

539.384.01 :: 539.4.013

球状介在物を有する円柱の曲げ*

川島幸司**, 土田栄一郎***, 中原一郎****

1. 緒 言

弾性体中に弾性係数の異なる介在物が存在すると、そのために応力集中を生じ、強度低下の原因となる。また、これらの介在物による応力集中の程度は、介在物の大きさと弾性係数によって左右され、弾性体、介在物の形状、弾性体中に存在する位置およびこれに作用する荷重の種類によっても異なってくる。

著者らは、介在物による弾性挙動を明らかにするために既に球状介在物を有する円柱がねじりモーメントおよび一様引張荷重を受ける問題⁽¹⁾⁽²⁾を解析してきた。実際にはねじり、引張りとともに曲げモーメントを受ける場合も多い。そこで本研究では球状介在物を有する円柱が曲げモーメントを受ける場合を扱う。

一般に、ねじり、引張りの軸対称問題に対して、一軸回りの曲げのような非軸対称問題においては応力関数の決定に困難を伴うことが多く解析例はわずかである^{(3)~(7)}。ここでは Dougall⁽⁸⁾ の 3 個の調和応力関数 $\varphi_0, \varphi_4, \lambda_3$ を用い、既報⁽⁷⁾の球かに対する問題と同様に、異なる座標系で表された単連結領域に対する解を重ね合わせ、それぞれの解を互いに座標変換することによって介在物境界および円柱側面の境界条件を満足させた。さらに数値計算により、介在物近傍の応力分布および介在物の大きさが円柱母材応力に及ぼす影響を明らかにした。

2. 解 析 法

図 1 に示されるように円柱半径を単位としてすべての長さの基準にとり、介在物半径を a とする。また介在物を示す添字として “-” を用いて円柱母材の諸量と区別する。いま、物体力のない場合の三次元弾性基礎方程式を満たす解として Dougall の調和応力関数 $\varphi_0, \varphi_4, \lambda_3$ を用いて球座標系 (R, θ, φ) における変位成分を表せば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_R &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial R} - \sin \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial \varphi} \\ &\quad - 4(1-\nu)\varphi_4 \cos \varphi + \frac{2}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} \\ 2Gv_\theta &= \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \\ &\quad - 2 \left[\sin \varphi \frac{\partial \lambda_3}{\partial R} + \frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi} \right] \\ 2Gw_\varphi &= \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} + R \sin \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial R} \\ &\quad + 4(1-\nu)\varphi_4 \sin \varphi + \frac{2}{R} \cot \varphi \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここで u_R, v_θ, w_φ は R, θ, φ 方向の変位成分、 $\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_4 = \nabla^2 \lambda_3 = 0$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

であり、 ν はポアソン比、 G は横弾性係数である。

まず、介在物がない円柱に y 軸回りに曲げモーメント M を作用させた場合を考えると、この解は次の応力関数によって与えられる⁽⁷⁾。

$$[I] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= -\frac{3-4\nu}{24(1+\nu)} kR^3 P_3^1(\mu) \cos \theta \\ \varphi_4 &= -\frac{1}{6(1+\nu)} kR^2 P_2^1(\mu) \cos \theta \\ \lambda_3 &= \frac{1-4\nu}{48(1+\nu)} kR^3 P_3^1(\mu) \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $k = (4/\pi)M$ は曲げ応力のこう配を示し、 $P_n^m(\mu)$ は n 次のルジャンドル陪関数、 $\mu = \cos \varphi$ である。

これより得られる変位、応力成分は次式のように示される。

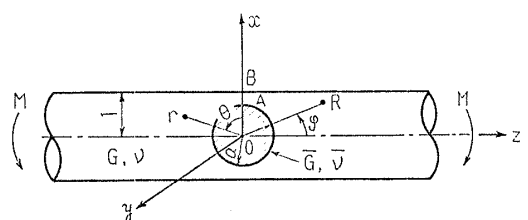


図 1 座標系

* 昭和 50 年 10 月 11 日 第 53 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 52 年 10 月 7 日。
 ** 正員、三井造船会社。
 *** 正員、埼玉大学工学部 (〒 338 浦和市下大久保 255)。
 **** 正員、東京工業大学。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{2Gu_R}{k \cos \theta} &= \frac{R^2}{30(1+\nu)} \{3(1-4\nu)P_1^1(\mu) + 2(1+\nu)P_3^1(\mu)\} \\
 \frac{2Gv_\theta}{k \sin \theta} &= \frac{R^2}{30(1+\nu) \sin \varphi} \{3(1-4\nu)P_1^1(\mu) + 2(1+\nu)P_3^1(\mu)\} \\
 \frac{2Gw_\varphi}{k \cos \theta} &= \frac{R^2}{30(1+\nu)} \{3(1-4\nu)(P_1^{1'}(\mu) + 2(1+\nu)P_3^{1'}(\mu) - 20(1+\nu)P_2^1(\mu))\} \\
 \frac{\sigma_R}{k \cos \theta} &= \frac{R}{15} \{3P_1^1(\mu) + 2P_3^1(\mu)\}, \quad \frac{\sigma_\varphi}{k \cos \theta} = \frac{2R}{15} \{6P_1^1(\mu) - P_3^1(\mu)\} \\
 \frac{\tau_{R\varphi}}{k \cos \theta} &= -\frac{R}{3} P_2^1(\mu) \sin \varphi, \quad \sigma_\theta = \tau_{R\theta} = \tau_{\theta\varphi} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで'は μ による微分を表す。

したがって、応力関数 [I] の解と重ね合わせ、以下の境界条件を満足する解を導けば球状介在物を有する円柱の曲げに対する解が得られる。ここで介在物と円柱母材は完全接着しているものとする。

境界条件

(i) 円柱側面 $r=1$ において

$$(\sigma_r)_{r=1} = (\tau_{rz})_{r=1} = (\tau_{r\theta})_{r=1} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

(ii) 介在物境界 $R=a$ において

$$\left. \begin{aligned}
 (u_R)_{R=a} &= (\bar{u}_R)_{R=a}, & (v_\theta)_{R=a} &= (\bar{v}_\theta)_{R=a} \\
 (w_\varphi)_{R=a} &= (\bar{w}_\varphi)_{R=a}, & (\sigma_R)_{R=a} &= (\bar{\sigma}_R)_{R=a} \\
 (\tau_{R\varphi})_{R=a} &= (\bar{\tau}_{R\varphi})_{R=a}, & (\tau_{R\theta})_{R=a} &= (\bar{\tau}_{R\theta})_{R=a}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

