

応答スペクトルにおける連成系等価減衰比の推定*

渡 邊 鉄 也^{*1}

Equivalent Damping Ratio of Coupled System

Tetsuya WATANABE^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering, Saitama University,
255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

Many structures are installed on supports in industrial facilities. The damage by amplitude increases with the coupled vibration is shown. The response magnification is obtained from natural frequency and damping ratio of the coupled system in the seismic design. Therefore, the natural frequency and damping ratio of the coupled system are required. The natural frequency and damping ratio of support and structure are obtained in initial design or vibration test. However, the natural frequency and the damping ratio of the coupled system are not easily obtained. The natural frequency of the coupled system can be calculated from theoretical equation, but the damping ratio cannot be easily calculated. In this study, the equation to calculate the damping ratio of the coupled system with Rayleigh damping is shown. The equivalent damping ratio without Rayleigh damping is estimated.

Key Words: Equivalent Damping Ratio, Coupled System, Seismic Design

1. 結 言

近年、兵庫県南部地震(1995)や新潟県中越地震(2004)などをはじめとする大規模な地震が多発しており、一般家屋もさることながら産業施設内建造物の被害も多く報告されている。産業施設内建造物は2次的な災害が懸念されるため、一般家屋とは異なる耐震設計基準が定められている。

著者は過去の研究⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾において摩擦を有する建造物の応答スペクトルを提案してきた。ここでは、1自由度摩擦系を対象としていたが、産業施設内では、支持構造物上に機器類を設置する機会が多く、これらの連成振動にともなう振幅増加により被害が生じる場合がある。耐震設計では、連成系の固有振動数、減衰比から応答倍率を求め、地表面の水平震度を乗じて設計水平震度を算出している。したがって、設計水平震度を算出するには、連成系の固有振動数および減衰比が必要となる。支持構造物、機器類それぞれの固有振動数、

減衰比は設計段階あるいは竣工後の振動試験により把握されるが、機器類が支持構造物上に設置された連成系の固有振動数、減衰比を求めるには機器類設置後に固有値解析あるいは振動試験を行う必要がある。また、機器類の変更、追加等があるたびに解析、試験をしなければならぬ。連成系の固有振動数は支持構造物および機器類それぞれの固有振動数から理論式を用いて算出できるが、減衰比は容易に求めることができない。そこで、レイリー減衰が成り立つ場合の連成系減衰比の算出式を示すとともに、レイリー減衰が成立しない系(非レイリー減衰系)における等価減衰比の推定を行う。非レイリー減衰系の解析は、一般的に複素固有値問題となり、実部がモード減衰比、虚部が減衰固有振動数に対応する⁽⁶⁾。しかし、修正震度法を用いた耐震設計では、連成系の1次の固有振動数と減衰比から応答倍率を求めるため、複素固有値では扱いが不便である。また、系の特性が既知の2つの構造物を連成させた場合に、連成系のモデルを新たに構築するのは時間を要する。そこで、本研究では、簡便に連成系の振動特性を求める方法を提案することを目的とする。

* 原稿受付 2006年5月31日。

^{*1} 正員, 埼玉大学工学部(☎338-8570 さいたま市下大久保255)。

E-mail: watanabe@mech.saitama-u.ac.jp

2. 無減衰系の特性

ここでは、減衰が無い連成系の特性について記述する。図1に示す系の運動方程式は式(1)、式(2)のように表される。

$$m_c \ddot{x}_c + k_c (x_c - x_p) = 0 \quad (1)$$

$$m_p \ddot{x}_p - k_c (x_c - x_p) + k_p x_p = 0 \quad (2)$$

ここで、 m_c 、 k_c 、 x_c はそれぞれ機器系の質量、ばね定数、絶対変位、 m_p 、 k_p 、 x_p はそれぞれ支持系の質量、ばね定数、絶対変位である。

特性方程式は式(3)のようになる。

$$\omega^4 - \frac{m_c + m_p}{m_p} \left(\frac{k_p}{m_c + m_p} + \frac{k_c}{m_c} \right) \omega^2 + \frac{m_c + m_p}{m_p} \cdot \frac{k_p}{m_c + m_p} \cdot \frac{k_c}{m_c} = 0 \quad (3)$$

ここで、

$$\omega_c = 2\pi f_c = \sqrt{\frac{k_c}{m_c}} \quad (4)$$

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_c + m_p}} \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{m_c}{m_c + m_p} \quad (6)$$

