

埼玉大学工学部  
埼玉大学工学部

\*中 弘 恂  
吉 川 敬 治

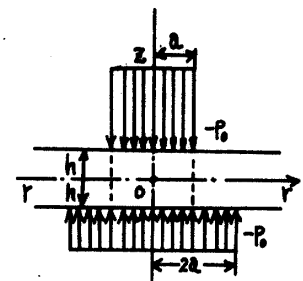
§1. 緒 言

偶応力を考慮した軸対称系の研究成果が、1970年以降数多くみうけられている。例えば Dhalwal による、半平面体の混合境界値問題をマイクロポーラ理論および偶応力理論による解、J. Dyszlewicz による接触問題の解を得ている。また、MatysiaK はクラックに内圧の作用した問題に関する一つの解を明らかにした。したがって、表題に関する厚板の問題はきわめて少なく、Mindlin の提唱した、新材料物性値および拡張されたポアソン比  $\eta$  の変化をもとでの応力分布の意味はまだ行なわれていない。

本研究は、偶応力および応力成分を Mindlin-Tierstem の提唱した変位ポテンシャル  $\vec{u} = \vec{\omega} - l^2 \nabla \nabla \cdot \vec{\omega} - \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad} \{ \vec{\omega} \cdot (1 - l^2 \nabla^2) \vec{\omega} + \omega_0 \}$  に  $\vec{\omega} = \omega_r \vec{e}_r + \omega_\theta \vec{e}_\theta + \phi \vec{e}_z$  とおき、変位  $u_r, u_z$  を  $\phi$  であらわし、応力の非対称荷重の境界条件を与えて、それぞれの応力分布について吟味を加えた。この場合、前述の新材料物性値とは厚板の  $1/2$  の厚さ  $h$  との比  $l/h = 0.1, 0.5$  を取り、拡張されたポアソン比  $\eta$  は  $-1, 0, 1$  の場合について調べた。その結果、 $\tau_{rz}, M_{z\theta}$  (外部系応力成分) は物性値の影響が少なく、 $\sigma_{rr}, M_{rr}, M_{\theta\theta}, M_{zr}, \tau_{rz}$  の成分すなわち内部系応力成分は強くその影響を受けることが判明した。以上の結果は、古典理論値と比較検討したものである。

§2. 基礎方程式および解析法

図1に示すように厚さ  $2h$  の板に相対して半径  $a$  および  $2a$  の円形領域に全荷重  $-P_0$  が作用している応力場を考える。この応力場は半径方向  $r$  に関し対称であるので、変位ポテンシャル  $\vec{u}$  を前述のとおりおき、位置ベクトル  $\vec{R}$  を  $\vec{R} = \omega_r \vec{e}_r + \omega_\theta \vec{e}_\theta + z \vec{e}_z$  とすれば、変位成分は次のようになる。



$$u_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ l^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \alpha \{ z(1 - l^2 \nabla^2) \phi + \phi_0 \} \right] \dots (1) \quad \text{ただし } \alpha = \frac{\eta + \nu}{2(\eta + 2\nu)} \quad \text{図1. 座標系および境界条件}$$

$$u_z = \phi - \frac{\partial}{\partial z} \left[ l^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \alpha \{ z(1 - l^2 \nabla^2) \phi + \phi_0 \} \right] \dots (2) \quad \text{A.G.V は Lamé の定数である。}$$

また  $\phi_0$  は  $\nabla^2 \phi_0 = 0$  を満足するスカラー関数であり、 $\nabla^2$  は軸対称性により  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  である。Mindlin により  $\vec{\omega}$  は  $\nabla^2 (\vec{\omega} - l^2 \nabla^2 \vec{\omega}) = 0$  を満足しなければならないので  $\phi$  も次のような偏微分方程式が満足されなければならない、すなわち  $\nabla^2 (\phi - l^2 \nabla^2 \phi) = 0$  である。この解である  $\phi$  と  $\phi_0 = \int_0^\infty r \phi_n J_0(r) dr$ ,  $\phi_n = \int_0^\infty r \phi_n J_0(nr) dr$ ,  $\phi_0 = \int_0^\infty r \phi_0 J_0(nr) dr$  とおき、解形式をもとめると、次のようになる。 $\phi_n = \int_0^\infty \{ A(s) \sinh sz + \bar{A}(s) \cosh sz \} J_0(sr) ds$ ,  $\phi_n = \int_0^\infty \{ B(s) \sinh \sqrt{s^2 + \nu} z + \bar{B}(s) \cosh \sqrt{s^2 + \nu} z \} \times J_0(sr) ds$ ,  $\phi_0 = \int_0^\infty \{ C(s) \cosh sz + \bar{C}(s) \sinh sz \} J_0(sr) ds$ , また基礎方程式である  $e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ ,  $w_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} u_{j,k}$ ,  $\tau_{ij} = 0$ ,  $\epsilon_{ijk} \tau_{jk} + M_{j,i} = 0$ ,  $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{aa} + 2G e_{ij}$ ,  $M_i = 4G l^2 (K_{i,j} + \eta K_{j,i})$  を考慮し応力成分を  $\phi$  であらわすと次の形式を得る。ここで  $A(s) \dots \bar{C}(s)$  は境界条件によって決定される未知関数であり、テンソル記号下における文字は通常用いるものである。 $M_{ij}$  はカップルストレス

