\nu)q^3 Q_{2n-1}'(q) + \frac{3(2n-1)(4n^2-3)}{(4n+3)(4n-3)} \{qQ_{2n-1}'(q) - (1-2\nu)Q_{2n-1}(q)\} \\
& - \frac{4n^2+2n-3}{(4n+3)(4n-3)} 2(1-\nu)qQ_{2n-1}'(q) \\
t_{A3}(n, q) = & \nu_1 \left\{ q^2 Q_{2n}'(q) - \frac{(2n+2)(4n-2)}{(4n+3)(4n-1)} Q_{2n}'(q) - qQ_{2n}(q) \right. \\
& + \frac{(2n+4)(2n+2)}{(4n+5)(4n+3)} Q_{2n+2}'(q) \left. \right\} + (2n+2)2(1-\nu)q^2 Q_{2n+1}(q) \\
& - (2n+3-2\nu)q^3 Q_{2n+1}'(q) + \frac{3(2n+2)(4n^2+4n-2)}{(4n+5)(4n-1)} \{qQ_{2n+1}'(q) \\
& - (1-2\nu)Q_{2n+1}(q)\} + \frac{4n^2+2n-3}{(4n+5)(4n-1)} 2(1-\nu)qQ_{2n+1}'(q) \\
t_{A4}(n, q) = & \frac{(2n+4)(2n+2)}{(4n+5)(4n+3)} \{-\nu_1 Q_{2n+2}'(q)\} + \frac{(2n+3)(2n+2)}{(4n+5)(4n+3)} \\
& \times \{ (2n+6-2\nu)qQ_{2n+3}'(q) - (2n+4)(1-2\nu)Q_{2n+3}(q) \}
\end{aligned}
\tag{16}$$

ここで, $Q_n'(q) = \partial Q_n(q) / \partial q$, $\nu_1 = 2(1-\nu)$ である. また $s_{Bl}(n, q)$, $t_{Bl}(n, q)$ ($l=1, 2, 3, 4$) は対応する式 (15), (16) の $s_{Al}(n, q)$, $t_{Al}(n, q)$ ($l=1, 2, 3, 4$) の右辺において, ν_1 の代わりに $\nu_2 (=1-2\nu)$ と置きかえ, 整数 n の代わりに $n+1/2$ と置きかえて得られる.

ここで式 (13), (14) において, 次の半区間展開式

$$\left. \begin{aligned}
P_{2k+1}(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_k^{(n)} P_{2n}(p), & P_{2k+1}'(p) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_k^{(n)} P_{2n}'(p) \\
\omega_k^{(n)} &= \frac{(4n+1)(2k+1)P_{2n}(0)P_{2k}(0)}{(2k+1-2n)(2k+2+2n)}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

を用いて奇数次のルジャンドル関数を偶数次のルジャンドル関数で展開し, $P_{2n}(p)$, $P_{2n}'(p)$ の係数を等しくすれば, 以下の A_n , B_n に関する無限連立一次方程式をうる.

$$\begin{aligned}
& A_{n-2}s_{A1}(n, q_0) + A_{n-1}s_{A2}(n, q_0) + A_n s_{A3}(n, q_0) + A_{n+1}s_{A4}(n, q_0) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \{B_{k-2}s_{B1}(k, q_0) + B_{k-1}s_{B2}(k, q_0) + B_k s_{B3}(k, q_0) + B_{k+1}s_{B4}(k, q_0)\} \omega_k^{(n)} \\
& = -q_0^2 \left(\frac{2}{3} q_0^2 - \frac{2}{15} \right) \delta_0^{(n)} + q_0^2 \left(\frac{2}{3} q_0^2 + \frac{2}{21} \right) \delta_1^{(n)} - \frac{8}{35} q_0^2 \delta_2^{(n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{n-2}t_{A1}(n, q_0) + A_{n-1}t_{A2}(n, q_0) + A_n t_{A3}(n, q_0) + A_{n+1}t_{A4}(n, q_0) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \{B_{k-2}t_{B1}(k, q_0) + B_{k-1}t_{B2}(k, q_0) + B_k t_{B3}(k, q_0) + B_{k+1}t_{B4}(k, q_0)\} \omega_k^{(n)} \\
& = -q_0 \left(\frac{1}{3} q_0^2 - \frac{1}{7} \right) \delta_1^{(n)} + \frac{2}{35} q_0 \delta_2^{(n)} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