(iii) 無限遠方 $|z| \rightarrow \infty$ で

$$\sigma_z = kr \cos \theta, \text{ その他の応力成分は } 0 \dots\dots (6)$$

そこで、上記境界条件を満たすため、弾性体領域が介在物を除く無限体領域、円柱領域および介在物領域から成っていることに注目し次のような応力関数を与える。

母材領域 ($R > a$)

$$\left[\text{II} \right] \left\{ \begin{aligned}
 \varphi_0 &= k \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{P_{2m+1}^1(\mu)}{R^{2m+2}} \cos \theta \\
 \varphi_4 &= k \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{P_{2m+2}^1(\mu)}{R^{2m+3}} \cos \theta \\
 \lambda_3 &= k \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{P_{2m+1}^1(\mu)}{R^{2m+2}} \sin \theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

$$\left[\text{III} \right] \left\{ \begin{aligned}
 \varphi_0 &= k \int_0^\infty \psi_1(\lambda) I_1(\lambda r) \cos \lambda z \cos \theta d\lambda \\
 \varphi_4 &= k \int_0^\infty \lambda \psi_2(\lambda) I_1(\lambda r) \sin \lambda z \cos \theta d\lambda \\
 \lambda_3 &= k \int_0^\infty \psi_3(\lambda) I_1(\lambda r) \cos \lambda z \sin \theta d\lambda
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

介在物領域 ($R < a$)

$$\left[\text{IV} \right] \left\{ \begin{aligned}
 \varphi_0 &= k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n R^{2n+1} P_{2n+1}^1(\mu) \cos \theta \\
 \varphi_4 &= k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n R^{2n+2} P_{2n+2}^1(\mu) \cos \theta \\
 \lambda_3 &= k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n R^{2n+3} P_{2n+3}^1(\mu) \sin \theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで $A_m, B_m, C_m, \bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{C}_n$ および $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \psi_3(\lambda)$ はそれぞれ境界条件から決定される未定係数ならびに未知関数であり、 $I_n(\lambda r)$ は第1種変形ベッセル関数である。

特に円柱半径に比べて介在物半径が小さい場合は応力関数 [I], [II], [IV] で境界条件 (ii), (iii) を満足させることができる。

すなわち

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{A_0}{a^3} &= \frac{7(\Gamma-1)\{4(2+7\nu) + (27-28\nu)\Gamma\}}{30(4+\Gamma)M_1} \\
 &+ \frac{(1-\nu)(1+\bar{\nu})\Gamma}{6(1+\nu)M_2} + \frac{2-7\Gamma}{30(4+\Gamma)} \\
 \frac{A_1}{a^7} &= -\frac{\Gamma-1}{3M_1}, \quad \frac{B_0}{a^3} = \frac{7(\Gamma-1)}{6M_1} \\
 \frac{C_0}{a^3} &= \frac{(\Gamma-1)\{4(2+7\nu) + (27-28\nu)\Gamma\}}{12(4+\Gamma)M_1} \\
 \frac{\bar{A}_0}{a^2} &= \frac{\Gamma}{6(1+\nu)} - \frac{5(1-\nu)\Gamma}{6(1+\nu)M_2} \\
 \bar{A}_1 &= \frac{\{59-49\nu + 2(23-28\nu)\Gamma\}\Gamma}{12(4+\Gamma)M_1} \\
 &- \frac{7(1-\nu)(3-2\bar{\nu})\Gamma}{24(1+\nu)M_2} \\
 \bar{B}_0 &= -\frac{5(1-\nu)\Gamma}{6(1+\nu)M_2} \\
 \bar{C}_0 &= \frac{5(1-\nu)(3-2\bar{\nu})\Gamma}{48(1+\nu)M_2} - \frac{5\Gamma}{24(4+\Gamma)} \\
 A_m &= \bar{A}_m = 0 \quad (m \geq 2) \\
 B_m &= C_m = \bar{B}_m = \bar{C}_m = 0 \quad (m \geq 1) \\
 M_1 &= 13-7\nu + 2(11-14\nu)\Gamma \\
 M_2 &= 2(2-3\bar{\nu}) + (1+\bar{\nu})\Gamma
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで Γ は介在物と円柱母材との横弾性係数比 \bar{G}/G であり、 $\Gamma=0$ は介在物が球か、 $\Gamma \rightarrow \infty$ は剛介在物に相当し、 $\Gamma=1$ は介在物のない中実円柱の場合を表す。

式 (10) の結果は球状介在物が無限体中に存在する場合の解であり、これより導かれる変位および応力成分は Das⁽⁶⁾ が求めた結果に一致する。

ところで応力関数 [I] は境界条件 (i), (iii) を満足しており, 応力関数 [II], [III] から得られる変位および応力成分は $|z| \rightarrow \infty$ で零となることから応力関数 [I], [II], [III] を組み合わせたものは (iii) の境界条件を満足する. よって残りの境界条件を満足させることにする.

まず, 円柱側面の境界条件を満たすため, 次の公式⁽⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_{m+2s}^m(\mu)}{R^{m+2s+1}} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^s}{(2s)!} \int_0^\infty \lambda^{m+2s} K_m(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \\ \frac{P_{m+2s+1}^m(\mu)}{R^{m+2s+2}} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \int_0^\infty \lambda^{m+2s+1} K_m(\lambda r) \sin \lambda z d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

を用いて応力関数 [II] を書き直すと

$$[V] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \sum_{m=0}^\infty a_m \int_0^\infty \lambda^{2m+1} K_1(\lambda r) \cos \lambda z \cos \theta d\lambda \\ \varphi_4 &= k \sum_{m=0}^\infty b_m \int_0^\infty \lambda^{2m+2} K_1(\lambda r) \sin \lambda z \cos \theta d\lambda \\ \lambda_3 &= k \sum_{m=0}^\infty c_m \int_0^\infty \lambda^{2m+1} K_1(\lambda r) \cos \lambda z \sin \theta d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる. ここで

$$a_m = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A_m, \quad b_m = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} B_m, \quad c_m = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^m}{(2m)!} C_m$$

であり, $K_m(\lambda r)$ は m 次の第 2 種変形ベッセル関数である.