とおくと、式(3)は

$$\omega^4 - \frac{1}{1-\gamma} (\omega_p^2 + \omega_c^2) \omega^2 + \frac{1}{1-\gamma} \omega_p^2 \omega_c^2 = 0 \quad (7)$$

となる。式(7)を ω^2 について解くと、

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 \omega_c^2}{\frac{\omega_p^2 + \omega_c^2}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - (1-\gamma) \left(\frac{2\omega_p \omega_c}{\omega_p^2 + \omega_c^2} \right)^2} \right\}} \quad (8)$$

となる。ここで、

$$\lambda = \sqrt{1 - (1-\gamma) \left(\frac{2\omega_p \omega_c}{\omega_p^2 + \omega_c^2} \right)^2} \quad (9)$$

とおくと、1次、2次の角固有振動数は以下のようになる。

$$\omega_1 = \frac{\omega_c \omega_p}{\sqrt{(1+\lambda) \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2}{2}}} \quad (10)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_c \omega_p}{\sqrt{(1-\lambda) \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2}{2}}} \quad (11)$$

これにより、機器系および支持系の固有振動数 f_c 、 f_p から連成系の固有振動数 f_1 、 f_2 を求めることができる。

また、 $\frac{f_c}{f_p} = R$ とすると、式(10)、式(11)より

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{R^2 + 1 + \sqrt{(R^2 - 1)^2 + 4\gamma R^2}}{2R\sqrt{1-\gamma}} \quad (12)$$

と表される。ここでは $\frac{f_2}{f_1} = P$ と表すこととする。

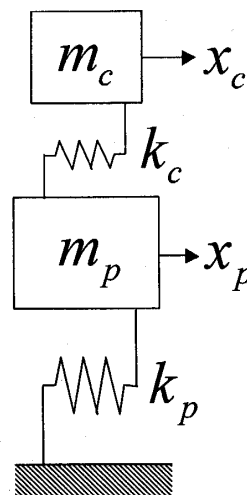


Fig.1 Coupled system model without damping

次に、式(1)、式(2)は以下のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} -m_c \omega^2 + k_c & -k_c \\ -k_c & -m_p \omega^2 + k_c + k_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ x_p \end{Bmatrix} = 0 \quad (13)$$

ここで、 $\omega = \omega_1$ とし、1次の固有モードを $(\phi_{c1}, \phi_{p1})^T$ とすると、式(14)が得られる。

$$(-m_c \omega_1^2 + k_c) \phi_{c1} - k_c \phi_{p1} = 0 \quad (14)$$

変形すると、

$$\frac{\phi_{c1}}{\phi_{p1}} = \frac{-\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_c^2} \quad (15)$$

同様に, $\omega = \omega_2$ とし, 2 次の固有モードを $(\phi_{c2}, \phi_{p2})^T$ とすると,

$$\frac{\phi_{c2}}{\phi_{p2}} = \frac{-\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_c^2} \quad (16)$$

次に, 系に基礎加速度入力作用する場合, 入力方向ベクトルを $\{e\}$, 刺激係数を $\{\beta\}$, モード行列を $[\phi]$ とすると次式が成り立つ.

$$\{e\} = [\phi] \{\beta\} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{c1} & \phi_{c2} \\ \phi_{p1} & \phi_{p2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

式(18)を β_1, β_2 について解くと, 次式が得られる.

$$\beta_1 = \frac{\phi_{c2} - \phi_{p2}}{\phi_{p1}\phi_{c2} - \phi_{c1}\phi_{p2}} \quad (19)$$

式(19)に式(15), 式(16)を代入すると, 次式が得られる.

$$\beta_1 = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{1}{\phi_{c1}} \quad (20)$$

同様に, 次式が得られる.

$$\beta_2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{1}{\phi_{c2}} \quad (21)$$

式(20), 式(21)にそれぞれモードベクトルの 1 次, 2 次の成分を乗じる. 次に, 耐震設計指針⁽⁷⁾の 1 次, 2 次の基準応答倍率 σ_1, σ_2 を乗じると, 応答倍率は次式のように得られる.

$$a = \sqrt{(\beta_1 \phi_{c1} \sigma_1)^2 + (\beta_2 \phi_{c2} \sigma_2)^2} \quad (22)$$

3. レイリー減衰系の特性

図 2 に示す減衰が存在する連成系を考える. 外力が作用しない場合の運動方程式は以下となる.

