

539.382 : 539.4.013

偏心球かを有する円柱の引張り*

川上 崇**, 中原一郎***, 土田栄一郎****, 松本浩之***

1. 緒 言

無限円柱に球かが存在し、種々の荷重が作用する場合の応力集中問題は幾人かの研究者によって解析されてきた。しかし、これらの研究の多くは軸対称問題^{(1)~(4)}であり非軸対称問題についての研究は少ない。一般に非軸対称問題は (i) 弾性体の形状は軸対称であるが、荷重が非軸対称である場合と (ii) 弾性体の形状が非軸対称であるための荷重条件によらず非軸対称問題になる場合に分けられる。(i) に属する問題としては、中心に1個の球かが存在する円柱に曲げが作用する場合が挙げられ、土田⁽⁵⁾が調和応力関数を用いて解析している。一方、円柱に球かが偏心して存在する問題は (ii) に属し、(i) の場合に比べて複

雑となり、その解析例はないようである。本研究は偏心球かを有する無限円柱が軸方向に引張荷重を受ける問題を三次元弾性論に基づいて解析し、数値計算を行って球か近傍における応力分布を明らかにしたものである。

2. 解 析 法

2.1 座標移動に伴う付加応力関数 物体力が存在しない場合には、三次元弾性基礎方程式の一般解は互いに独立な3個の調和応力関数によって表されるが、境界条件によっては3個以上の調和応力関数を用いる方が便利な場合がある。本解析で用いる応力関数による変位の表示を直角座標 (x, y, z) のもとで示すと次のようになる。

$$2Gu_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad 2Gv_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad 2Gw_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \dots\dots\dots(1.a)$$

$$2Gu_x = x \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (3-4\nu)\varphi_1, \quad 2Gv_y = x \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad 2Gw_z = x \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \dots\dots\dots(1.b)$$

$$2Gu_x = y \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad 2Gv_y = y \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - (3-4\nu)\varphi_2, \quad 2Gw_z = y \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \dots\dots\dots(1.c)$$

$$2Gu_x = x \frac{\partial \varphi_4}{\partial z}, \quad 2Gv_y = y \frac{\partial \varphi_4}{\partial z}, \quad 2Gw_z = -x \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} - 4(1-\nu)\varphi_4 \dots\dots\dots(1.d)$$

$$2Gu_x = -2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial z}, \quad v_y = 0, \quad 2Gw_z = 2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \dots\dots\dots(1.e)$$

$$2Gu_x = 2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial y}, \quad 2Gv_y = -2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x}, \quad w_z = 0 \dots\dots\dots(1.f)$$

ここで、 $\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = \nabla^2 \varphi_4 = \nabla^2 \lambda_2 = \nabla^2 \lambda_3 = 0$, $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, ν はポアソン比, G は横弾性係数であり, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ Neuber の応力関数に, φ_4, λ_3 は Dougall の応力関数に含まれ, また λ_2 による表示式 (1.e) は式 (1.f) において x, y, z 軸を z, x, y 軸に置き換えれば得られる。これらの解を移動した座標で表すためには、調和関数だけではなく表示式 (1.a)~(1.f) も移動した座標に変換させねばならない。いま、図1のような座標系 O, \bar{O} においては

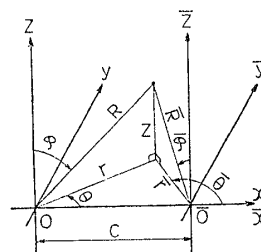


図 1

$$x = \bar{x} + c, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z} \dots\dots\dots(2)$$

の関係があるから、これを表示式 (1.d) に代入すれ

* 昭和53年10月11日 第56期全国大会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和53年4月10日。

** 学生員, 東京工業大学大学院 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*** 正員, 東京工業大学。

**** 正員, 埼玉大学工学部。

ば, $\bar{\lambda}_2 = -(c/2)\bar{\varphi}_4$ において, \bar{O} 座標系では

$$2G_{u_x} = \bar{x} \frac{\partial \bar{\varphi}_4}{\partial \bar{z}} - 2 \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \bar{z}}, \quad 2G_{v_y} = \bar{y} \frac{\partial \bar{\varphi}_4}{\partial \bar{z}}, \quad 2G_{w_z} = -\bar{x} \frac{\partial \bar{\varphi}_4}{\partial \bar{x}} - \bar{y} \frac{\partial \bar{\varphi}_4}{\partial \bar{y}} - 4(1-\nu)\bar{\varphi}_4 + 2 \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \bar{x}} \dots (3)$$

のように, λ_2 による成分が付加された形で表される. 同様に, 表示式 (1.b) に式 (2) を代入すれば, \bar{O} 座標系では $\bar{\varphi}_0 = c\bar{\varphi}_1$ として, φ_0 による成分が付加された形で表される.

2.2 調和関数の座標変換 図 1 の O 座標系および \bar{O} 座標系でそれぞれ表された平行な中心軸をもつ円柱関数間の相互変換式は Graf は式⁽⁶⁾より次のように導かれる.

$$\left. \begin{aligned} K_m(\lambda \bar{r}) \cos m\bar{\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k \{I_{m-k}(\lambda c) + I_{m+k}(\lambda c)\} K_k(\lambda r) \cos k\theta \\ K_m(\lambda \bar{r}) \sin m\bar{\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \{I_{m-k}(\lambda c) - I_{m+k}(\lambda c)\} K_k(\lambda r) \sin k\theta \end{aligned} \right\} (r > c) \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} I_k(\lambda r) \cos k\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} e_m \{I_{m-k}(\lambda c) + I_{m+k}(\lambda c)\} I_m(\lambda \bar{r}) \cos m\bar{\theta} \\ I_k(\lambda r) \sin k\theta &= \sum_{m=1}^{\infty} \{I_{m-k}(\lambda c) - I_{m+k}(\lambda c)\} I_m(\lambda \bar{r}) \sin m\bar{\theta} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ただし $e_k = 1/2$ ($k=0$), $e_k = 1$ ($k \neq 0$)

であり, $I_n(\)$, $K_n(\)$ は n 次のそれぞれ第 1 種および第 2 種変形ベッセル関数である.