応力関数 [I], [III] および [V] より各々応力成分を求め, 境界条件式 (4) を満足させると次のようになる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_r}{k \cos \theta} \right)_{r=1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[\left\{ I_1(\lambda) - \frac{I_2(\lambda)}{\lambda} \right\} \phi_1(\lambda) + \{ 2(1-\nu)I_1(\lambda) + \lambda I_2(\lambda) \} \phi_2(\lambda) + \frac{2}{\lambda} I_2(\lambda) \phi_3(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^\infty \left[\left\{ K_1(\lambda) + \frac{K_2(\lambda)}{\lambda} \right\} a_m + \{ 2(1-\nu)K_1(\lambda) - \lambda K_2(\lambda) \} b_m - \frac{2}{\lambda} K_2(\lambda) c_m \right] \lambda^{2m+1} \right] \cos \lambda z d\lambda = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\tau_{rz}}{k \cos \theta} \right)_{r=1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[I_1'(\lambda) \phi_1(\lambda) + \left\{ 2(1-\nu)I_1'(\lambda) + \left(\frac{1}{2\lambda} + \lambda \right) I_1(\lambda) \right\} \phi_2(\lambda) + \frac{I_1(\lambda)}{\lambda} \phi_3(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^\infty \left[K_1'(\lambda) a_m + \left\{ 2(1-\nu)K_1'(\lambda) + \left(\frac{1}{2\lambda} + \lambda \right) K_1(\lambda) \right\} b_m + \frac{K_1(\lambda)}{\lambda} c_m \right] \lambda^{2m+1} \right] \sin \lambda z = 0 \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\tau_{r\theta}}{k \sin \theta} \right)_{r=1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[\frac{I_2(\lambda)}{\lambda} \phi_1(\lambda) + \frac{I_1(\lambda)}{2} \phi_2(\lambda) + I_2'(\lambda) \phi_3(\lambda) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^\infty \left[\frac{K_2(\lambda)}{\lambda} a_m - \frac{K_1(\lambda)}{2} b_m + K_2'(\lambda) c_m \right] \lambda^{2m+1} \right] \cos \lambda z d\lambda = 0 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで, ' は λ による微分を示す.

式 (13)~(15) で各々の被積分項を零に等置すれば未知関数 $\phi_1(\lambda) \sim \phi_3(\lambda)$ は次のように決定される.

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty [a_m f_1(\lambda) + b_m f_2(\lambda) + c_m f_3(\lambda)] \lambda^{2m+1} \\ \phi_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty [a_m f_4(\lambda) + b_m f_5(\lambda) + c_m f_6(\lambda)] \lambda^{2m+1} \\ \phi_3(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty [a_m f_7(\lambda) + b_m f_8(\lambda) + c_m f_9(\lambda)] \lambda^{2m+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} F_0(\lambda) f_1(\lambda) &= f_0(\lambda) - (1+2\nu)\lambda I_1(\lambda) + \{\lambda^2 - 2(2-\nu)\} I_2(\lambda) \\ F_0(\lambda) f_2(\lambda) &= -\{\lambda^2 - 2(1-\nu)(1-2\nu)\} \lambda I_1(\lambda) + \{2\lambda^2 - (1-2\nu)(5-4\nu)\} I_2(\lambda) \\ F_0(\lambda) f_3(\lambda) &= -2\lambda I_1(\lambda) - 2(1-2\nu)I_2(\lambda), \quad F_0(\lambda) f_4(\lambda) = -\lambda I_1(\lambda) + 2I_2(\lambda) \\ F_0(\lambda) f_5(\lambda) &= f_0(\lambda) - (5-2\nu)\lambda I_1(\lambda) + \{\lambda^2 + 3(1-2\nu)\} I_2(\lambda) \\ F_0(\lambda) f_6(\lambda) &= 2I_2(\lambda), \quad F_0(\lambda) f_7(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} I_1(\lambda) - (1-2\nu)I_2(\lambda) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_0(\lambda)f_8(\lambda) &= \frac{1}{2}(1-2\nu)\lambda I_1(\lambda) + \frac{1}{2}\{\lambda^2 - (1-2\nu)(5-4\nu)\}I_2(\lambda) \\
 F_0(\lambda)f_9(\lambda) &= f_0(\lambda) - 2\lambda I_1(\lambda) - 3I_2(\lambda) \\
 F_0(\lambda) &= -\lambda^3 I_1^3(\lambda) - 2\lambda^2 I_2^3(\lambda) + 4\lambda^2 I_1^2(\lambda)I_2(\lambda) + \{\lambda^2 - 2(1+\nu)\}\lambda I_1(\lambda)I_2^2(\lambda) \\
 f_0(\lambda) &= \lambda^3 I_1^2(\lambda)K_1(\lambda) - 2\lambda^2 I_2^2(\lambda)K_2(\lambda) + 4\lambda^2 I_1^2(\lambda)K_2(\lambda) - \{\lambda^2 - 2(1+\nu)\}\lambda K_1(\lambda)I_2^2(\lambda)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式 (16), (17) が成立すれば, 円柱側面の境界条件は未定係数 A_m, B_m, C_m の値によらず満足される. 次に, 介在物境界における境界条件を満足させるために, 次の数学公式

$$\left. \begin{aligned}
 I_{2m+1}(\lambda r) \sin \lambda z &= \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(\lambda R)^{2n+2}}{(2n+2m+3)!} P_{2n+2}^{2m+1}(\mu) \\
 I_{2m+1}(\lambda r) \cos \lambda z &= \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(\lambda R)^{2n+1}}{(2n+2m+2)!} P_{2n+1}^{2m+1}(\mu)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

を応力関数 [III] に適用すると

$$\text{[VI]} \left\{ \begin{aligned}
 \varphi_0 &= k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R^{2n+1} P_{2n+1}^1(\mu) \cos \theta \\
 \varphi_4 &= k \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n R^{2n+2} P_{2n+2}^1(\mu) \cos \theta \\
 \lambda_3 &= k \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n R^{2n+1} P_{2n+1}^1(\mu) \sin \theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