$$\begin{bmatrix} m_c & 0 \\ 0 & m_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{x}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_c & -c_c \\ -c_c & c_c + c_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_c & -k_c \\ -k_c & k_c + k_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ x_p \end{Bmatrix} = 0 \quad (23)$$

ここで, 式(15), 式(16)より

$$\frac{\phi_{c1}}{\phi_{p1}} = \frac{-f_c^2}{f_1^2 - f_c^2} \quad (24)$$

$$\frac{\phi_{c2}}{\phi_{p2}} = \frac{-f_c^2}{f_2^2 - f_c^2} \quad (25)$$

したがってモード行列は

$$[\phi] = \begin{bmatrix} -f_c^2 & -f_c^2 \\ f_1^2 - f_c^2 & f_2^2 - f_c^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

と表すことができる. ここで, レイリー減衰を仮定すると,

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = [\phi]^T \begin{bmatrix} c_c & -c_c \\ -c_c & c_c + c_p \end{bmatrix} [\phi] \quad (27)$$

と表すことができる. ここで, c_1, c_2 はそれぞれ 1 次, 2 次の減衰係数である. 2 行 1 列目に注目すると次式が得られる.

$$f_1^2 f_2^2 (c_c + c_p) - c_p f_c^2 (f_1^2 + f_2^2) + c_p f_c^4 = 0 \quad (28)$$

ここで, 式(9), 式(10), 式(11)より,

$$\lambda = \sqrt{1 - (1 - \gamma) \left(\frac{2f_c f_p}{f_c^2 + f_p^2} \right)^2} \quad (29)$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{2} f_c f_p}{\sqrt{(1 + \lambda)(f_c^2 + f_p^2)}} \quad (30)$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{2} f_c f_p}{\sqrt{(1 - \lambda)(f_c^2 + f_p^2)}} \quad (31)$$

が得られ, これらの式から次式が得られる.

$$f_1^2 f_2^2 = \frac{f_c^2 f_p^2}{1 - \gamma} \quad (32)$$

$$f_1^2 + f_2^2 = \frac{f_c^2 + f_p^2}{1 - \gamma} \quad (33)$$

式(32), 式(33)を式(28)に代入すると式(34)が得られる.

$$\frac{f_c}{f_p} = \frac{\zeta_c}{\zeta_p} \quad (34)$$

ここで,

$$\zeta_c = \frac{c_c}{2\sqrt{m_c k_c}}, \quad \zeta_p = \frac{c_p}{2\sqrt{(m_c + m_p)k_p}} \quad (35)$$

である.

したがって, レイリー減衰系の場合には, 固有振動数の比と減衰比の比は等しくなる. ここで,

$$\frac{f_c}{f_p} = \frac{\zeta_c}{\zeta_p} = R \quad (36)$$

と表すことにする。次にレイリー減衰系の1次と2次のモード減衰比は以下のように表すことができる。これらは、式(23)を式(26)を用いて座標変換して得られたモード質量, モード減衰係数, モード剛性から求めることができる。

$$\zeta_1 = \frac{\sqrt{2}\zeta_c\zeta_p}{\sqrt{(1+\eta)(\zeta_c^2 + \zeta_p^2)}} \quad (37)$$

$$\zeta_2 = \frac{\sqrt{2}\zeta_c\zeta_p}{\sqrt{(1-\eta)(\zeta_c^2 + \zeta_p^2)}} \quad (38)$$

$$\eta = \sqrt{1 - (1-\gamma) \left(\frac{2\zeta_c\zeta_p}{\zeta_c^2 + \zeta_p^2} \right)^2} \quad (39)$$

ここで、式(36)より、 $\zeta_c = \zeta_p R$ を上式に代入すると、

$$\zeta_1 = \frac{\sqrt{2}R\zeta_p}{\sqrt{(1+\eta)(1+R^2)}} \quad (40)$$

$$\zeta_2 = \frac{\sqrt{2}R\zeta_p}{\sqrt{(1-\eta)(1+R^2)}} \quad (41)$$

$$\eta = \sqrt{1 - (1-\gamma) \left(\frac{2R}{R^2 + 1} \right)^2} \quad (42)$$

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{R^2 + 1 + \sqrt{(R^2 - 1)^2 + 4\gamma R^2}}{2R\sqrt{1-\gamma}} \quad (43)$$