ただし, $\delta_m^{(n)}$ はクロネッカーのデルタである. 式 (18), (19) を A_n , B_n について解けば本問題の解は完全にきまり, 全体の変位および応力は応力関数 [I], [II], [III] から導かれるものの重ね合せによって得られる.

3. 数 値 計 算

ポアソン比 ν を 0.3 とし, 回転円体の短径と長径の比 $a/b (= \bar{q}_0/q_0)$ が 0.2, 0.4, 0.6 および 0.8 の場合について数値計算を行った. まず未定係数 A_n , B_n に関する無限連立一次方程式を解くにあたり, $(\sigma_\alpha/p_0)_{\alpha=\alpha_0}$, $(\tau_{\alpha\beta}/p_0)_{\alpha=\alpha_0}$ の値がピット面全域で 5×10^{-3} 以下になる項数で無限級数を打切ることとし, $a/b=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ に対し $n=17, 13, 13, 15$ とした. 以下にこれらの係数より得られたピット面近傍の応力を示す.

弾性体内の任意の点における応力 σ_β および σ_r は次式で表される.

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_\beta}{p_0} &= c^2 h^2 \bar{q}^2 p^2 + c^2 h^2 2(1-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} A_n [Q_{2n+2}(q) \bar{p}^2 P_{2n+2}''(p) - Q_{2n}(q) \bar{p}^2 P_{2n}''(p) \\
&+ c^2 h^2 q \bar{q}^2 \{Q_{2n+2}'(q) P_{2n+2}(p) - Q_{2n}'(q) P_{2n}(p)\} - c^2 h^2 p \bar{q}^2 \{Q_{2n+2}(q) P_{2n+2}'(p) \\
&- Q_{2n}(q) P_{2n}'(p)\}] + c^2 h^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n (4n+3) [q Q_{2n+1}(q) p \bar{p}^2 P_{2n+1}''(p) - 2(1-\nu) \\
&\times q Q_{2n+1}(q) \bar{p}^2 P_{2n+1}'(p) - 2\nu \bar{q}^2 Q_{2n+1}'(q) p P_{2n+1}(p) + c^2 h^2 q p \bar{q}^2 \{q Q_{2n+1}'(q) P_{2n+1}(p) \\
&- Q_{2n+1}(q) p P_{2n+1}'(p)\}] + c^2 h^2 (1-2\nu) \sum_{n=0}^{\infty} B_n [Q_{2n+3}(q) \bar{p}^2 P_{2n+3}''(p) - Q_{2n+1}(q) \\
&\times \bar{p}^2 P_{2n+1}''(p) + c^2 h^2 q \bar{q}^2 \{Q_{2n+3}'(q) P_{2n+3}(p) - Q_{2n+1}'(q) P_{2n+1}(p)\} - c^2 h^2 p \bar{q}^2 \\
&\times \{Q_{2n+3}(q) P_{2n+3}'(p) - Q_{2n+1}(q) P_{2n+1}'(p)\}] + c^2 h^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n (4n+5) [q Q_{2n+2}(q) \\
&\times p \bar{p}^2 P_{2n+2}''(p) - 2(1-\nu) q Q_{2n+2}(q) \bar{p}^2 P_{2n+2}'(p) - 2\nu \bar{q}^2 Q_{2n+2}'(q) p P_{2n+2}(p) \\
&+ c^2 h^2 q p \bar{q}^2 \{q Q_{2n+2}'(q) P_{2n+2}(p) - Q_{2n+2}(q) p P_{2n+2}'(p)\}] \dots\dots\dots (20) \\
\frac{\sigma_r}{p_0} &= 1 + c^2 h^2 2(1-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} A_n [q \{Q_{2n+2}'(q) P_{2n+2}(p) - Q_{2n}'(q) P_{2n}(p)\} - p \{Q_{2n+2}(q) \\
&\times P_{2n+2}'(p) - Q_{2n}(q) P_{2n}'(p)\}] + c^2 h^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n (4n+3) [(q^2 - 2\nu \bar{q}^2) Q_{2n+1}'(q) p P_{2n+1}(p) \\
&- q Q_{2n+1}(q) (p^2 + 2\nu \bar{p}^2) P_{2n+1}'(p)] + c^2 h^2 (1-2\nu) \sum_{n=0}^{\infty} B_n [q \{Q_{2n+3}'(q) P_{2n+3}(p) \\
&- Q_{2n+1}(q) P_{2n+1}'(p)\} - p \{Q_{2n+3}(q) P_{2n+3}'(p) - Q_{2n+1}(q) P_{2n+1}'(p)\}] + c^2 h^2 \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} B_n (4n+5) [(q^2 - 2\nu \bar{q}^2) Q_{2n+2}'(q) p P_{2n+2}(p) - q Q_{2n+2}(q) (p^2 + 2\nu \bar{p}^2) P_{2n+2}'(p)] \dots\dots\dots (21)
\end{aligned}$$