となる. ここで

$$\alpha_n = \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \lambda^{2n+1} d\lambda, \quad \beta_n = \int_0^{\infty} \phi_2(\lambda) \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} \lambda^{2n+3} d\lambda, \quad \gamma_n = \int_0^{\infty} \phi_3(\lambda) \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \lambda^{2n+1} d\lambda \dots\dots\dots (20)$$

である. 式 (16) を式 (20) に代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_n &= \sum_{m=0}^{\infty} [{}^m\alpha_{n1}A_m + {}^m\alpha_{n2}B_m + {}^m\alpha_{n3}C_m] \\
 \beta_n &= \sum_{m=0}^{\infty} [{}^m\beta_{n1}A_m + {}^m\beta_{n2}B_m + {}^m\beta_{n3}C_m] \\
 \gamma_n &= \sum_{m=0}^{\infty} [{}^m\gamma_{n1}A_m + {}^m\gamma_{n2}B_m + {}^m\gamma_{n3}C_m]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned}
 {}^m\alpha_{n1} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+2)!(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+2} f_1(\lambda) d\lambda, & {}^m\alpha_{n2} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+2)!(2m+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+2} f_2(\lambda) d\lambda \\
 {}^m\alpha_{n3} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+2)!(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+3} f_3(\lambda) d\lambda, & {}^m\beta_{n1} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+3)!(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+4} f_4(\lambda) d\lambda \\
 {}^m\beta_{n2} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+3)!(2m+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+4} f_5(\lambda) d\lambda, & {}^m\beta_{n3} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+3)!(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+4} f_6(\lambda) d\lambda \\
 {}^m\gamma_{n1} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+2)!(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+2} f_7(\lambda) d\lambda, & {}^m\gamma_{n2} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+2)!(2m+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+2} f_8(\lambda) d\lambda \\
 {}^m\gamma_{n3} &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+2)!(2m)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n+2m+2} f_9(\lambda) d\lambda
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

が得られる.

そこで, 応力関数 [I], [II], [VI] および [IV] より変位, 応力成分を求め, 介在物境界における境界条件を満たせば以下のようなになる.

$$\begin{aligned}
 (u_R)_{R=a} &= (\bar{u}_R)_{R=a} \text{ より} \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[- (2n+2) \frac{A_n}{a^{2n+5}} + \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{4n+5} \frac{B_n}{a^{2n+5}} - \frac{4n(n+2-2\nu)}{4n+1} \frac{B_{n-1}}{a^{2n+3}} \right. \\
 &+ \frac{2C_n}{a^{2n+5}} + (2n+1)\alpha_n a^{2n-2} + \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{4n+5} \beta_n a^{2n} - \frac{4n(n+2-2\nu)}{4n+1} \beta_{n-1} a^{2n-2} \\
 &+ 2\gamma_n a^{2n-2} - \frac{1}{\Gamma} \left\{ (2n+1)\bar{A}_n a^{2n-2} + \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{4n+5} \bar{B}_n a^{2n} - \frac{4n(n+2-2\nu)}{4n+1} \bar{B}_{n-1} a^{2n-2} \right. \\
 &\left. + 2\bar{C}_{n-1} a^{2n-2} \right\} \Big] P_{2n+1}^1(\mu) = -\frac{1-4\nu}{10(1+\nu)} P_1^1(\mu) - \frac{1}{15} P_3^1(\mu) \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned}$$

$(v_\theta)_{R=a} = (\bar{v}_\theta)_{R=a}$ より

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{A_n}{a^{2n+5}} + \frac{2(4n^2+10n+7)}{4n+5} \frac{C_n}{a^{2n+5}} - \frac{4n(2n-1)}{4n+1} \frac{C_{n-1}}{a^{2n+3}} \right. \\ & \quad - \alpha_n a^{2n-2} - \frac{2(4n^2+2n+1)}{4n+1} \gamma_n a^{2n-2} + \frac{2(2n+3)(2n+4)}{4n+5} \gamma_{n+1} a^{2n} \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Gamma} \left\{ \bar{A}_n a^{2n-2} + \frac{2(4n^2+2n+1)}{4n+1} \bar{C}_{n-1} a^{2n-2} - \frac{2(2n+3)(2n+4)}{4n+5} \bar{C}_n a^{2n} \right\} \right] P_{2n+1}^1(\mu) \\ & = -\frac{1-4\nu}{10(1+\nu)} P_1^1(\mu) - \frac{1}{15} P_3^1(\mu) \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

$(w_\varphi)_{R=a} = (\bar{w}_\varphi)_{R=a}$ より

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{A_n}{a^{2n+5}} + \frac{2(4n^2+10n+7)}{4n+5} \frac{C_n}{a^{2n+5}} - \frac{4n(2n-1)}{4n+1} \frac{C_{n-1}}{a^{2n+3}} \right. \\ & \quad - \alpha_n a^{2n-2} - \frac{2(4n^2+2n+1)\gamma_n}{4n+1} a^{2n-2} + \frac{2(2n+3)(2n+4)}{4n+5} \gamma_{n+1} a^{2n} \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Gamma} \left\{ \bar{A}_n a^{2n-2} + \frac{2(4n^2+2n+1)}{4n+1} \bar{C}_{n-1} a^{2n-2} - \frac{2(2n+3)(2n+4)}{4n+5} \bar{C}_n \right\} \right] P_{2n+1}'(\mu) \\ & \quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-(2n-1+4\nu) \frac{B_n}{a^{2n+5}} + 2(2n+1)(2n+3) \frac{C_n}{a^{2n+5}} + 2(n+3-2\nu) \beta_n a^{2n} \right. \\ & \quad \left. + 2(2n+2)(2n+4) \gamma_{n+1} a^{2n} - \frac{1}{\Gamma} \{ 2(n+3-2\nu) \bar{B}_n a^{2n} + 2(2n+2)(2n+4) \bar{C}_n a^{2n} \} \right] P_{2n+2}^1(\mu) \\ & = -\frac{1-4\nu}{10(1+\nu)} P_1^{1'}(\mu) - \frac{1}{15} P_3^{1'}(\mu) + \frac{2}{3} P_2^1(\mu) \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