が得られる。したがって、連成系の減衰比の比は R と γ の関数として表すことができる。

ここで、縦軸に $P = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}$, 横軸に $R = \frac{f_c}{f_p} = \frac{\zeta_c}{\zeta_p}$ とし、描いたものを図3に示す。また、 $\zeta_p = 0.05$ の場合の ζ_1 , ζ_2 と R の関係を図4, 図5に示す。質量比 $\gamma = 0.5$ のとき、 $\frac{m_c}{m_p} = 1$ であり、 $\gamma = 0.05$ のとき、 $\frac{m_c}{m_p} = 0.053$ であり、 R が1以下および3以上では質量比による1次の減衰比の顕著な差が見られなくなることがわかる。

また、1次の減衰比は、支持系の減衰比より大きくなることわかる。さらに、2次の減衰比は R が大きくなると増加することがわかる。これは、1次モードは支持系に依存し、モード減衰比は機器系の減衰比が増加しても支持系の減衰比に収束する。これに対し、2次モードは機器系に依存し、機器系の減衰比の増加につれてモード減衰比も増加する。

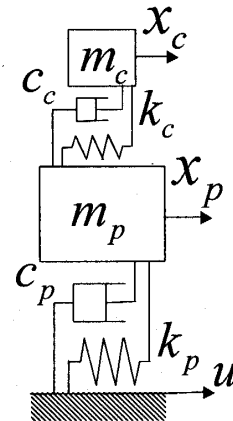


Fig.2 Coupled system model with damping

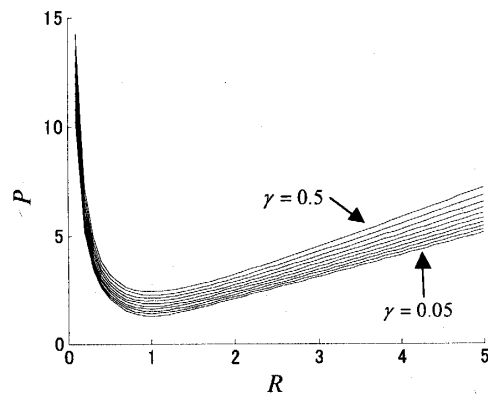


Fig.3 P with respect R

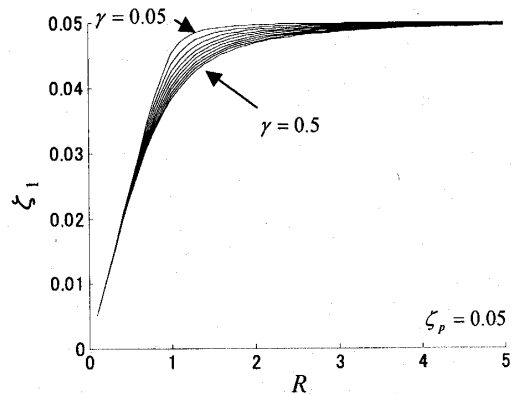


Fig.4 ζ_1 with respect R

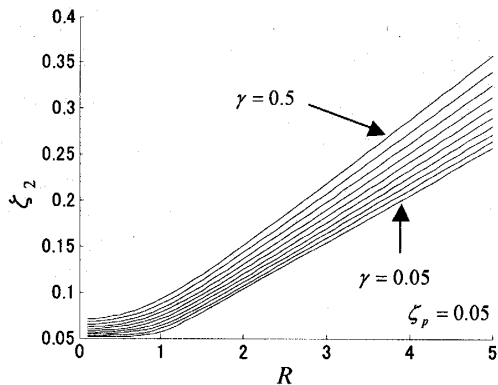


Fig.5 ζ_2 with respect R

4. 等価減衰比の推定

支持系および機器系それぞれの減衰比から連成系の減衰比を求める場合、レイリー減衰系では式(40)～式(42)を用いれば良い。ただし、レイリー減衰系は式(34)が条件となる。しかし、実際の系では必ずしも式(34)は成り立たない。そこで、非レイリー減衰系において等価減衰比を推定する方法を提案する。

図2において、外力が作用する系の運動方程式は、

$$z_c = x_c - u, \quad z_p = x_p - u \quad (44)$$

とすると、以下ようになる。

$$m_c \ddot{z}_c + c_c (\dot{z}_c - \dot{z}_p) + k_c (z_c - z_p) = -m_c \ddot{u} \quad (45)$$

$$m_p \ddot{z}_p - c_c (\dot{z}_c - \dot{z}_p) - k_c (z_c - z_p) + c_p \dot{z}_p + k_p z_p = -m_p \ddot{u} \quad (46)$$

