

539.4.019.1 : 534.2

半球ピット面に軸対称衝撃ねじりを受ける半無限体\*

宮尾三郎\*\*, 土田栄一郎\*\*\*, 松本浩之\*\*\*\*, 中原一郎\*\*\*\*

1. 緒 言

実際に作用する外力の分布形は複雑であるが、理論解析においては解析が容易になるように外力の分布形を仮定することが多い。静荷重を受ける場合には合力および合モーメントが等しければ、荷重位置からある程度離れた位置に生ずる応力は外力の分布形にはほとんど無関係であることが知られている。衝撃荷重についても同じことが結論できるならば解析結果の実用価値が高められるであろう。そのために、すでに若干の人たちによってサンプナンの原理の動的問題への拡張を目的とした研究が行われた。まず、Boleyは縦衝撃<sup>(1)</sup>および曲げ衝撃<sup>(2)</sup>において衝撃力の立ち上がりが非常にゆるやかな場合を一次元理論に基づいて解析し、サンプナンの原理が動的問題にも適用できることを示している。著者らは一端に衝撃トルクを受ける丸棒の三次元応力分布を解析し、外力の分布形が衝撃応力に及ぼす影響を明らかにしている<sup>(3)</sup>。

本研究は半無限体表面の半球ピット面に衝撃トルクが作用する場合を対象として、ピット面のせん断力の分布形および衝撃トルクの立ち上がり時間が伝ばする衝撃応力に及ぼす影響を明らかにし、静的問題に対するサンプナンの原理を衝撃問題に拡張する際の指針を与えた。

2. 応力関数

慣性項を含む弾性基礎方程式の解は応力関数の微分形として表示できる。直角座標  $(x, y, z)$  方向の変位を  $(u_x, v_y, w_z)$  とすれば、本問題を解析するためには、次のような応力関数  $\chi$ <sup>(3)</sup> を用いると便利である。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= y \frac{\partial \chi}{\partial z} - z \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ v_y &= z \frac{\partial \chi}{\partial x} - x \frac{\partial \chi}{\partial z} \\ w_z &= x \frac{\partial \chi}{\partial y} - y \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

\* 昭和47年4月4日 第49期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和48年4月2日。  
 \*\* 正員、三菱総合研究所。  
 \*\*\* 正員、埼玉大学理工学部。  
 \*\*\*\* 正員、東京工業大学(東京都目黒区大岡山2-12-1)。

ここで  $\chi$  は波動方程式

$$\nabla^2 \chi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$

を満たせばよい。ただし

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$c^2 = \frac{gG}{\gamma}$$

そして  $t$  は時間、 $g$  は重力加速度、 $G$  は横弾性係数、 $\gamma$  は単位体積当たりの重量である。

球座標  $(R, \theta, \varphi)$  方向の変位を  $(u_R, v_\theta, w_\varphi)$  とすれば式(1)から

$$u_R = 0, \quad v_\theta = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \quad w_\varphi = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

となる。そこで軸対称ねじり問題では

$$u_R = w_\varphi = 0, \quad v_\theta = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \dots\dots\dots (2)$$

そして応力成分は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{R\theta}}{G} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \\ \frac{\tau_{\theta\varphi}}{G} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} - \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \\ \sigma_R &= \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \tau_{R\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし  $\chi$  は

$$\nabla^2 \chi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \dots\dots\dots (4)$$

を満たす必要がある。

3. 解 析 法

図1のように半無限体の半球ピット面にのみ衝撃トルク  $T$  が作用する場合には

- (i) 半無限体表面において  $(\sigma_\varphi)_{\varphi=\pi/2} = (\tau_{R\varphi})_{\varphi=\pi/2} = (\tau_{\theta\varphi})_{\varphi=\pi/2} = 0 \dots\dots (5)$
- (ii) ピット面において(ピット半径  $a$ )

$$(\sigma_R)_{R=a} = (\tau_{R\varphi})_{R=a} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