$(\sigma_R)_{R=a} = (\bar{\sigma}_R)_{R=a}$ より

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+2)(2n+3) \frac{A_n}{a^{2n+5}} - \frac{(2n+3)^2(2n-1+4\nu)}{4n+5} \frac{B_n}{a^{2n+5}} \right. \\ & \quad + \frac{4n(2n^2+5n+2-\nu)}{4n+1} \frac{B_{n-1}}{a^{2n+3}} - 2(2n+3) \frac{C_n}{a^{2n+5}} + 2n(2n+1) \alpha_n a^{2n-2} \\ & \quad + \frac{2(2n+3)(2n^2+n-1-\nu)}{4n+5} \beta_n a^{2n} - \frac{8n^2(n+2-2\nu)}{4n+1} \beta_{n-1} a^{2n-2} + 4n \gamma_n a^{2n-2} \\ & \quad - \left\{ 2n(2n+1) \bar{A}_n a^{2n-2} + \frac{2(2n+3)(2n^2+n-1-\nu)}{4n+5} \bar{B}_n a^{2n} - \frac{8n^2(n+2-2\nu)}{4n+1} \bar{B}_{n-1} a^{2n-2} \right. \\ & \quad \left. + 4n \bar{C}_{n-1} a^{2n-2} \right\} \right] P_{2n+1}^1(\mu) = -\frac{1}{5} P_1^1(\mu) - \frac{2}{15} P_3^1(\mu) \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

$(\tau_{R\varphi})_{R=a} = (\bar{\tau}_{R\varphi})_{R=a}$ より

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+3) \frac{A_n}{a^{2n+5}} - \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{2(4n+5)} \frac{B_n}{a^{2n+5}} + \frac{4n(n+2-2\nu)}{2(4n+1)} \frac{B_{n-1}}{a^{2n+5}} \right. \\ & \quad - \frac{(2n+3)(4n^2+12n+11)}{4n+5} \frac{C_n}{a^{2n+5}} + \frac{2n(2n-1)(2n+2)}{4n+1} \frac{C_{n-1}}{a^{2n+3}} - 2n \alpha_n a^{2n-2} \\ & \quad - \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{2(4n+5)} \beta_n a^{2n} + \frac{4n(n+2-2\nu)}{2(4n+1)} \beta_{n-1} a^{2n-2} - \frac{4n(2n^2+1)\gamma_n}{4n+1} a^{2n-2} \\ & \quad + \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+4)}{4n+5} \gamma_{n+1} a^{2n} + \left\{ 2n \bar{A}_n a^{2n-2} + \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{2(4n+5)} \bar{B}_n a^{2n} \right. \\ & \quad - \frac{4n(n+2-2\nu)}{2(4n+1)} \bar{B}_{n-1} a^{2n-2} + \frac{4n(2n^2+1)}{4n+1} \bar{C}_{n-1} a^{2n-2} \\ & \quad \left. - \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+4)}{4n+5} \bar{C}_n a^{2n} \right\} \right] P_{2n+1}'(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(2n-1+4\nu) \frac{B_n}{a^{2n+5}} \right. \\ & \quad - (2n+1)(2n+3)(2n+4) \frac{C_n}{a^{2n+5}} + (2n+1)(n+3-2\nu) \beta_n a^{2n} \\ & \quad + (2n+1)(2n+2)(2n+4) \gamma_{n+1} a^{2n} - \{ (2n+1)(n+3-2\nu) \bar{B}_n a^{2n} \\ & \quad \left. + (2n+1)(2n+2)(2n+4) \bar{C}_n a^{2n} \} \right] P_{2n+2}^1(\mu) = \frac{1}{3} P_2^1(\mu) \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

$(\tau_{R\theta})_{R=a} = (\bar{\tau}_{R\theta})_{R=a}$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+3) \frac{A_n}{a^{2n+5}} - \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{2(4n+5)} \frac{B_n}{a^{2n+5}} + \frac{4n(n+2-2\nu)}{2(4n+1)} \frac{B_{n-1}}{a^{2n+3}} - \frac{(2n+3)(4n^2+12n+11)}{4n+5} \frac{C_n}{a^{2n+5}} + \frac{2n(2n-1)(2n+2)}{4n+1} \frac{C_{n-1}}{a^{2n+3}} - 2n\alpha_n a^{2n-2} - \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{2(4n+5)} \beta_n a^{2n} + \frac{4n(n+2-2\nu)}{2(4n+1)} \beta_{n-1} a^{2n-2} - \frac{4n(2n^2+1)}{4n+1} \gamma_n a^{2n-2} + \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+4)}{4n+5} \gamma_{n+1} a^{2n} + \left\{ 2n\bar{A}_n a^{2n-2} + \frac{(2n+3)(2n-1+4\nu)}{2(4n+5)} \bar{B}_n a^{2n} - \frac{4n(n+2-2\nu)}{2(4n+1)} \bar{B}_{n-1} a^{2n-2} + \frac{4n(2n^2+1)}{4n+1} \bar{C}_{n-1} a^{2n-2} - \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+4)}{4n+5} \bar{C}_n a^{2n} \right\} \right] \times P_{2n+1}(\mu) = 0 \dots\dots\dots (28)$$

ここで式 (23)~(25) において剛体変位を表す項のうち α_0, γ_0 は円柱母材の原点を固定するために零とし, また \bar{A}_0 は母材の変形に対応して介在物が剛体変位するために必要な項として残される⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾.

式(23)~(28)で各 $P_{2n+1}(\mu), P_{2n+2}(\mu), P_{2n+1}'(\mu)$ の係数を等置すれば未定係数 $A_n \sim C_n, \bar{A}_n \sim \bar{C}_n$ に関する無限連立一次方程式が得られる. ここで式 (25), (27) で $P_{2n+1}'(\mu)$ の係数を等置して得られる関係式はそれぞれ式 (24), (28) から得られる関係式と等しい. また式 (26)~(28) で得られる関係式で $n=0$ とおいた三つの式の一つは独立でないため一つは除く必要がある. これらの無限連立一次方程式を解けばすべての応力関数が決定される. そしてすべての変位, 応力は円柱母材側では応力関数 [I]~[III] の重ね合わせによって, また介在物側では応力関数 [IV] により得られる.

