# 203 偶応力を考慮した円筒の軸対称問題における新材料物性値による影響について

埼玉大学 工学部 °中 払 恂
埼玉大学 工学部 吉 川 敬 治

## §1. まえがき

近年，非対称テンソル場における軸対称問題の理論解析が，ポーランドのNOWACKI教授ら[1]によって，数多く行なわれている。
これらの大部分は半平面体の理論および二次元問題が主流をなし，わずかに混合問題[2]，クラック問題[3]への拡張が緒についた程度である。本研究は偶応力理論を用いて，等方等質問題におけるMINDLN流の新材料物性値（$\ell$，$\bar{\eta}$）の影響下での応力および偶応力分布の円筒問題を取りあつかったものである。 筆者らによるこの円筒問題へのアプローチはきわめて僅少で Z, OLFSIAK らによるLaméの解[4]の非対称テンソル場の拡張をみているのが現状である。

この問題の困難性は古典理論に比し新しい物性値が二個，増加するのみならず，さらにそれが境界条件を規定しているためである。したがって，拡張されたポアソン比（$\bar{\eta}$）を固定した形で応力分布の新材料物性値の依存性について検討を行った。

## §2 基礎方程式，解析，境界条件

基礎方程式は以下のとおりであるが，記号，文字，は通常の方法によった。

$\tau_{ji,j}=0$ ---(1)，$\mu_{ji,j}+\varepsilon_{ijk}\tau_{jk}=0$ ---(2) たゞし $\mu_{ji}$ はカップルストレスである。

$\tau_{ij}=\sigma_{ij}+\gamma_{ij}$ で $\sigma_{ij}=\frac{1}{2}(\tau_{ij}+\tau_{ji})$ であり $\tau_{ij}$ の対称成分，また $\gamma_{ij}=\frac{1}{2}(\tau_{ij}-\tau_{ji})$ で交代成分である。なお $\sigma_{ij}$ は一般化されたHOOKの方則を満足し，$\gamma_{ij}$ はカップルストレスと合わせ，回転の平衡方程式を満足する。次に変位，曲率等々の関係は次式のとおりである。

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\quad \chi_{ij}=\omega_{i,j}=\frac{-1}{2}\varepsilon_{imn}u_{n,mj},\quad \sigma_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2Ge_{ij},\quad \mu_{ji}=4G\ell^2(\chi_{ji}+\bar{\eta}\chi_{ij})$$
------ (3)

変位ベクトル $\vec{u}=\vec{\Phi}-\ell^2\nabla\nabla\cdot\vec{\Phi}-\frac{1}{4(1-\nu)}\mathrm{grad}\{R\cdot(1-\ell^2\nabla^2)\vec{\Phi}+\Phi_0\}$ であり $\vec{\Phi}$ および $\Phi_0$ は $\nabla^2(\vec{\Phi}-\ell^2\nabla^2\vec{\Phi})=0$，$\nabla^2\Phi_0=0$ を満足するポテンシャル関数およびスカラー関数である。この $\vec{\Phi}$ はPAPKOVICHによる方法を踏襲し $\vec{\Phi}=(\phi,0,0)$ とすれば変位 $u_r$，$u_z$ は次のようになる。

$$u_r=\phi-\ell^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\phi+\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-\alpha\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\left\{1-\ell^2\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)\right\}\phi+\phi_0\right]$$
--------- (4)

$$u_z=-\ell^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\phi+\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-\alpha\frac{\partial}{\partial z}\left[r\cdot\left\{1-\ell^2\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)\right\}\phi+\phi_0\right]$$
------- (5) を得る。

たゞし $\alpha=(\lambda+G)/2(\lambda+2G)=1/4(1-\nu)$ である。また回転 $\omega_\theta=\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial z}$ を得る。

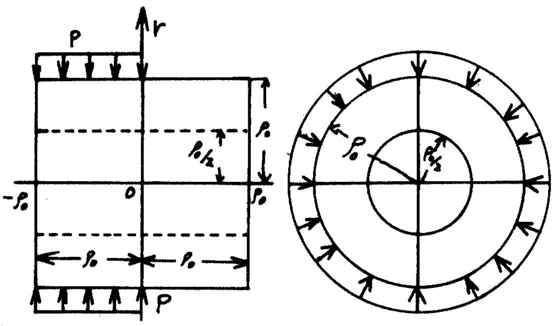


図1.