さらに, 円柱関数と球関数の間には次の関係があることが知られている⁽⁷⁾⁽⁸⁾.

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_{m+2n}^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+2n+1}} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-)^n}{(2n)!} \int_0^{\infty} \lambda^{m+2n} K_m(\lambda \bar{r}) \cos \lambda \bar{z} d\lambda \\ \frac{P_{m+2n+1}^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+2n+2}} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{m+2n+1} K_m(\lambda \bar{r}) \sin \lambda \bar{z} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} I_m(\lambda \bar{r}) \cos \lambda \bar{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2m+2n)!} (\lambda \bar{R})^{m+2n} P_{m+2n}^m(\bar{\mu}) \\ I_m(\lambda \bar{r}) \sin \lambda \bar{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2m+2n+1)!} (\lambda \bar{R})^{m+2n+1} P_{m+2n+1}^m(\bar{\mu}) \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

ここで, $P_n^m(\)$ は m 位 n 次のルジャンドル陪関数であり, $\bar{\mu} = \cos \bar{\varphi}$ である. これらの式を組み合わせれば, 図 1 に示される円柱座標での z 軸を中心軸とする円柱調和関数と \bar{O} を原点とする球調和関数の相互変換式を以下のように導くことができる.

まず式 (4) と (6) を組み合わせて, 球調和関数を円柱調和関数で表せば $r > c$ では次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_{m+2n}^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+2n+1}} \cos m\bar{\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} F_{k,m,n}^*(\lambda) K_k(\lambda r) \cos k\theta \cos \lambda \bar{z} d\lambda \\ \frac{P_{m+2n+1}^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+2n+2}} \cos m\bar{\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} G_{k,m,n}^*(\lambda) \lambda K_k(\lambda r) \cos k\theta \sin \lambda \bar{z} d\lambda \\ \frac{P_{m+2n}^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+2n+1}} \sin m\bar{\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} H_{k,m,n}^*(\lambda) K_k(\lambda r) \sin k\theta \cos \lambda \bar{z} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} F_{k,m,n}^*(\lambda) &= e_k \frac{2}{\pi} \frac{(-)^n}{(2n)!} \lambda^{m+2n} \{I_{m-k}(\lambda c) + I_{m+k}(\lambda c)\} \\ G_{k,m,n}^*(\lambda) &= e_k \frac{2}{\pi} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} \lambda^{m+2n} \{I_{m-k}(\lambda c) - I_{m+k}(\lambda c)\} \\ H_{k,m,n}^*(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \frac{(-)^n}{(2n)!} \lambda^{m+2n} \{I_{m-k}(\lambda c) - I_{m+k}(\lambda c)\} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

逆に式 (5) と (7) を組み合わせて, 円柱調和関数を球調和関数で表せば次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} I_k(\lambda r) \cos k\theta \cos \lambda \bar{z} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_{k,m,n}(\lambda) \bar{R}^{m+2n} P_{m+2n}^m(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} \\ I_k(\lambda r) \cos k\theta \sin \lambda \bar{z} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{G}_{k,m,n}(\lambda) \lambda^{-1} \bar{R}^{m+2n+1} P_{m+2n+1}^m(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} \\ I_k(\lambda r) \sin k\theta \cos \lambda \bar{z} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{H}_{k,m,n}(\lambda) \bar{R}^{m+2n} P_{m+2n}^m(\bar{\mu}) \sin m\bar{\theta} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_{k,m,n}(\lambda) &= e_m \frac{(-)^n}{(2m+2n)!} \lambda^{m+2n} \{I_{m-k}(\lambda c) + I_{m+k}(\lambda c)\} \\ \tilde{G}_{k,m,n}(\lambda) &= e_m \frac{(-)^n}{(2m+2n+1)!} \lambda^{m+2n+2} \{I_{m-k}(\lambda c) + I_{m+k}(\lambda c)\} \\ \tilde{H}_{k,m,n}(\lambda) &= \frac{(-)^n}{(2m+2n)!} \lambda^{m+2n} \{I_{m-k}(\lambda c) - I_{m+k}(\lambda c)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

である。

2.3 応力関数の構成 図2に示されるように円柱の半径を単位長さとしてすべての長さの基準にとり、球か半径を a , 球かの円柱中心からの偏心量を c とする。そして円柱中心軸上点 O を原点として円柱座標を (r, θ, z) と、また偏心球かの中心点 \bar{O} を原点として球座標を $(\bar{R}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ とすることにする。

いま、 O を原点として

$$[I] \quad \varphi_0 = -\frac{1-2\nu}{4(1+\nu)} p(2z^2-r^2), \quad \varphi_4 = -\frac{1}{2(1+\nu)} pz \dots\dots\dots (12)$$