3. 数 値 計 算

ポアソン比 $\nu = \bar{\nu} = 0.3$ として介在物半径 $a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ および横弾性係数比 $\Gamma = 0, 0.1, 0.5,$

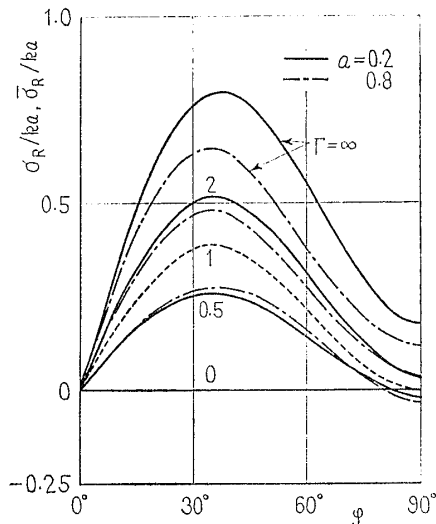


図 2 介在物境界面の $\sigma_R, \bar{\sigma}_R$ の分布 ($\theta=0$)

1, 2, 10, ∞ について数値計算を行った. 各無限級数の係数の収束は良好であるが a の増加に伴いだいに悪くなる. そこで最終に得られる応力値が有効数字三けた以上になるように係数 $A_n \sim C_n, \bar{A}_n \sim \bar{C}_n$ をそれぞれ 8 項用いて連立一次方程式を解いた. 以下にこれらの係数より得られる介在物近傍の応力分布を示す.

図 2 に介在物境界面における応力 $\sigma_R, \bar{\sigma}_R$ の $\theta=0$ の場合の分布を, 介在物がない場合の該当する球面上に生ずる引張応力 $(\sigma_z)_{z=a} = ka$ を基準に, 介在物半径 $a = 0.2, 0.8$ に対し横弾性係数比を $\Gamma = 0, 0.5, 1, 2, \infty$ に変えて示した. 図中 $\Gamma=1$ の場合は $a = 0.2, 0.8$ のいずれの場合も同じであるので点線で示した. 応力 σ_R の最大値はいずれの場合も $30^\circ < \varphi < 40^\circ$ に生じ, 硬い介在物 ($\Gamma > 1$) の場合応力の集中を生じる. また $\varphi = 90^\circ$ の σ_R は介在物の横弾性係数

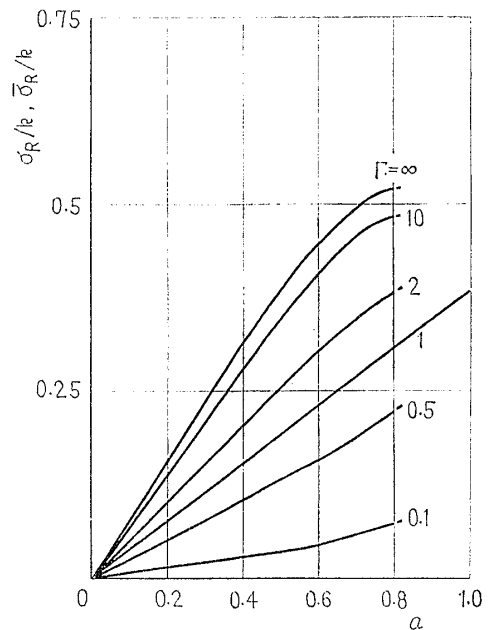


図 3 介在物境界面の $\sigma_R, \bar{\sigma}_R$ の最大値と介在物半径

が母材の横弾性係数より大きければ引張応力に、小さければ圧縮応力になる。応力の基準量を $\sigma_z = ka$ としたときの分布形はそれぞれの Γ に対して $a=0, 2, 0.8$ とほぼ同じ形となっている。図 3 は図 2 の σ_R の最大値について介在物がない場合の円柱表面の最大

引張応力 $(\sigma_z)_{z=1} = k$ を基準に表し、横軸に介在物半径をとって示したものである。 a の増加に伴い、 $(\sigma_R, R=a)_{\max}$ は単調に増加するが、 $\Gamma=1$ を境に硬い介在物では上に凸、柔らかい場合には下に凸になるため、 $a=0.6$ 以上になると応力増加率の減少、増大がそれぞれ見られる。本問題の曲げを受ける場合には最大引張応力を生ずる位置が自由応力面から離れているために、ねじり⁽¹⁾、引張り⁽²⁾の問題に比べて増減の割合は小さい。図 4、5 に介在物境界面における $\theta=0$ に対する応力 σ_φ , $\bar{\sigma}_\varphi$ の分布を $\sigma_z = ka$ を基準に示した。 σ_φ , $\bar{\sigma}_\varphi$ の分布とも Γ による影響を大きく受けており、硬い介在物の場合 ($\Gamma > 1$) では介在物側の $\bar{\sigma}_\varphi$ 、柔らかい場合 ($\Gamma < 1$) では母材側の σ_φ の応力

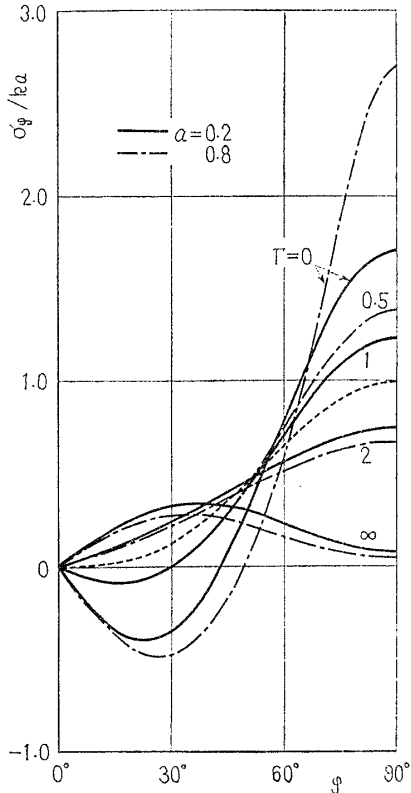


図 4 介在物境界面の σ_φ の分布 ($\theta=0$)