ここで、式(4)、式(5)、式(6)より、次式が得られる。

$$\ddot{z}_c + 2\zeta_c \omega_c (\dot{z}_c - \dot{z}_p) + \omega_c^2 (z_c - z_p) = -\ddot{u} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_p - 2\zeta_c \omega_c \frac{\gamma}{1-\gamma} (\dot{z}_c - \dot{z}_p) - \omega_c^2 \frac{\gamma}{1-\gamma} (z_c - z_p) \\ + 2\zeta_p \omega_p \frac{1}{1-\gamma} \dot{z}_p + \omega_p^2 \frac{1}{1-\gamma} z_p = -\ddot{u} \end{aligned} \quad (48)$$

式(47)、式(48)から、絶対加速度入力ー絶対加速度応答の応答倍率は式(49)のように表される。一方、レイ

$$G(\omega) = 1 + \frac{(\omega_c^2 + 2\zeta_c \omega_c \omega i)(1-\gamma)\omega^2 + (\gamma\omega_c^2 + \omega_p^2 - (1-\gamma)\omega^2 + 2\zeta_c \omega_c \gamma \omega i + 2\zeta_p \omega_p \omega i)\omega^2}{(-\gamma\omega_c^2 - 2\zeta_c \omega_c \gamma \omega i)(\omega_c^2 + 2\zeta_c \omega_c \omega i) + (\gamma\omega_c^2 + \omega_p^2 - (1-\gamma)\omega^2 + 2\zeta_c \omega_c \gamma \omega i + 2\zeta_p \omega_p \omega i)(\omega_c^2 - \omega^2 + 2\zeta_c \omega_c \omega i)} \quad (49)$$

リー減衰系の応答倍率は式(50)のように表される。

$$G^*(\omega) = 1 + \sum_{n=1}^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta_n \omega_n \omega i} \beta_n \phi_{cn} \quad (50)$$

式(20)、式(21)を式(50)に代入すると刺激係数と固有モードを消去することができる。

ここで、式(49)を式(50)で曲線適合すれば連成系の等価減衰比を算出することができる。適合させる範囲は、図6に示すように応答倍率曲線の1次と2次のピークの半パワー値となる周波数範囲とする。

図7から図12は横軸を ζ_c/ζ_p 、縦軸を f_c/f_p として、曲線適合における平均誤差をプロットした図である。誤差が10%以上の場合は黒色とし、誤差が0%の場合は白色としている。 f_p 、 ζ_p 、 γ の値は耐震設計指針⁽⁷⁾を参考にしている。これらの図から、 $\zeta_c/\zeta_p = f_c/f_p$ の場合には、レイリー減衰が成り立っているため誤差は0%に近く、 $\zeta_c/\zeta_p = f_c/f_p$ 近傍では誤差が小さいことがわかる。また、 $f_c/f_p = 1$ では、誤差が小さい範囲が広いことがわかる。さらに、図7から図9および図10から図12を比較すると、 f_p による顕著な差が見られないことがわかる。また、 ζ_p が小さいと、誤差が小さい範囲が広いことがわかる。