であり、尚、回転の平衡方程式は次の形式をもつ、 $T_{zr} - T_{rz} + \frac{1}{r}(M_{\theta\theta} + M_{\phi\phi}) + \frac{2}{r}M_{r\theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} = 0$

$$U_{zr} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \lambda(1-2\nu) + 2G \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2Qr \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 4dG \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2dGz \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2Qr^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2Qr \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2dG \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big] J_1(r) dz, \quad M_{z\theta} = 2Qr^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\partial v}{\partial z} J_1(r) dz,$$

$$T_{zr} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ -G\delta \frac{\partial u}{\partial z} + 2Qr\delta \frac{\partial v}{\partial z} + 2Qr\alpha \frac{\partial w}{\partial z} + 2Qr\alpha z \frac{\partial v}{\partial z} - 2Qr\delta \frac{\partial v}{\partial z} + 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2Qr\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] J_1(r) dz, \quad M_{\theta z} = \eta M_{z\theta},$$

$$T_{rz} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ -G\delta \frac{\partial u}{\partial z} + 2Qr\delta \frac{\partial v}{\partial z} + 2Qr\alpha \frac{\partial w}{\partial z} + 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2Qr\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] J_1(r) dz,$$

$$U_{rr} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ G\delta^2 z \frac{\partial u}{\partial z} + (\lambda - 2\nu\lambda + Qr\delta^2 + G - 4dG) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2Qr^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2dGz \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (Qr^2 + 2Qr) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2Qr^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2Qr\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Qr\delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] J_1(r) dz + \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 4dG\delta - G\delta \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2dG\delta z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2Qr\delta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2Qr\delta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2Qr\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big] J_1(r) dz, \quad U_{\theta\theta} = -\frac{2}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ G\delta^2 z \frac{\partial u}{\partial z} + (\lambda - 2\nu\lambda + Qr\delta^2 + G - 4dG) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2Qr^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2dGz \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (Qr^2 + 2Qr) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2Qr^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2Qr\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Qr\delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] J_1(r) dz + \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 2\lambda\delta(1-2\nu) + 2Qr\delta^2 - 4dG\delta + G\delta \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2dG\delta z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2Qr\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (2Qr\delta^2 + 2Qr\alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2Qr\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2Qr\delta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big] J_1(r) dz.$$

$$M_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 2Qr\delta^2(1-\eta) \frac{\partial u}{\partial z} - 4G\delta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4Qr\delta \right] J_1(r) dz + \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2Qr\delta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) J_1(r) dz,$$

$$M_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 2Qr\delta^2(1-\eta) \frac{\partial u}{\partial z} - 4G\delta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4Qr\delta \right] J_1(r) dz + \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2Qr\delta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) J_1(r) dz,$$

$$M_{z\theta} = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 2Qr\delta^2(1-\eta) \frac{\partial u}{\partial z} - 4G\delta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4Qr\delta \right] J_1(r) dz + \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( 2Qr\delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2Qr\delta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) J_1(r) dz,$$

§3 境界条件および数値計算

境界条件は図1に示す領域に

$$z = h \text{ で } U_z = P, \quad 0 \leq r \leq a \quad r > a \text{ で } U_z = 0$$

$$z = -h \text{ で } U_z = \frac{P}{4}, \quad 0 \leq r \leq 2a \quad r > 2a \text{ で } U_z = 0$$

が作用しそのときのハンケル変換はそれぞれ  $\hat{U}_z|_{z=h} = \frac{P_0 J_0(\lambda r)}{\pi a \lambda}, \quad \hat{U}_z|_{z=-h} = \frac{-P_0 J_0(2\lambda r)}{2\pi a \lambda}$