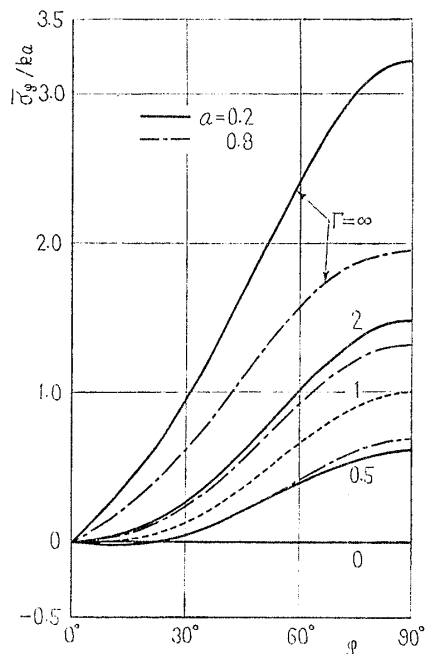


図 5 介在物境界面の $\bar{\sigma}_\varphi$ の分布 ($\theta=0$)

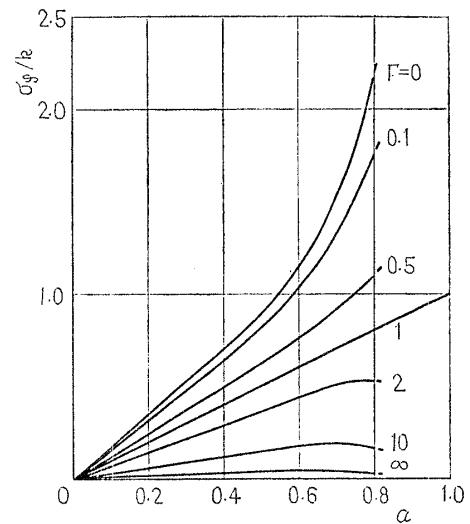


図 6 点 A における σ_φ と介在物半径 ($\varphi=90^\circ, \theta=0$)

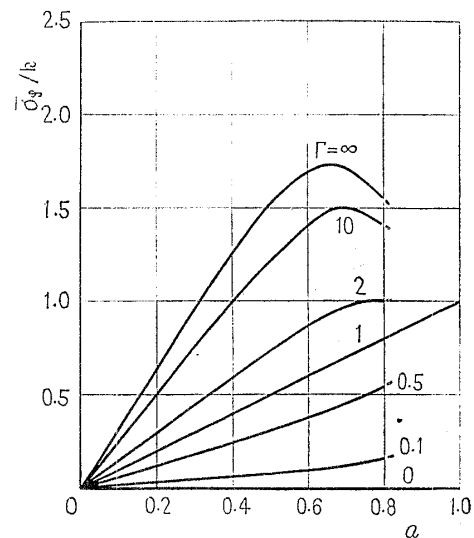


図 7 点 A における $\bar{\sigma}_\varphi$ と介在物半径 ($\varphi=90^\circ, \theta=0$)

集中が顕著である。そこで図6, 7に特に介在物境界面上図1の点A ($\varphi=90^\circ$) における $\sigma_\varphi, \bar{\sigma}_\varphi$ の値を $\sigma_z=k$ を基準に a に対し分布を示した。これらの値に対する自由表面の影響は $a>0.5$ で大きく, この傾向はねじりの問題⁽¹⁾ の場合と同様である。さらに図8, 9に介在物境界面における $\theta=0$ の場合の応力 $\sigma_\theta, \bar{\sigma}_\theta$ の分布を $\sigma_z=ka$ を基準に示した。

応力 σ_θ は硬い介在物の場合 ($\Gamma>1$) には $30^\circ<\varphi<40^\circ$ で引張応力の最大値をとるのに対して, 柔らかい介在物 ($\Gamma<1$) では圧縮応力の最大値をとる。また応力 $\bar{\sigma}_\theta$ では逆に $\Gamma>1$ では圧縮応力, $\Gamma<1$ で引張応力である。図10, 11に介在物境界面における

$\tau_{R\varphi}, \bar{\tau}_{R\varphi}$ と $\tau_{R\theta}, \bar{\tau}_{R\theta}$ の $\theta=0, \pi/2$ における分布を ka を基準に示した。 $\tau_{R\varphi}$ の分布で $\varphi=0^\circ$ の値は σ_R と同様介在物が剛体変位したための影響を受けている。また $\tau_{R\theta}$ は $\bar{\sigma}_\theta$ と同様 $\Gamma<1$ ではごく小さな値となっている。

最後に特に興味深い分布として図12に x 軸に沿う応力 σ_z の分布を k を基準として, $a=0.4, 0.8$ の場合について示した。応力 σ_z は介在物境界面で不連続となり, 円柱母材側では境界面で $\Gamma<1$ の場合に応力集中が顕著であり, $\Gamma>1$ の場合には応力集中が緩和されている。介在物側ではこの逆の傾向となっている。

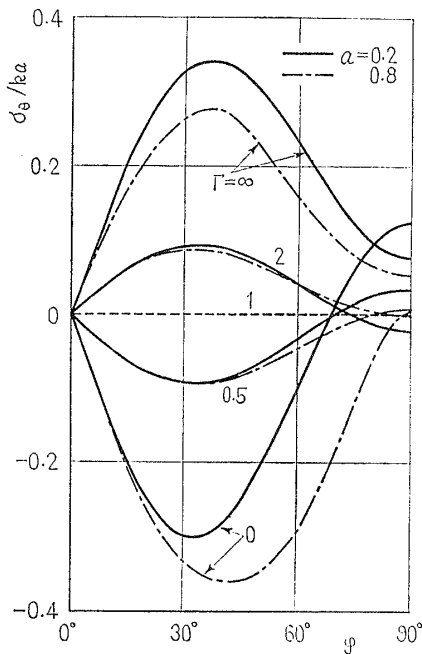


図8 介在物境界面の σ_θ の分布 ($\theta=0$)