これらの図を用いると、誤差が10%以下で連成系の減衰比が推定できる ζ_c/ζ_p と f_c/f_p を得ることができ

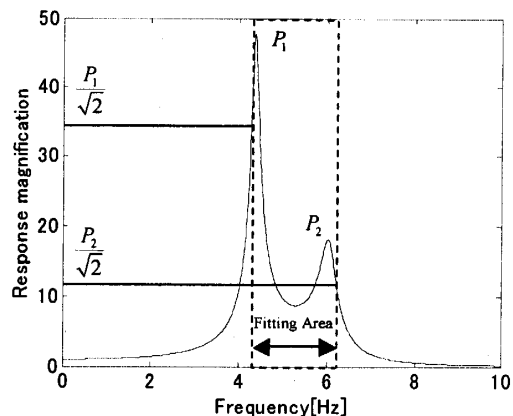


Fig.6 Curve fitting area

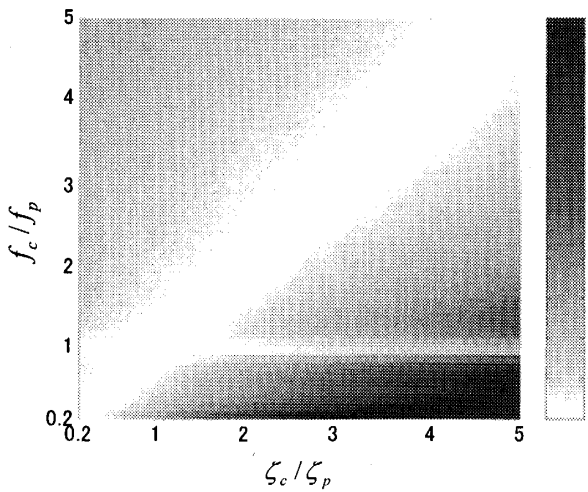


Fig.7 Error map ($f_p=0.2\text{Hz}$, $\zeta_p=0.01$, $\gamma=0.1$)

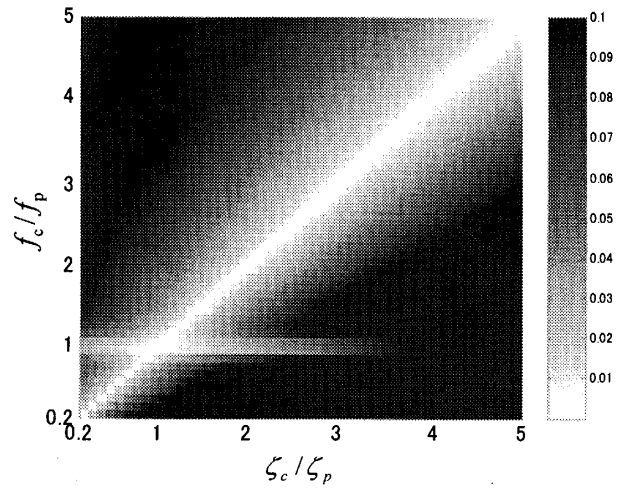


Fig.10 Error map ($f_p=0.2\text{Hz}$, $\zeta_p=0.05$, $\gamma=0.1$)

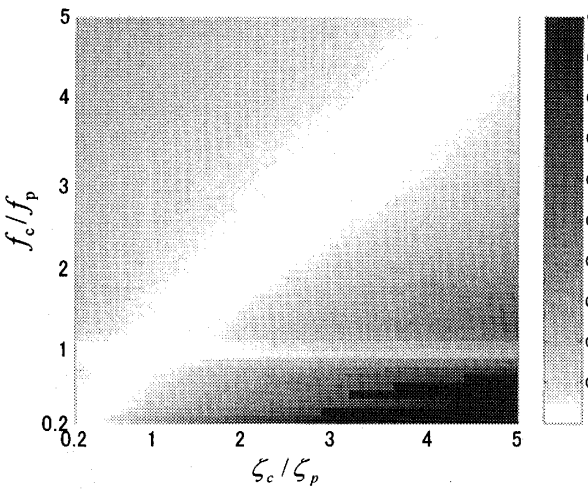


Fig.8 Error map ($f_p=1\text{Hz}$, $\zeta_p=0.01$, $\gamma=0.1$)

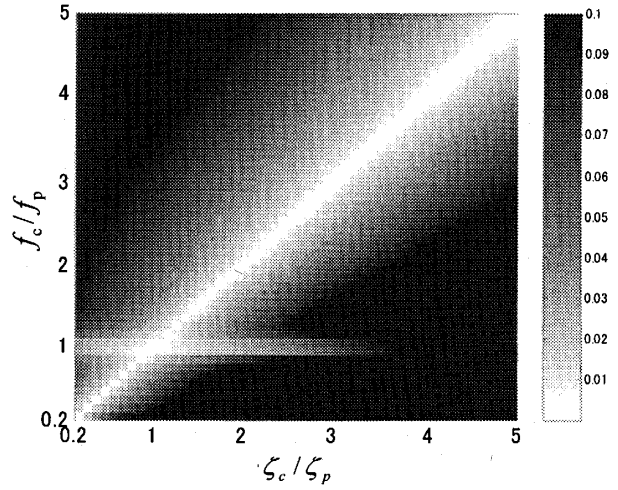


Fig.11 Error map ($f_p=1\text{Hz}$, $\zeta_p=0.05$, $\gamma=0.1$)