である。 $\hat{U}_{z\theta} = \hat{U}_{z\phi} = 0 \quad \delta = \pm h$

$0 < r < \infty$  で与え、未定関数を  $A(\lambda) \sim \bar{C}(\lambda)$  を決定する

ため、各応力成分をハンケル変換し、六元一次方程式を電子計算機に内蔵した形で解いた。数値計算

には  $G = 100 \text{ Kg/cm}^2, \nu = 0.45, a = h = 1 \text{ cm}, P = 1 \text{ Kg/cm}^2$  で与え、

シンプソンの台形法で数値積分を実行した。

図2~図6に応力および偏応力成分をグラフで示す。

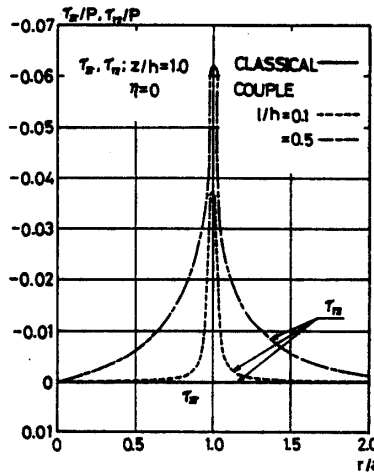


図2,  $z/h = 1$  のせん断応力分布

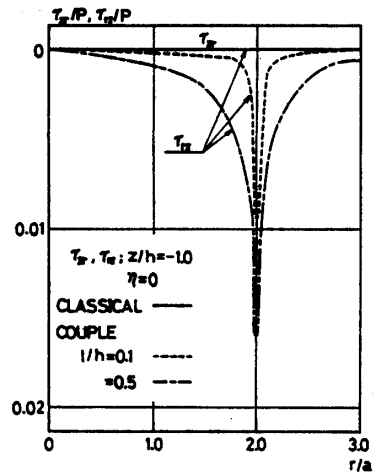


図3,  $z/h = -1$  のせん断応力分布

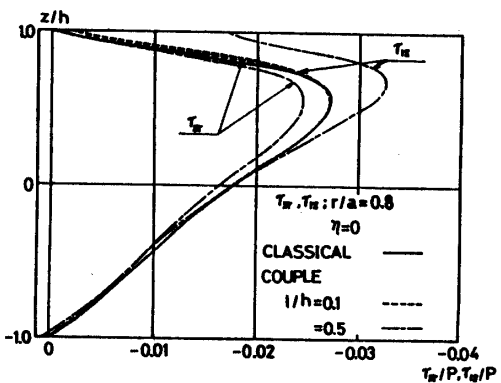


図4,  $r/a = 0.8$  のz方向のせん断応力分布

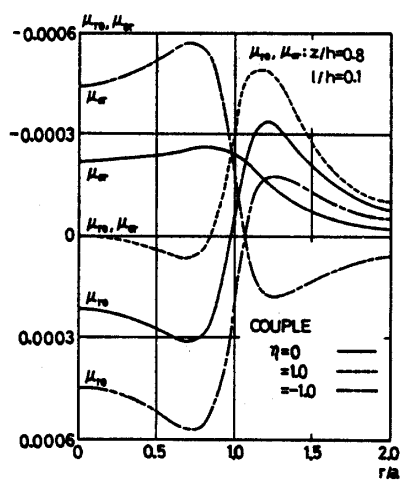


図5,  $\eta$  の変化下における  $M_{\theta\theta}, M_{\phi\phi}$  分布図

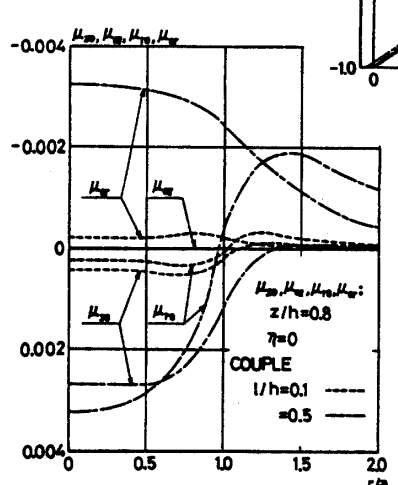


図6,  $z/h$  の変化下における  $M_{\theta\theta}, M_{\phi\phi}$  分布図

§4 考察および結論

$\hat{U}_{z\theta}, \hat{U}_{z\phi}$  成分の分布図と合せて緒言に述べた結論を得たが、さらに、図2, 3から明らかとなり、せん断力の非対称成分は、荷重に比例して優やく  $r = a$  で大きい値を持つ。

§5 文献 省略