特にピット面上における応力は上式において

$$q = q_0 (= 1/\sqrt{1-a^2/b^2}), \quad \bar{q} = \bar{q}_0$$

とおけばよい.

図2はピット面上の σ_β を示したものである. ただし横軸は β の代わりに φ としたが, β と φ の間には空か面上で $\tan \beta = (b/a) \tan \varphi$ の関係がある. また図中に示した $a/b=1$ は半球ピットの場合に相当し, 著者らが既に導いた結果を用いた⁽⁶⁾. すべての a/b に対して最大引張応力はピット底 ($\varphi=0^\circ$) に生じ, それからは φ の増加とともに減少し, わずかながら圧縮応力になるが $\varphi=90^\circ$ ですべて零になる. 特に a/b が比較的小さい場合すなわち底のある円筒状くぼみに近

いときは φ のわずかの間で急激に減少し, 圧縮応力となりそのままほとんど変化しないでピット縁で零になる.

図3にピット面上の σ_r と φ の関係を示した. この場合, 応力 σ_r はピット底で, 最大引張応力となり, φ の増加とともに減少し, 途中の φ で最小の引張応力となり, それ以後は φ とともに漸増する. この場合も a/b が小さい場合は φ のわずかの範囲で急激に減少して最小値に到達しあとは φ とともに漸増する. またピット縁における σ_r は a/b の減少とともに増加している.

図4に z 軸上の σ_β と z との関係を示した. z 軸上

では q と z との間に $z=cq$ の関係があり, 短半径を基準にとり $a=1$ とすると $z=q/\bar{q}_0$ となる. σ_B はピット底の最大引張応力値から z の増加とともに急激に減少しあとは 1 に向かって漸近する.

以上の結果をまとめて応力集中係数の値を図 5 に示した.

ここで, $\sigma_A=(\sigma_\theta)_{\alpha=\alpha_0, p=1}=(\sigma_r)_{\alpha=\alpha_0, p=1}$ および $\sigma_B=(\sigma_r)_{\alpha=\alpha_0, p=0}$ である. 最大引張応力は常にピット底に生じ, その値は a/b の減少とともに増加し, a/b が零に近づくと, 無限体中に存在する針状き裂の両端の引張応力値 $2.857 p_0$ に近づく⁽⁸⁾.