とおけば

$$\sigma_z = p, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

すなわち、円柱を単位面積当たり p の力で z 方向に一様に引張った場合の解が得られる。この解に重ね合わせ円柱側面および球か面の境界条件を満たす解を導くため、弾性体領域を無限円柱領域と球かを除く無限体領域の共通領域と考え、それぞれの領域に対する解を次の形で表す。

$$[II] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_k(\lambda) I_k(\lambda r) \cos k\theta \cos \lambda z d\lambda, & \varphi_4 &= p \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} g_k(\lambda) \lambda I_k(\lambda r) \cos k\theta \sin \lambda z d\lambda \\ \lambda_3 &= p \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} h_k(\lambda) I_k(\lambda r) \sin k\theta \cos \lambda z d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$[III] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \frac{P_{m+2n}^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+2n+1}} \cos m\bar{\theta}, & \varphi_4 &= p \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{m,n} \frac{P_{m+2n+1}^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+2n+2}} \cos m\bar{\theta} \\ \lambda_3 &= p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \frac{P_{m+2n}^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+2n+1}} \sin m\bar{\theta}, & \varphi_1 &= p \sum_{m=1}^{\infty} D_{m+1} \frac{P_m^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+1}} \cos m\bar{\theta} \\ \varphi_2 &= -p \sum_{m=1}^{\infty} D_{m+1} \frac{P_m^m(\bar{\mu})}{\bar{R}^{m+1}} \sin m\bar{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $f_k(\lambda)$, $g_k(\lambda)$, $h_k(\lambda)$ および $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, D_{m+1} はそれぞれ境界条件より決定される未知関数ならびに未定係数である。

2.4 円柱側面の境界条件 円柱側面における境界条件を満足させるため2.1 および 2.2 節の関係を用いて応力関数 [III] を書き直すと次のようになる。

$$[III]^* \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{\xi_k(\lambda) + {}^0\rho_k(\lambda)\} K_k(\lambda r) \cos k\theta \cos \lambda z d\lambda \\ \varphi_4 &= p \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta_k(\lambda) \lambda K_k(\lambda r) \cos k\theta \sin \lambda z d\lambda \\ \lambda_3 &= p \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \zeta_k(\lambda) K_k(\lambda r) \sin k\theta \cos \lambda z d\lambda \\ \varphi_1 &= p \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{\rho_k(\lambda) + {}^2\rho_k(\lambda)\} \lambda K_k(\lambda r) \cos k\theta \cos \lambda z d\lambda \\ \varphi_2 &= p \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \{\rho_k(\lambda) - {}^2\rho_k(\lambda)\} \lambda K_k(\lambda r) \sin k\theta \cos \lambda z d\lambda \\ \lambda_2 &= \frac{c}{2} p \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta_k(\lambda) \lambda K_k(\lambda r) \cos k\theta \sin \lambda z d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで

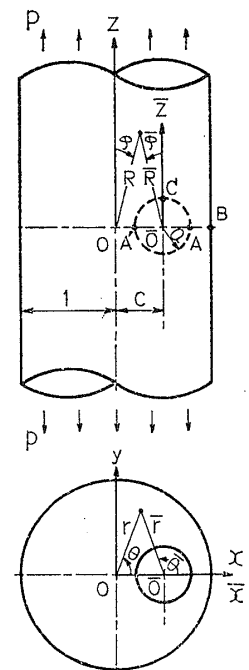


図2 座標系

$$\left. \begin{aligned} \xi_k(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,m,n}^*(\lambda) A_{m,n}, & \eta_k(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_{k,m,n}^*(\lambda) B_{m,n} \\ \zeta_k(\lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{k,m,n}^*(\lambda) C_{m,n}, & {}^0\rho(\lambda) &= -c \sum_{m=1}^{\infty} F_{k,m,0}^*(\lambda) D_{m+1} \\ {}^1\rho_k(\lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} e_k \frac{2}{\pi} \lambda^{m-1} I_{m+k}(\lambda c) D_{m+1}, & {}^2\rho_k(\lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} e_k \frac{2}{\pi} \lambda^{m-1} I_{m-k}(\lambda c) D_{m+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