そして、ピット面上のせん断力の分布を  $\tau(\varphi, t)$  とすれば

$$(\tau_{R\theta})_{R=a} = \tau(\varphi, t) \dots\dots\dots (7)$$

である。

$t < 0$  で弾性体が静止しているとして式 (4) をラプラス変換すれば

$$\nabla^2 \bar{\chi} = \alpha^2 \bar{\chi} \dots\dots\dots (8)$$

ここで

$$\alpha^2 = \frac{p^2}{c_2^2}, \quad \bar{\chi} = \int_0^\infty \chi e^{-pt} dt$$

半無限体表面の一点に集中トルクが作用すれば、せん断応力  $\tau_{R\theta}$  は  $\sin \varphi$  に比例して分布する。半球ピット面にこれと同じ分布をする衝撃トルクがステップ関数状に作用する場合には

$$(\tau_{R\theta})_{R=a} = \tau_0 \sin \varphi H(t) \dots\dots\dots (9)$$

ここで  $H(t)$  はヘビサイドの単位関数であり、この場合を解析するために式 (8) の解として

$$\left. \begin{aligned} \xi = \rho - 1 \text{ (応力波面到達時) では } & v_0 = 0, \quad \frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} = \frac{\sin \varphi}{\rho} \\ \xi > \rho - 1 \text{ (応力波面到達後) では } & \\ -\frac{Gv_0}{\tau_0 a} = \frac{1}{3} \frac{\sin \varphi}{\rho^2} \left[ 1 - e^{-(3/2)(\xi-\rho+1)} \left\{ \cos \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi-\rho+1) - \sqrt{3} (2\rho-1) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi-\rho+1) \right\} \right] & \\ \frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} = \frac{\sin \varphi}{\rho^3} \left[ 1 + e^{-(3/2)(\xi-\rho+1)} \left\{ (\rho^2-1) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi-\rho+1) - \sqrt{3} (\rho-1)^2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi-\rho+1) \right\} \right] & \\ \xi \rightarrow \infty \text{ とすれば静的結果に一致し } & -\frac{G}{\tau_0} \frac{v_0}{a} = \frac{1}{3} \frac{\sin \varphi}{\rho^2}, \quad \frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} = \frac{\sin \varphi}{\rho^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

故に応力は端面から遠ざかるにつれて減少し、波面の応力は  $\rho^{-1}$  に比例して減少する。これに対して静的な値は  $\rho^{-3}$  に比例して減少する。

半無限体表面の半球ピット面に剛体球を通じて衝撃トルクが加えられた場合は Hill<sup>(4)</sup> によって解析されたことがあり、ピット面のせん断力は  $\sin \varphi$  に比例して分布するから式 (10) はこの場合に対する結果でもある。

しかし、一般にはピット面に加えられたせん断力は式 (9) のように分布するとは限らない。ピット面に任意の形に分布したせん断力によって半無限体に衝撃トルクが作用する場合には、 $R \rightarrow \infty$  においてすべての応力は消失しなければならないことを考慮して、式 (8) の解を

$$\bar{\chi} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m h_m^{(1)}(i\alpha R) P_m(\mu) \dots\dots\dots (11)$$

とおく。ここで  $\mu = \cos \varphi$ 、そして  $h_m^{(1)}(z)$ 、 $P_m(\mu)$  はそれぞれ第 1 種の球ハンケル関数、ルジャンドルの多項式であり、 $A_m$  は境界条件から定まる未定係数である。式 (2)、(3) をラプラス変換しこれに式 (11) を代入すればラプラス変換された変位および応力は次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= - \sum_{m=1}^{\infty} A_m h_m^{(1)}(i\alpha R) P_m^1(\mu) \\ \frac{\bar{\tau}_{R\theta}}{G} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{R} \{ (m+2) h_m^{(1)}(i\alpha R) - i\alpha R h_{m-1}^{(1)}(i\alpha R) \} P_m^1(\mu) \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta\varphi}}{G} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{R} h_m^{(1)}(i\alpha R) P_m^2(\mu) \end{aligned}$$

ここで  $P_m^*(\mu)$  はルジャンドル陪関数であり、 $P_m^0(\mu) = P_m(\mu)$  となる。

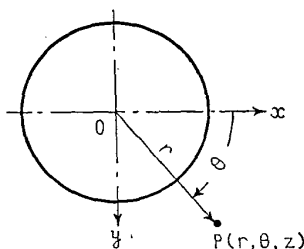
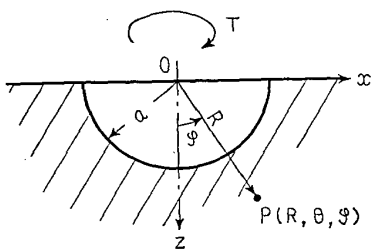