$\phi$ の定義により $(\nabla^2-1/r^2)\{1-\ell^2(\nabla^2-\frac{1}{r^2})\}\phi=0$ を考慮すれば $\phi$ および $\phi_0$ の解析関数は次のようである。たゞし $\nabla^2$ は角度 $\theta$ に関し軸対称であるから $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

である。

$$\Phi=\left\{A_n I_1(nr)+B_n K_1(nr)+C_n I_1(\eta r)+D_n K_1(\eta r)\right\}{}^{\cos nz}_{\sin nz} \quad \cdots\cdots(6) \qquad \phi_0=\left\{E_n I_0(nr)+F_n K_0(nr)\right\}{}^{\cos nz}_{\sin nz} \quad \cdots\cdots(7)$$

$I_0$, $I_1$, $K_0$, $K_1$ は変形ベッセル関数オ1種およびオ2種である。また0次および1次である。

この$\phi$, $\phi_0$を用いて応力, 偶応力をあらわすと次のようになる。但し $\eta=\sqrt{n^2+\frac{1}{\ell^2}}$,

$\tau_{rr}=2Ge_{rr}+\lambda e$, $\tau_{\theta\theta}=2Ge_{\theta\theta}+\lambda e$, $\tau_{zz}=2G+\lambda e$, たゞし $e=e_{rr}+e_{\theta\theta}+e_{zz}$ である。

$$e_{rr}=\frac{\partial\phi}{\partial r}+\ell^2\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\phi}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right\}-\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2},$$

$$e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\phi-\frac{\ell^2}{r^2}\left\{\frac{\phi}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right\}-\frac{\alpha}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$e_{zz}=-\frac{\ell^2}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\ell^2\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z}-\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \quad \psi=-\frac{\ell^2}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\ell^2\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z}-\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

により $\tau_{rr}$, $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{zz}$ がもとまる。

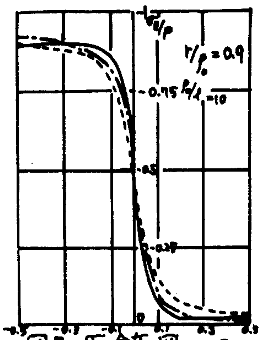

図2. $\sigma_r$分布図 $z/\rho_0$

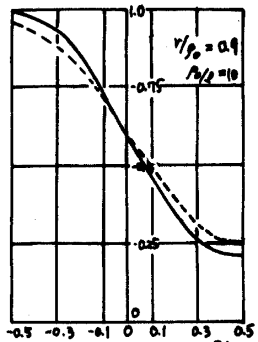

図3 $\sigma_z$分布図 $z/\rho_0$

——— 古典理論による応力値
—·—·— $\bar{\eta}=0$の場合
- - - - $\bar{\eta}=-0.5$の場合 なお図3の- - - -は $\bar{\eta}=0.5$, $=1.0$, $=0$ を含む。

次に剪断応力成分は$\sigma_{ij}$と平衡方程式より$\tau_{rz}$, $\tau_{zr}$を連立してもとめると次の結果を得る。

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zr}&=G\left\{\left(1+3\ell^2/r\right)\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{3\ell^2}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}-3\ell^2\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z}-\ell^2\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}-2\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right\}\\ \tau_{rz}&=G\left\{\left(1+\ell^2/r\right)\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{\ell^2}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}-\ell^2\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z}+\ell^2\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}-2\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_{r\theta}&=2G\ell^2\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\bar{\eta}}{r}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}\\ \mu_{\theta r}&=2G\ell^2\left(\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}\\ \mu_{z\theta}&=2G\ell^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2},\quad \mu_{\theta z}=2G\ell^2\bar{\eta}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\cdots(9)$$