である。応力関数 [II], [III]* より各々応力成分を求めて円柱側面の境界条件を満足させれば

$$\begin{aligned} (\sigma_r/p)_{r=1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [-\{\lambda I_{k-1} - k(k+1)I_k - \lambda^2 I_k\} f_k(\lambda) + \lambda^2 \{\lambda I_{k-1} - kI_k + (1-2\nu)I_k\} g_k(\lambda) \\ &\quad + 2k\{\lambda I_{k-1} - (k+1)I_k\} h_k(\lambda) + \{\lambda K_{k-1} + k(k+1)K_k + \lambda^2 K_k\} \{\xi_k(\lambda) + {}^0\rho_k(\lambda)\} \\ &\quad + c\lambda^2 \{\lambda K_k - (k-1)K_{k-1}\} (1+{}^1\delta_k) (1-{}^0\delta_k) \eta_{k-1}(\lambda) / 2 - \lambda^2 \{\lambda K_{k-1} + kK_k - (1-2\nu)K_k\} \eta_k(\lambda) \\ &\quad + c\lambda \{(k+1)\lambda K_{k-1} + \lambda^2 K_k + 2k(k+1)K_k\} \eta_{k+1}(\lambda) / 2 - 2k\{\lambda K_{k-1} + (k+1)K_k\} \zeta_k(\lambda) \\ &\quad + \lambda \{[\lambda^2 + (k+1)(k+4-4\nu)]K_{k+1} + (3-2\nu)\lambda K_k\} {}^1\rho_{k+1}(\lambda) + \lambda \{[\lambda^2 + (k-1)(k-4+4\nu)]K_{k-1} \\ &\quad + (3-2\nu)\lambda K_k\} (1+{}^1\delta_k) (1-{}^0\delta_k) {}^2\rho_{k-1}(\lambda)] \cos k\theta \cos \lambda z d\lambda = 0 \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tau_{rz}/p)_{r=1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda [-\{\lambda I_{k-1} - kI_k\} f_k(\lambda) - \{2(1-\nu)(\lambda I_{k-1} - kI_k) + k^2 I_k / 2 + \lambda^2 I_k\} g_k(\lambda) \\ &\quad - kI_k h_k(\lambda) + \{\lambda K_{k-1} + kK_k\} \{\xi_k(\lambda) + {}^0\rho_k(\lambda)\} + c\lambda \{2\lambda K_{k-1} + kK_k\} (1+{}^1\delta_k) (1-{}^0\delta_k) \eta_{k-1}(\lambda) / 4 \\ &\quad + \{2(1-\nu)(\lambda K_{k-1} + kK_k) - k^2 K_k / 2 - \lambda^2 K_k\} \eta_k(\lambda) + c\lambda \{2\lambda K_{k-1} + 3kK_k\} \eta_{k+1}(\lambda) / 4 \\ &\quad - kK_k \zeta_k(\lambda) + \lambda \{(k+2-2\nu)K_{k+1} + \lambda K_k\} {}^1\rho_{k+1}(\lambda) - \lambda \{(k-2+2\nu)K_{k-1} \\ &\quad - \lambda K_k\} (1+{}^1\delta_k) (1-{}^0\delta_k) {}^2\rho_{k-1}(\lambda)] \cos k\theta \sin \lambda z d\lambda = 0 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta z}/p)_{r=1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} [-k\{\lambda I_{k-1} - (k+1)I_k\} f_k(\lambda) - k\lambda^2 I_k g_k(\lambda) / 2 + 2\{\lambda I_{k-1} - k(k+1)I_k \\ &\quad - \lambda^2 I_k / 2\} h_k(\lambda) + k\{\lambda K_{k-1} + (k+1)K_k\} \{\xi_k(\lambda) + {}^0\rho_k(\lambda)\} + c\lambda^2 \{2(k-1)K_{k-1} \\ &\quad - \lambda K_k\} (1+{}^1\delta_k) \eta_{k-1}(\lambda) / 4 - k\lambda^2 K_k \eta_k(\lambda) / 2 + c\lambda \{2(k+1)\lambda K_{k-1} + \lambda^2 K_k \\ &\quad + 4k(k+1)K_k\} \eta_{k+1}(\lambda) / 4 - 2\{\lambda K_{k-1} + k(k+1)K_k + \lambda^2 K_k / 2\} \zeta_k(\lambda) \\ &\quad + \lambda \{(k+1)(k+4-4\nu)K_{k+1} + (k+2-2\nu)\lambda K_k\} {}^1\rho_{k+1}(\lambda) + \lambda \{-(k-1)(k-4+4\nu)K_{k-1} \\ &\quad + (k-2+2\nu)\lambda K_k\} (1+{}^1\delta_k) {}^2\rho_{k-1}(\lambda)] \sin k\theta \cos \lambda z d\lambda = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $I_n = I_n(\lambda)$, $K_n = K_n(\lambda)$ であり、 ${}^m\delta_n$ はクロネッカーのデルタである。式 (18)~(20) において、 $\cos k\theta \cos \lambda z$ などにかかる係数を零に等置すれば $f_k(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h_k(\lambda)$ に関する三元連立一次方程式が得られ、これを解けばこれらの未知数は次の形で表される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_k(\lambda) \\ g_k(\lambda) \\ h_k(\lambda) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^1f_k(\lambda) \\ {}^1g_k(\lambda) \\ {}^1h_k(\lambda) \end{bmatrix} \{\xi_k(\lambda) + {}^0\rho_k(\lambda)\} + \frac{c}{2} \begin{bmatrix} {}^2f_k(\lambda) \\ {}^2g_k(\lambda) \\ {}^2h_k(\lambda) \end{bmatrix} \eta_{k-1}(\lambda) + \begin{bmatrix} {}^3f_k(\lambda) \\ {}^3g_k(\lambda) \\ {}^3h_k(\lambda) \end{bmatrix} \eta_k(\lambda) + \frac{c}{2} \begin{bmatrix} {}^4f_k(\lambda) \\ {}^4g_k(\lambda) \\ {}^4h_k(\lambda) \end{bmatrix} \eta_{k+1}(\lambda) \\ &\quad + \begin{bmatrix} {}^5f_k(\lambda) \\ {}^5g_k(\lambda) \\ {}^5h_k(\lambda) \end{bmatrix} \zeta_k(\lambda) + \begin{bmatrix} {}^6f_k(\lambda) \\ {}^6g_k(\lambda) \\ {}^6h_k(\lambda) \end{bmatrix} {}^1\rho_{k+1}(\lambda) + \begin{bmatrix} {}^7f_k(\lambda) \\ {}^7g_k(\lambda) \\ {}^7h_k(\lambda) \end{bmatrix} {}^2\rho_{k-1}(\lambda) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで、 ${}^l f_k(\lambda)$, ${}^l g_k(\lambda)$, ${}^l h_k(\lambda)$ ($l=1\sim 7$) は連立一次方程式を解くことにより求まる $I_k(\lambda)$, $K_k(\lambda)$ などを含む関数である。式 (21) が成立すれば、未定係数の値にかかわらず円柱側面は応力自由となる。