図 1 座標系

この解では半無限体表面における境界条件式(5)の  
はじめの二つは満足されており,  $m$  を奇数に決めれ  
ば  $P_m^2(0)=0$  であるから残りの境界条件  $(\tau_{\theta\varphi})_{\varphi=\pi/2}=0$   
は  $A_m$  に無関係に満足される. なお,  $P_\nu^\lambda(\mu)=P_{-\nu-1}^\lambda(\mu)$   
であるから  $P_\nu^\lambda(\mu)$  は  $\nu=-1/2$  について  
対称であり, したがって  $m$  は正の奇数でよい.

また  $\sigma_R, \tau_{R\varphi}$  はともに零であるからピット面の境界  
条件(7)が満足されるためには

$$\frac{\bar{\tau}}{G} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_m}{a} \{ (m+2)h_m^{(1)}(i\alpha a) - i\alpha a h_{m-1}^{(1)}(i\alpha a) \} P_m^1(\mu) \dots\dots\dots (12)$$

であればよい. そのために外力のラプラス変換  $\bar{\tau}$  を  
 $P_m^1(\mu)$  で展開する. すなわち外力がステップ関数状  
に変動し  $\tau = \tau_0 f(\mu) H(t)$  で与えられる場合には

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_0}{p} f(\mu)$$

であり,  $f(\mu)$  は次のように展開される.

$$f(\mu) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^1(\mu) \dots\dots\dots (13)$$

ここで

$$f_m = \frac{2m+1}{m(m+1)} \int_0^1 f(\mu) P_m^1(\mu) d\mu$$

そこで, 式(12), (13)から未定係数  $A_m$  が次のよ  
うに決まる.

$$A_m = \frac{a\tau_0}{Gp} \frac{f_m}{(m+2)h_m^{(1)}(i\alpha a) - i\alpha a h_{m-1}^{(1)}(i\alpha a)}$$

そして公式

$$h_m^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{m+1/2}^{(1)}(z)$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{(1/2)\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(iz)$$

ここで  $H_\nu^{(1)}(z)$  は第1種のハンケル関数  
を用いて, 球ハンケル関数を第2種の変形ベッセル関  
数  $K_\nu(z)$  で表せば変位および応力は逆変換積分を用  
いて次のように表せる.

$$\left. \begin{aligned} -\frac{Gv_\theta}{\tau_0 a} &= \rho^{1/2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^1(\mu) I_m^1 \\ \frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} &= \rho^{-1/2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^1(\mu) I_m^2 \\ \frac{\tau_{\theta\varphi}}{\tau_0} &= \rho^{-1/2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^2(\mu) I_m^1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで

$$I_m^1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_{m+1/2}(\lambda\rho)}{\lambda\rho F_m(\lambda)} e^{\lambda\xi} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$I_m^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F_m(\lambda\rho)}{F_m(\lambda)} e^{\lambda\xi} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

ただし

$$\lambda = \alpha a$$

$$F_m(\lambda) = K_{m-1/2}(\lambda) + \frac{m+2}{\lambda} K_{m+1/2}(\lambda) \dots\dots\dots (15)$$

$I_m^1, I_m^2$  の右辺の被積分関数は一価関数であり  $\lambda=0$   
および  $F_m(\lambda)=0$  に1位の極をもつ.

一方, 数学公式

$$K_{m+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{r=0}^m \frac{(m+r)!}{r!(m-r)!(2z)^r}$$