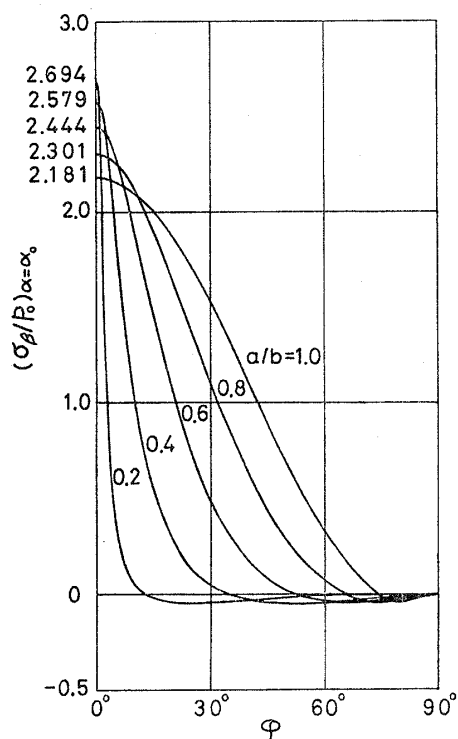


図 2 ピット面上の σ_θ の分布

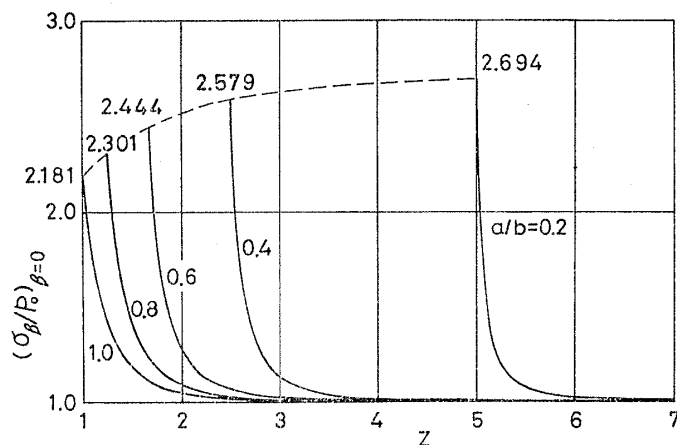


図 4 z 軸上の σ_θ の分布

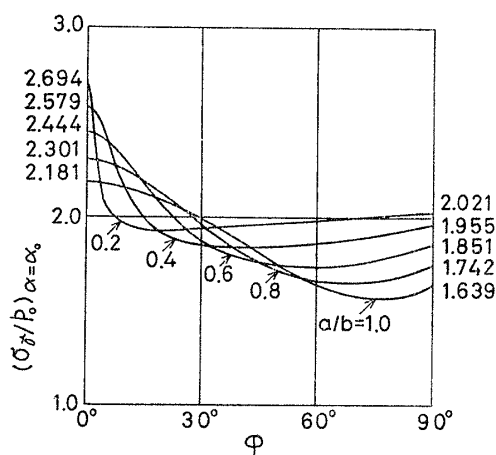


図 3 ピット面上の σ_r の分布

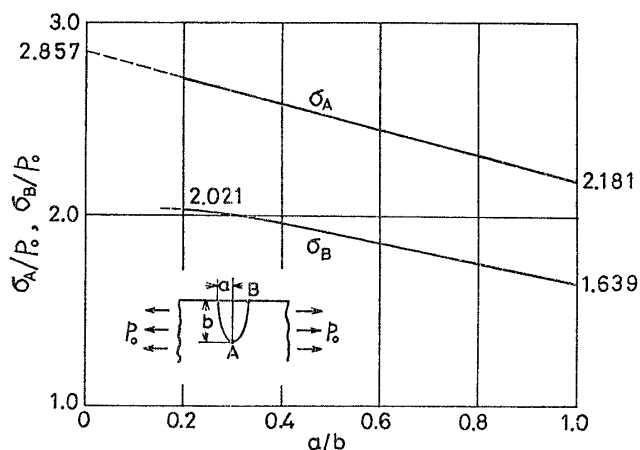


図 5 形状比による応力集中係数の変化

4. 結 言

表面に半へん長回転だ円体状ピットを有する半無限体が無限遠方で二軸一様引張荷重を受ける問題を三次元弾性論により厳密に解析した.