2.5 球か面の境界条件 2.1 および 2.2 節の関係を用いて応力関数 [II] を書き直すと次のようになる。

$$[II]^* \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m,n} \bar{R}^{m+2n} P_{m+2n}^m(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta}, & \varphi_4 &= p \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{m,n} \bar{R}^{m+2n+1} P_{m+2n+1}^m(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} \\ \lambda_3 &= p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{m,n} \bar{R}^{m+2n} P_{m+2n}^m(\bar{\mu}) \sin m\bar{\theta}, & \lambda_2 &= -\frac{c}{2} p \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{m,n} \bar{R}^{m+2n+1} P_{m+2n+1}^m(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{m,n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{F}_{k,m,n}(\lambda) f_k(\lambda) d\lambda, & \beta_{m,n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{G}_{k,m,n}(\lambda) g_k(\lambda) d\lambda \\ \gamma_{m,n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{H}_{k,m,n}(\lambda) h_k(\lambda) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

式 (23) に式 (21) を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{m,n} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^1\alpha_{m,n}{}^{i,j} A_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^2\alpha_{m,n}{}^{i,j} B_{i,j} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^3\alpha_{m,n}{}^{i,j} C_{i,j} + \sum_{i=1}^{\infty} (-c^1\alpha_{m,n}{}^{i,0} + {}^4\alpha_{m,n}{}^{i+1}) D_{i+1} \\ \beta_{m,n} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^1\beta_{m,n}{}^{i,j} A_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^2\beta_{m,n}{}^{i,j} B_{i,j} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^3\beta_{m,n}{}^{i,j} C_{i,j} + \sum_{i=1}^{\infty} (-c^1\beta_{m,n}{}^{i,0} + {}^4\beta_{m,n}{}^{i+1}) D_{i+1} \\ \gamma_{m,n} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^1\gamma_{m,n}{}^{i,j} A_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^2\gamma_{m,n}{}^{i,j} B_{i,j} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^3\gamma_{m,n}{}^{i,j} C_{i,j} + \sum_{i=1}^{\infty} (-c^1\gamma_{m,n}{}^{i,0} + {}^4\gamma_{m,n}{}^{i+1}) D_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

となり, $\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}, \gamma_{m,n}$ は未定係数の線形結合によって表される. ここで, たとえば

$$\left. \begin{aligned} {}^1\alpha_{m,n}{}^{i,j} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{F}_{k,m,n}(\lambda) F_{k,i,j}^*(\lambda) {}^1f_k(\lambda) d\lambda \\ {}^2\alpha_{m,n}{}^{i,j} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{F}_{k,m,n}(\lambda) \left\{ \frac{c}{2} G_{k-1,i,j}^*(\lambda) {}^2f_k(\lambda) + G_{k,i,j}^*(\lambda) {}^3f_k(\lambda) + \frac{c}{2} G_{k+1,i,j}^*(\lambda) {}^4f_k(\lambda) \right\} d\lambda \\ {}^3\alpha_{m,n}{}^{i,j} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{F}_{k,m,n}(\lambda) H_{k,i,j}^*(\lambda) {}^5f_k(\lambda) d\lambda \\ {}^4\alpha_{m,n}{}^{i+1} &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{F}_{k,m,n}(\lambda) \lambda^{i-1} \{ I_{i+k+1}(\lambda c) {}^6f_k(\lambda) + I_{i-k+1}(\lambda c) {}^7f_k(\lambda) \} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