図1の境界条件をフーリエ級数であらわすと次のようになる。

$$\tau_{rr}=-\frac{P}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}\frac{P}{\pi K}(1-\cos K\pi)\,\mathrm{SIN}\,K\pi\xi$$

となる。なお実際の数値計算は $P=1\,\mathrm{Kg/mm^2}$, $G=100\,\mathrm{Kg/mm^2}$, ポアソン比 $\nu=0.45$, $\rho_0=4\mathrm{cm}$ とした。

図2以下に示すとおり, 拡張されたポアソン比$\bar{\eta}$は$-0.5$, 0, 1.0 の三つの場合について吟味した。なお新材料物性値$\ell$は円筒の最大半径との比$\rho_0/\ell=10.0$の場合である。$\tau_{rz}=0$, $\mu_{r\theta}=0$を境界条件とした。

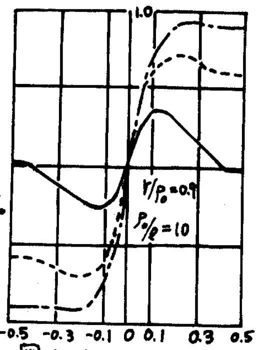

図4 $\mu_{r\theta}$分布図 $z/\rho_0$

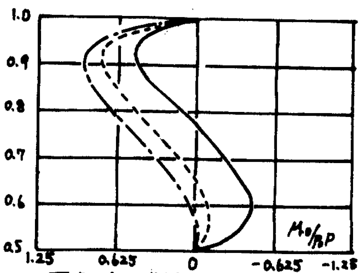

図5 $\mu_{r\theta}$の半径方向分布図

——— $\bar{\eta}=1.0$
- - - - $\bar{\eta}=0$
—·—·— $\bar{\eta}=-0.5$

## §3 数値計算結果

図2は$\sigma_r$, 図3は$\sigma_z$, 図4は$\mu_{r\theta}$のZ軸方向の応力分布を, 図5は$\mu_{r\theta}$の半径方向による応力分布を示す。

## §4 考察

(1) $\tau_{rr}$, $\tau_{rz}$, $\tau_{zr}$の偶応力理論解の応力値は古典解より軽減している。(2)応力の軽減の程度は荷重の作用している境界面に近づくにつれて大きくなり, また荷重の不連続点付近において応力の軽減は大きい。(3)偶応力解による応力分布は古典解よりゆるやかなカーブを描く, (4) $\tau_{rr}$, $\tau_{zr}$, $\tau_{rz}$は拡張されたポアソン比($\bar{\eta}$)に依存して影響を受けやすい。(5) $\mu_{r\theta}$, $\mu_{\theta r}$は$\bar{\eta}$に大きく依存して$\bar{\eta}$の変化に対応して影響を受ける。(6) $\mu_{r\theta}$, $\mu_{\theta r}$はひずみ勾配を受けて円筒内で符号が逆転する。(7) $\bar{\eta}$が1に近づくと古典理論に近づく, (8) $\bar{\eta}$は$\sigma_z$, $\sigma_\theta$に対して大きく影響を与えない。

## §5 結語

新材料物性値$\bar{\eta}$は応力$\sigma_z$, $\sigma_\theta$に大きくあらわれないが偶応力には影響大である。

## §6 文献


(1). W.NOWACKI. Bull.Pol.DE.Sci 1971, No7.8 P314 (2) R.DHALWAL. S.M.KHAN. Int.J.Eng.Sci 1976, Vol14 P769
(3) S.MATYSIAK. bull.pol.DE.Sci 1977, No1, (4). Z.OLESIAK, M.WAGROWSKA Bull.pol.sci 1975, Vol4. P189.