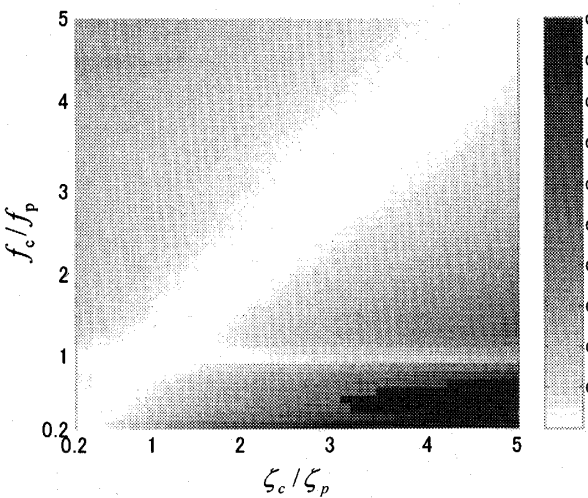


Fig.9 Error map ($f_p=10\text{Hz}$, $\zeta_p=0.01$, $\gamma=0.1$)

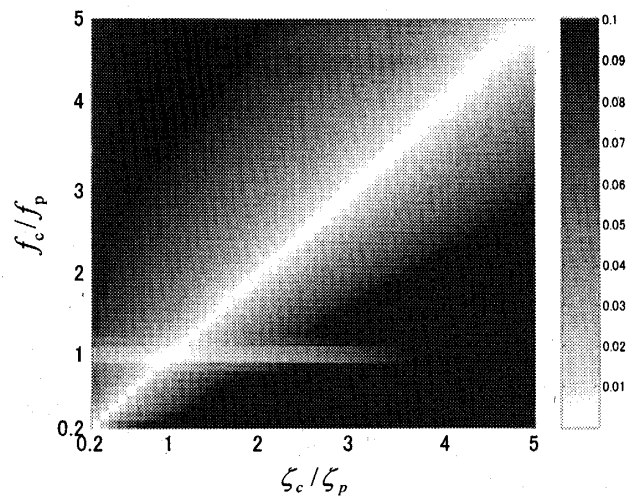


Fig.12 Error map ($f_p=10\text{Hz}$, $\zeta_p=0.05$, $\gamma=0.1$)

次に誤差 10%以内の ζ_c/ζ_p と f_c/f_p の範囲において ζ_1 , ζ_2 を求める方法を考える。図 13, 図 14 は横軸を ζ_c/ζ_p , 縦軸をそれぞれ ζ_1 , ζ_2 にして描いたものであり $f_p=1\text{Hz}$, $\zeta_p=0.01$, $\gamma=0.1$ の場合である。図中の太線はレイリー減衰系の曲線であり, 式(40)~式(42)により得られるものである。図中の細線は $f_c/f_p=1$ としたときに, 曲線適合により推定された ζ_1 , ζ_2 である。したがって, $\zeta_c/\zeta_p=1$ のときにレイリー減衰となるため, 太線と細線は一致する。次に, 式(40), 式(41)を R で微分して勾配を求め, レイリー減衰となる点を通る直線を描くと曲線適合により推定された ζ_1 , ζ_2 と非常に近い値となることがわかった。したがって, 数式を用いて ζ_1 , ζ_2 を推定することが可能となる。

式(40)を R で微分すると,

$$\frac{d\zeta_1}{dR} = \zeta_p \frac{(1+\eta)(1+R^2) - 2R^2}{\sqrt{2\eta}\sqrt{(1+\eta)(1+R^2)^3}} \quad (51)$$

となり, 図 13 の直線の傾きが得られる。次に, レイリー減衰が成り立つ点 ($f_c/f_p=R_f$ とする) における接線の式を求めると式(53)となる。同様に ζ_2 は式(54)のように得られる。 R_f は図 7~図 12 において, 誤差が 10%以内の範囲の値を使用する。式(52)~式(54)を用いて等価減衰比を求めることができる。

支持系および機器系の固有振動数, 減衰比から連成系の固有振動数, 減衰比を求める手順を示す。

- 1) f_c , f_p , ζ_c , ζ_p を求める。
- 2) 式(29)~式(31)を用いて f_1 , f_2 を算出する。
- 3) $\zeta_c/\zeta_p = f_c/f_p$ の場合には式(37)~式(39)を用いて ζ_1 , ζ_2 を算出する。

- 4) 非レイリー減衰系の場合には図 7~図 12 から, 等価減衰比を推定可能か判断する。
- 5) 推定可能な場合には式(52)~式(54)を用いて ζ_1 , ζ_2 を算出する。
- 6) 推定不可能な場合には振動試験等を実施する。