であり, ${}^1\beta_{m,n}{}^{i,j}, {}^1\gamma_{m,n}{}^{i,j}$ ($l=1\sim 4$) も同様な形で得られる. しかし, これらの係数のうち ${}^l\alpha_{m,n}{}^{i,j}, {}^l\gamma_{m,n}{}^{i,j}$ ($l=1, 3, 4$) については, $n=0$ の場合 m, i, j, k の大小関係によっては, これらの係数に含まれる被積分関数が積分の下限において発散するが, 境界条件に関する式 (26)~(28) にも示されるようにこれらの係数に対応する応力関数 [II]* に含まれる φ_0, λ_3 より生ずる変位・応力成分はすべて $(\alpha_{m,0} + 2\gamma_{m,0})$ の形で重ね合わされ, この形では積分の下限で発散しない. そこで応力関数 [I], [II]*, [III] より応力成分を求め球か面の応力を自由とすれば次の関係が得られる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{\bar{r}}}{p} \right)_{\bar{R}=a} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+1)(m+2) \tilde{A}_{m,0} - \frac{(m+2)(2m+1)(m-2+4\nu)}{2m+3} \tilde{B}_{m,0} - 2m(m+2) \tilde{C}_{m,0} \right. \\ &+ \frac{m^3+3m-2\nu}{2m-1} (1-{}^0\delta_m)(1-{}^1\delta_m) \tilde{D}_m + m(m-1)(\tilde{\alpha}_{m,0} + 2\tilde{\gamma}_{m,0}) + \frac{(2m+1)(m^2-m-2-2\nu)}{2m+3} \tilde{\beta}_{m,0} \\ &+ \frac{\tilde{c}}{2} (m-1)(1-{}^0\delta_m) \tilde{\beta}_{m-1,0} \left. \right] P_m^m(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(m+2n+1)(m+2n+2) \tilde{A}_{m,n} \right. \\ &- \frac{(m+2n+2)(2m+2n+1)(m+2n-2+4\nu)}{2m+4n+3} \tilde{B}_{m,n} + \frac{2n\{(m+2n)(m+2n+3)-2\nu\}}{2m+4n-1} \tilde{B}_{m,n-1} \\ &- 2m(m+2n+2) \tilde{C}_{m,n} + (m+2n)(m+2n-1) \tilde{\alpha}_{m,n} + \frac{(2m+2n+1)\{(m+2n-2)(m+2n+1)-2\nu\}}{2m+4n+3} \tilde{\beta}_{m,n} \\ &- \frac{2n(m+2n-1)(m+2n+3-4\nu)}{2m+4n-1} \tilde{\beta}_{m,n-1} + 2m(m+2n-1) \tilde{\gamma}_{m,n} + \frac{\tilde{c}}{2} (m+2n-1)(1-{}^0\delta_m)(1+{}^1\delta_m) \tilde{\beta}_{m-1,n} \\ &\left. - \frac{\tilde{c}}{2} 2n(m+2n-1)(2m+2n+1) \tilde{\beta}_{m+1,n-1} \right] P_{m+2n}^m(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} + \frac{1}{3} P_0(\bar{\mu}) + \frac{2}{3} P_2(\bar{\mu}) = 0 \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{\bar{r}\bar{\theta}}}{p \sin \bar{\varphi}} \right)_{\bar{R}=a} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [T_{m,0}] P_m^{m'}(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} [T_{m,n}] P_{m+2n}^{m'}(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(m+2n+3)(m+2n-2+4\nu)}{2} \tilde{B}_{m,n} - \frac{(2n+1)(m+2n+2)(m+2n+3)}{m} \tilde{C}_{m,n} \right. \\ &+ \frac{(m+2n)(m+2n+5-4\nu)}{2} \tilde{\beta}_{m,n} + \frac{(m+2n)(m+2n+1)(2m+2n+2)}{m} \tilde{\gamma}_{m,n+1} \\ &+ \frac{\tilde{c}}{4} \frac{(m+2n)(m+2n+1)}{m} (1+{}^1\delta_m) \tilde{\beta}_{m-1,n+1} + \frac{\tilde{c}}{4} \frac{(m+2n)(m+2n+1)(2m+2n+2)(2m+2n+3)}{m} \\ &\times \tilde{\beta}_{m+1,n} \left. \right] P_{m+2n+1}^m(\bar{\mu}) \cos m\bar{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2(n+1) \tilde{A}_{0,n} - \frac{4(n+1)(n-1+2\nu)}{4n+3} \tilde{B}_{0,n} \right. \\ &+ \frac{2(2n^2-1+\nu)}{4n-1} \tilde{B}_{0,n-1} - (2n-1) \tilde{\alpha}_{0,n} + \frac{(2n-1)(2n+3-4\nu)}{4n-1} \tilde{\beta}_{0,n-1} \\ &\left. - \frac{(4n^2+4n-1+2\nu)}{4n+3} \tilde{\beta}_{0,n} + \frac{\tilde{c}}{2} (2n-1)(2n+1) \tilde{\beta}_{1,n-1} \right] P_{2n}^n(\bar{\mu}) - \frac{1}{3} P_2'(\bar{\mu}) = 0 \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\tau_{\bar{R}\bar{\theta}} \sin \bar{\varphi}}{p}\right)_{\bar{R}=a} &= \sum_{m=1}^{\infty} [T_{m,0}] P_m^m(\bar{\mu}) \sin m\bar{\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [T_{m,n}] P_{m+2n}^m(\bar{\mu}) \sin m\bar{\theta} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[m(m+2) \tilde{A}_{m,0} - \frac{m(2m+1)(m-2+4\nu)}{2(2m+3)} \tilde{B}_{m,0} - \frac{(m+2)(4m^2+4m+3)}{2m+3} \tilde{C}_{m,0} \right. \\
 &\quad + \frac{m^2-2+2\nu}{2m-1} (1-{}^1\delta_m) \tilde{D}_m - m(m-1)(\tilde{\alpha}_{m,0}+2\tilde{\gamma}_{m,0}) - \frac{m(2m+1)(m-2+4\nu)}{2(2m+3)} \tilde{\beta}_{m,0} \\
 &\quad + \frac{m(2m+1)(2m+2)}{2m+3} \tilde{\gamma}_{m,1} - \frac{\tilde{c}}{4} 2(m-1) \tilde{\beta}_{m-1,0} + \frac{\tilde{c}}{4} \frac{m(2m+1)}{2m+3} (1+{}^1\delta_m) \tilde{\beta}_{m-1,1} \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{c}}{4} m(2m+1)(2m+2) \tilde{\beta}_{m+1,0} \right] P_m^m(\bar{\mu}) \sin m\bar{\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[m(m+2n+2) \tilde{A}_{m,n} \right. \\
 &\quad - \frac{m(2m+2n+1)(m+2n-2+4\nu)}{2(2m+4n+3)} \tilde{B}_{m,n} + \frac{mn(m+2n+3-4\nu)}{2m+4n-1} \tilde{B}_{m,n-1} \\
 &\quad - \frac{(m+2n+2)\{3m^2+(m+2n+1)(m+2n+3)\}}{2m+4n+3} \tilde{C}_{m,n} + \frac{2n(2n-1)(m+2n+1)}{2m+4n-1} \tilde{C}_{m,n-1} \\
 &\quad - m(m+2n-1) \tilde{\alpha}_{m,n} - \frac{m(2m+2n+1)(m+2n-2+4\nu)}{2(2m+4n+3)} \tilde{\beta}_{m,n} + \frac{mn(m+2n+3-4\nu)}{2m+4n-1} \tilde{B}_{m,n-1} \\
 &\quad - \frac{(m+2n-1)\{3m^2+(m+2n)(m+2n-2)\}}{2m+4n-1} \tilde{\gamma}_{m,n} + \frac{(m+2n)(2m+2n+1)(2m+2n+2)}{2m+4n+3} \tilde{\gamma}_{m,n+1} \\
 &\quad - \frac{\tilde{c}}{4} \frac{2(m+2n-1)(2m+n-1)}{2m+4n-1} (1+{}^1\delta_m) \tilde{\beta}_{m-1,n} + \frac{\tilde{c}}{4} \frac{(m+2n)(2m+2n+1)}{2m+4n+3} (1+{}^1\delta_m) \tilde{\beta}_{m-1,n+1} \\
 &\quad + \frac{\tilde{c}}{4} \frac{4n(m-n+1)(m+2n-1)(2m+2n+1)}{2m+4n-1} \tilde{\beta}_{m+1,n-1} \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{c}}{4} \frac{(m+2n)(2m+2n+1)(2m+2n+2)(2m+2n+3)}{2m+4n+3} \tilde{\beta}_{m+1,n} \right] P_{m+2n}^m(\bar{\mu}) \sin m\bar{\theta} = 0 \dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{m,n} &= \frac{A_{m,n}}{a^{m+2n+3}}, & \tilde{B}_{m,n} &= \frac{B_{m,n}}{a^{m+2n+3}}, & \tilde{C}_{m,n} &= \frac{C_{m,n}}{a^{m+2n+3}}, & \tilde{D}_m &= \frac{D_m}{a^{m+1}} \\
 \tilde{\alpha}_{m,n} &= a^{m+2n-2} \alpha_{m,n}, & \tilde{\beta}_{m,n} &= a^{m+2n} \beta_{m,n}, & \tilde{\gamma}_{m,n} &= a^{m+2n-2} \gamma_{m,n}, & \tilde{c} &= c/a
 \end{aligned}$$