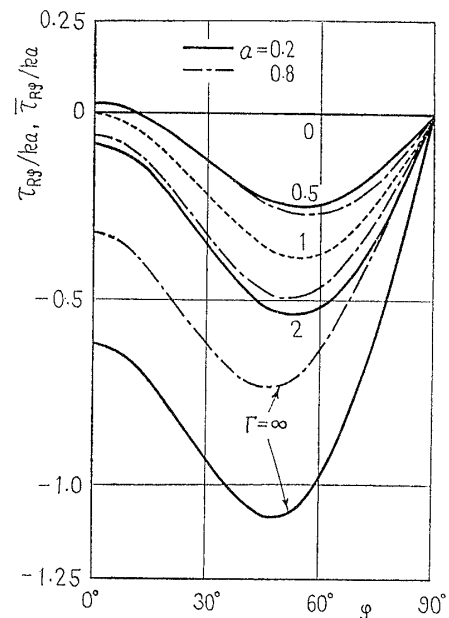


図10 介在物境界面の $\tau_{R\varphi}, \bar{\tau}_{R\varphi}$ の分布 ($\theta=0$)

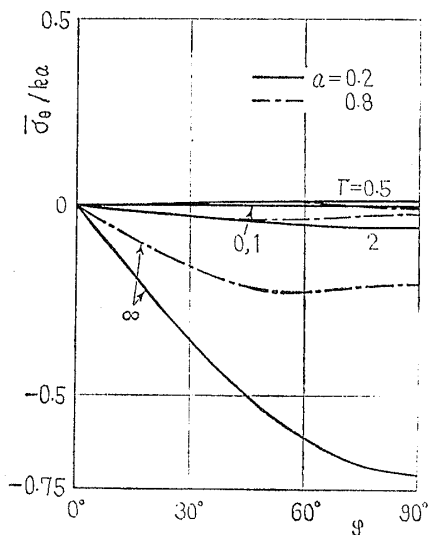


図9 介在物境界面の $\bar{\sigma}_\theta$ の分布 ($\theta=0$)

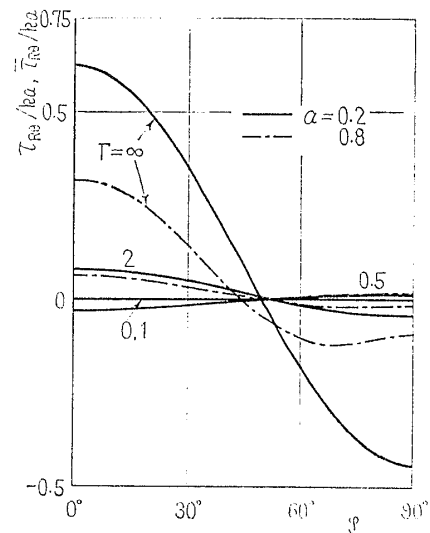


図11 介在物境界面の $\tau_{R\theta}, \bar{\tau}_{R\theta}$ の分布 ($\theta=\pi/2$)

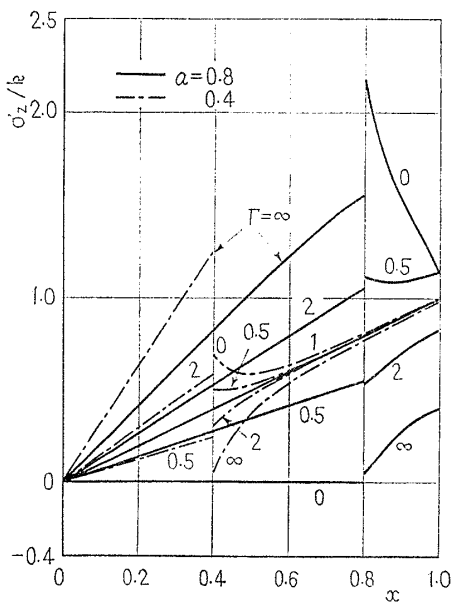


図 12 x 軸に沿う σ_z の分布 ($\varphi=90^\circ, \theta=0$)

4. 結 言

1 個の球状介在物を有する円柱が一軸周りに一様な曲げモーメントを受ける非軸対称問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析する方法を示し、あわせて数値計算によって介在物が弾性母材に及ぼす影響ならびに介在物と自由応力面との干渉効果等を明らかにした。得られた結果を要約すれば次のようになる。

(1) 介在物の母材に対する剛性比率 Γ の応力分布に対する影響は非常に大きい。

(2) ka を基準にとれば、介在物の大小にかかわらず、球面上の応力分布はほぼ同じ傾向をもつ。

(3) 介在物が弾性母材に対して柔らかい場合 ($\Gamma < 1$) には $a < 0.5$ で常に円柱側面に最大引張応力値が生じ、 $a > 0.5$ では介在物境界あるいは円柱側面のいずれかに生じる。特に $\Gamma \ll 1$ では常に介在物境界面の方が大きい。一方介在物が硬い場合 ($\Gamma > 1$) ではねじりの場合と同様に $\Gamma \gg 1$ あるいは $a \rightarrow 1.0$ で介在物側の応力が最大である。

(4) 円柱側面の自由応力面が介在物近傍応力分布に及ぼす影響は $\Gamma < 1$ の場合には応力を増大、逆に $\Gamma > 1$ の場合には減少させる。

なお数値計算には東京工業大学情報処理センターの HITAC 8700 を使用した。

文 献

- (1) Kawashima, K., ほか 2 名, *Proc. 24th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1974), 357.
- (2) 川島・ほか 2 名, 機論, No. 750-2 (昭 50-4), 109.
- (3) Sen, B., *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 25-2 (1933), 107.
- (4) 西村, 火兵学会誌, 26-5 (昭 8-1), 356.
- (5) Neuber, H., *Kerbspannungslehre* (2nd ed.), (1958), 120, Springer-Verlag.
- (6) Das, S., *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 45-2 (1953), 55.
- (7) 土田・ほか 2 名, 機論, 41-345 (昭 50-5), 1337.
- (8) Gray, A., ほか 2 名, *Bessel Function*, (1922), 223, MacMillan.
- (9) 文献 (8) の 101 ページ.
- (10) 筒井・ほか 2 名, 機論, 40-337 (昭 49-9), 2484.
- (11) Tsuchida, E., ほか 3 名, *Proc. 26th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1976), 137.

45 卷 390 号, A 編 (昭 54-2) 正 誤 表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
大路清嗣 ほか	118	左	17	26~28	26, 28
	119	右	14	A系介在物	B系介在物
清家政一郎 ほか	130	左	3	疲労限界	疲労限度
ク		目次の題目		……応力推定への応用	……応力測定への応用