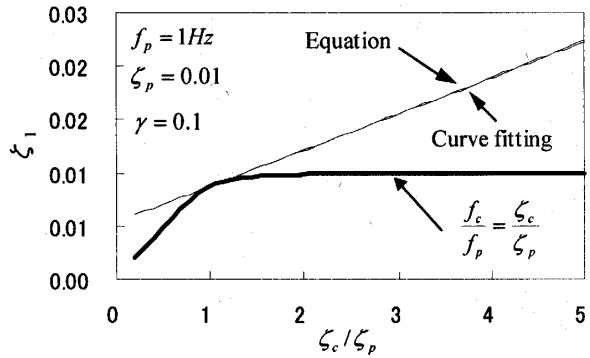


Fig. 13 ζ_1 related to ζ_c/ζ_p

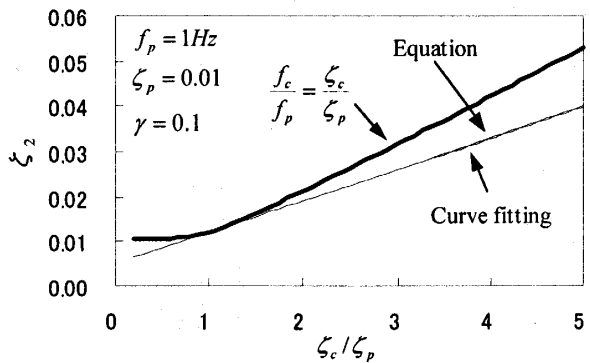


Fig. 14 ζ_2 related to ζ_c/ζ_p

$$\eta = \sqrt{1 - (1-\gamma) \left(\frac{2R_f}{R_f^2 + 1} \right)^2} \quad (52)$$

$$\zeta_1 = \frac{\zeta_p}{\sqrt{2\eta}\sqrt{(1+\eta)(1+R_f^2)^3}} \left[\left\{ (1+\eta)(1+R_f^2) - 2R_f^2 \right\} \frac{\zeta_c}{\zeta_p} + R_f(1+R_f^2)(\eta-1) + 2R_f^3 \right] \quad (53)$$

$$\zeta_2 = \frac{\zeta_p}{\sqrt{2\eta}\sqrt{(1-\eta)(1+R_f^2)^3}} \left[\left\{ -(1-\eta)(1+R_f^2) + 2R_f^2 \right\} \frac{\zeta_c}{\zeta_p} + R_f(1+R_f^2)(\eta+1) - 2R_f^3 \right] \quad (54)$$

5. 結 言

本研究では、支持系および機器系それぞれの減衰比から連成系の減衰比を推定する方法について検討し、以下の結果が得られた。

- 1) レイリー減衰系において連成系の減衰比を算出する式を導き出した。
- 2) 非レイリー減衰系において、応答倍率曲線の平均誤差が10%以下になる ζ_c/ζ_p と f_c/f_p の範囲を示した。
- 3) 非レイリー減衰系において、等価減衰比を算出する式を提案した。

参 考 文 献

- (1)Watanabe,T., et al, Vibration Test of Plant Piping System Having Friction Support, *Trans. of JSME, Series C*, Vol.58, No.552(1992),pp.17-23.
- (2)Watanabe,T., et al, Seismic Responses of Plant Piping System Having Friction and Vibro-impact Characteristics, *Trans. of JSME, Series C*, Vol.62, No.595(1996),pp.63-68.
- (3)Watanabe,T., Suzuki,K., Seismic Responses of Piping System with Friction Sliding on a Plane, *Trans. of JSME, Series C*, Vol.64, No.617(1998),pp.64-69.
- (4)Watanabe,T., Suzuki,K., Seismic Response Analysis of Piping System with Friction Support (Maximum Response Estimation Using Frictional Response Spectrum), *Trans. of JSME, Series C*, Vol.64, No.619(1998),pp.87-92.
- (5)Watanabe,T., Suzuki,K., Estimation of Equivalent Damping Ratio using Friction Response Spectrum, *Trans. of JSME, Series C*, Vol.66, No.642(2000),pp.87-92.
- (6)Nagamatsu,A., Modal Analysis, Baifukan, pp.76-79.
- (7)KHK, Seismic design of high pressure gas facility, (1997).