である。式 (26)~(28) において、ルジャンドル陪関数およびその微分形の係数を零に等置すれば $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, D_m に関する無限連立一次方程式が得られる。ただし、式 (27) の第 1 項および第 2 項から得られる係数方程式は、式 (28) から得られる式と同一であり、式 (28) が満足されれば式 (27) のこの部分は自然に満足される。 $\tau_{\bar{R}\bar{\theta}}$ をこのような形に変形することによって級数の収束は極めて速くなった。その反面、 $n=0$ とおいて得られるこれらの係数方程式のうち $m=1$ の場合には式 (26)~(28) より得られる係数方程式には一つの線形従属関係が生じて、独立な式は二つだけになるが、 $m \geq 2$, $n=0$ では応力関数 [III] のうち φ_0 , φ_4 , λ_3 より導かれる成分にのみ従属関係が生じるため、[III] を φ_0 , φ_4 , λ_3 だけで構成したのでは [II]* より生ずる成分を打ち消すことはできない。 φ_1 , φ_2 より生ずる成分は、これを補うためのものである。以上のことを考慮して無限連立一次方程式を解けば完全に解は決まり、全体の変位および応力は応力関数 [I], [II], [III] を重ね合わせて求める。

3. 数 値 計 算

ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、偏心量 $c=0.25$ の場合について数値計算を行った。計算に当たっては、まず式 (25) に含まれる積分をシンプソンの 5 点公式を用いて求め、 k について総和した。そして $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, D_m を $m=0 \sim 3$, $n=0 \sim (5-m)$ 項まで用いて応力を計算した。

図 3 は球か半径 $a=0.3$ と 0.5 の場合についての $\bar{y}=0$ 断面内 CA 間および CA' 間の $\sigma_{\bar{\varphi}}$ の分布を示

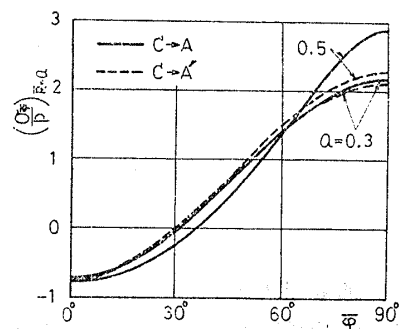


図 3 球か面の $\sigma_{\bar{\varphi}}$ の分布 ($\bar{y}=0$)

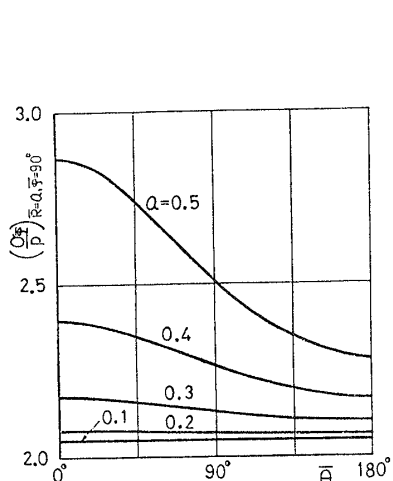


図4 球か面の $\sigma_{\bar{\varphi}}$ の分布 ($\bar{z}=0$)

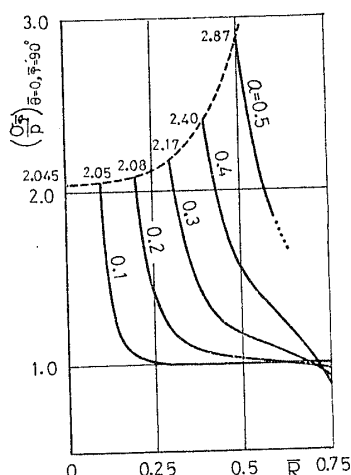


図5 x 軸上の $\sigma_{\bar{\varphi}}$ の分布 ($\bar{\theta}=0, \bar{\varphi}=90^\circ$)