理論解に基づいて, ピット面上および z 軸上の応力を回転だ円体の短径と長径の比 a/b を 0.2, 0.4, 0.6 および 0.8 の四つの場合について計算し, ピット面近傍における応力集中の状態を明らかにするとともに, 半球ピットの場合と比較検討した. 結果を要約すれば次のようである.

(1) 最大引張応力は常にピット底に生じ, その値は形状比 a/b の減少とともに増加し, $2.857 p_0$ に近づく.

(2) ピット縁における引張応力値も形状比 a/b の減少とともに増加するが, ピット底の値より常に低い.

(3) z 軸上の応力 σ_θ は z の増加とともに急激

に減少し, その減少の度合は形状比 a/b が小さい程大きく, 応力集中が局所的になる.

文 献

- (1) Eubanks, R. A., *J. Appl. Mech.*, **21**-1 (1954-3), 57.
- (2) 齊藤・中原, 機論, **33**-247 (昭 42-3), 343.
- (3) 土田・中原, 機論, **33**-249 (昭 42-5), 696.
- (4) 藤田・ほか3名, 機論, **43**-372 (昭 52-8), 2845.
- (5) Fujita, T., ほか3名, *Proc. 25th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, **25** (1975), 715.
- (6) 藤田・ほか2名, 防衛大学校理工学研究報告, **13**-4 (昭 50-12), 599.
- (7) 渥美・伊藤, 機講論, No.761-1 (昭 51-6), 13.
- (8) 土田・ほか3名, 機講論, No.780-3 (昭 53-4), 140.

討 論

〔質問〕 長谷川久夫 (広島電機大学)

(1) 表面に非貫通孔をもつ物体に関する問題として興味深く拝見させていただいた. まえがきで, 「その極限の場合として底のついた深い円筒状くぼみの場合……」と述べておられるが, この種の問題は, これまでほとんど取扱われていないように感じられる. この種の問題が解析的に考察できるための見通しについてお伺いできると幸いである.

(2) 弾性論の解の多くは, 結局, 解の特異性をうまく応用して構成されているように思われるが, 式(10), (11) の応力関数はどのような特異性をもっているのか.

(3) 無限級数の収束性は, 半へん長回転だ円体状ピットの形状(大きさ)とは関係ないか.

(4) 半無限体問題では, 普通, 無限積分の形の応力関数を採用しているが, 本論文では無限級数の形のものだけで解決なされており, 数値積分の必要がなく結構なことと思う. どのように工夫なされたのか.

〔回答〕 (1) ご指摘の問題については著者らも大変関心をもっている. 平底をもつ円筒状くぼみの問題はこれを円孔をもつ半無限体と円柱あるいは円孔を

もつ厚板と半無限体の共有領域と考えると, それぞれに對する解を見つけることができるが, 円孔側面および平底における境界条件を満足させるために従来のフーリエ級数展開, フーリエ変換(ハンケル変換を含む)を用いることができないため解が複雑な積分方程式の形となり現在のところ解析的に解くことは困難である. あるいは Green 関数を用いた方法が有効かと思うが今後研究して行きたいと思う.

(2) 第2種ルジャンドル関数 $Q_n(q)$ の性質から回転だ円体の焦点に特異点をもつ.

(3) 本問題の場合には半無限体表面の境界条件を自動的に満足する級数を用いたため, 半球ピットと同様に無限級数の収束性はピットの形状, (大きさ)とあまり関係がみられずほぼ同じ項数で収束した.

(4) 半無限体の問題では半無限体平面の境界条件をとるため, 無限積分の形の応力関数を必要とする. 本論文では半球ピットに対する Eubanks ら⁽¹⁾⁽³⁾の手法に基づきジャンドル関数の性質を利用して半無限体平面で応力自由となる2組の応力関数を用いて解析した.