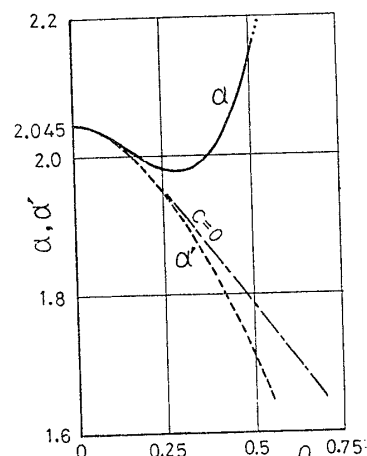


図6 応力集中係数

したものである。いずれも点 C 近傍において圧縮応力が極大となり、点 A の引張応力が最大となる。また、点 A と A' での応力の差異は、 $a=0.3$ 程度では小さい。図4は $\bar{z}=0$ 断面における AA' 間の $\sigma_{\bar{\varphi}}$ の分布を示したものであり、点 A で最大引張応力となり点 A' において極小となる。球か半径が大きくなるにつれて偏心の影響が顕著に表れるようになる。図5は x 軸上 AB 間の $\sigma_{\bar{\varphi}}$ の分布を示したものである、球か半径が零に近づけば円柱側面の影響は減少して球かを有する無限体の結果に一致し、点 A における $\sigma_{\bar{\varphi}}$ は $2.045p$ となる。逆に球か半径が大きくなると球か面上点 A の応力は急激に増大するが、円柱側面上点 B における応力は、球かが存在しない場合よりわずかに小さくなるにすぎない。最小断面部 ($\bar{z}=0$) における平均応力を公称応力として、球か面上点 A および A' における応力集中係数 α, α' を示すと図6のようになる。また図中の一点鎖線は球かが円柱中心に存在する場合である⁽⁹⁾。球かが小さいところでは、 α と α' はともに $c=0$ の場合と同様に球か半径が大きくなると減少するが、さらに球か半径が大きくなると α は $a=0.3$ で極小値をとった後急激に増大する。

4. 結 言

本研究は偏心球かを有する無限円柱が軸方向に引張荷重を受ける非軸対称問題を三次元弾性論によって解

析し、応力分布などに及ぼす偏心の影響を明らかにしたものである。解析に当たっては、まず座標移動に伴って付加応力関数が必要となることを示し、次いで偏心球か中心を原点とする球調和関数と円柱中心軸を軸とする円柱調和関数の相互変換式を導き、これらの関係を用いて無限円柱に対する解と球かを除く無限体に対する解を相互に座標交換することが可能となり、球か面および円柱側面の境界条件を同時に満足させることができた。この場合、球か面の境界条件に関連した無限級数の収束を速めるための式変形について、またそのため必要となる補助の応力関数について述べ、数値計算によって本解析の妥当性を確かめた。

なお数値計算には東京工業大学情報処理センターの HITAC 8700 および HITAC M・180 を使用した。

文 献

- (1) Ling, C.B., *Quart. Appl. Math.*, **10**-2 (1952-7), 149.
- (2) 中原・斎藤, 機械前刷, No. 84 (昭 38-4), 49.
- (3) Ling, C.B., *Quart. Appl. Math.*, **13**-4 (1956-1), 381.
- (4) Atsumi, A., *Trans. ASME, Ser. E*, **27**-1 (1960-3), 87.
- (5) 土田・ほか2名, 機論, **41**-345 (昭 50-5), 1337.
- (6) Watson, G.N., *A treatise on the Theory of Bessel Functions*, (1944), 359, Cambridge.
- (7) Morse, P.M. and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, Pt. II (1953), 1318, McGraw-Hill.
- (8) Cooke, J.C., *Z. AMM*, **42**-7/8 (1962-7/8), 305.
- (9) 川島・ほか2名, 機講論, No. 750-2 (昭 50-4), 109.

討 論

〔質問〕 長谷川久夫 (広島電機大学)

(1) 関数の座標間の関係を巧みに駆使する著者らの手腕には感服した。「周表面からの貫通孔をもつ無

限円柱」といったような問題も、近い将来において、原理的にでなく具体的に取扱うことができるのか。

(2) 式 (15) の応力関数には4個の未知係数があ

るが、球か面の応力成分は 3 個であるから、1 個多いように思われる。この 1 個は何の役割をもっているのか。

(3) 式 (3), (16), (22) の関係を導入しないで、応力関数の式 (12), (14), (15) から直接に変位あるいは応力式を求め、これを座標変換しても、境界条件の式 [式 (18)~(20) と (26)~(28) に相当する式] は構成できるように思われる。その場合、不都合なことが生ずるか。

(4) 数値計算でのフーリエ級数の項数 $m=0\sim 3$, $n=0\sim(5-m)$ は少ないように感じられるが、これで十分なのか。

[回答] (1) ご指摘の問題では境界が相直交する円柱座標で表されるため、原座標と 90° 回転した座標における円柱調和関数間の変換公式が導ければ、この問題に本解析の方法が適用できると思う。

(2) 球か面の境界条件式 (26)~(28) から導かれる連立一次方程式で $m\geq 2$, $n=0$ の場合、応力関数 [III] のうち φ_0 , φ_1 , λ_3 より生ずる成分にのみ従属関係がある。これを補足する解が φ_1 , φ_2 から得られる。

(3) 応力を座標変換しても、円柱関数あるいは球関数を含む式相互間の変換式があれば、原理的には不都合は生じないが、応力関数の形で座標変換しておく方が計算ははるかに容易になる。

(4) 形状および荷重の連続性から本問題の場合収束は良好であり、このような展開項数によっても球か面における残余の応力は、球か半径 $a=0.5$ の場合でも $0.01p$ 程度であった。この原因は式 (27) の一部が式 (28) で満足されるように式を変形したことにあるように思われる。しかし、偏心量、球か半径が大きくなれば、さらに多くの項数が必要になる。