を式(15)に代入すれば, 特性方程式  $F_m(\lambda)=0$  は  $\lambda$   
に関する  $(m+1)$  次の代数方程式になり, 複素  $\lambda$  平  
面の第2, 第3象限に  $(m+1)/2$  組の共役複素根を  
持つことがわかる. そこで, 図2の反転積分路に沿っ  
た複素線積分を行えば  $I_m^1, I_m^2$  は極における留数の  
総和として次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} I_m^1 &= \frac{1}{m+2} \frac{1}{\rho^{m+3/2}} \\ &\quad - \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{(m+1)/2} R_0 \left\{ \frac{K_{m+1/2}(\rho\lambda_m^n)}{D_m(\lambda_m^n)} e^{\lambda_m^n \xi} \right\} \\ &= 0 \quad (\xi \leq \rho-1) \\ I_m^2 &= \frac{1}{\rho^{m+3/2}} \\ &\quad - \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{(m+1)/2} R_0 \left\{ \frac{\rho\lambda_m^n F_m(\rho\lambda_m^n)}{D_m(\lambda_m^n)} e^{\lambda_m^n \xi} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (\xi = \rho-1) \\ &= 0 \quad (\xi < \rho-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで

$$D_m(z) = \{z^2 + (m-1)(m+2)\} K_{m+1/2}(z)$$

$\lambda_m^n, \bar{\lambda}_m^n$  は  $F_m(\lambda)=0$  の  $n$  組めの共役複素根であ  
り,  $R_0$  は実部を示す.

複素  $\lambda$  平面において, 原点における留数を示す式  
(16)の第1項めのみを用いれば, 式(14)から静的  
解

$$\frac{G(v_\theta)_{st}}{\tau_0 a} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^1(\mu) \frac{\rho^{-(m+1)}}{m+2}$$

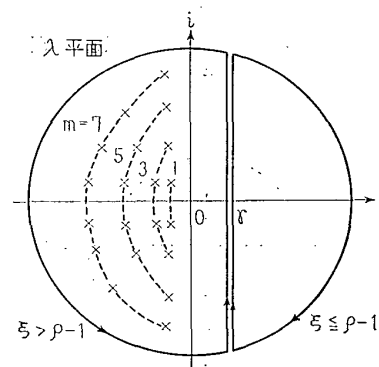


図2 反転積分路と  $F_m(\lambda)=0$  の根の位置

$$\frac{(\tau_{R\theta})_{st}}{\tau_0} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^1(\mu) \rho^{-(m+2)}$$

$$\frac{(\tau_{\theta\varphi})_{st}}{\tau_0} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^2(\mu) \frac{\rho^{-(m+2)}}{m+2}$$

が得られる。

$\xi = \rho - 1$  すなわち波面においては

$$v_\theta = \tau_{\theta\varphi} = 0$$

$$\frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} = \frac{1}{\rho} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^1(\mu) = \frac{1}{\rho} f(\mu)$$

となり、波面の応力分布は与えられた外力の分布形と一致し、その大きさは座標原点からの距離に逆比例する。

いま式(13)において右辺の第  $m$  項に対応するせん断力  $\tau_0 f_m P_m^1(\mu)$  で伝達されるトルク  $T_m$  を計算すれば次のようになる。

$$T_m = 2\pi a^3 \tau_0 f_m \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} P_m^1(\mu) d\mu$$

$m=1$  ならば  $P_1^1(\mu) = \sqrt{1-\mu^2}$  であり

$$T_1 = \frac{4}{3} \pi a^3 \tau_0$$

そして、 $m \neq 1$  の場合には

$$\int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} P_m^1(\mu) d\mu = \frac{1}{(m-1)(m+2)} P_m^2(0) = 0$$

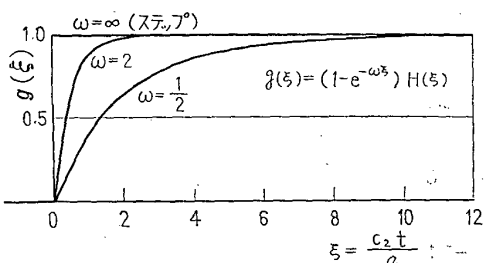


図 3 外力の時間的变化

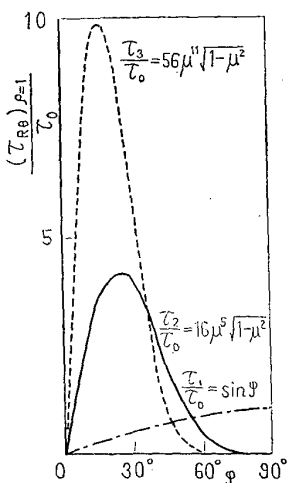


図 4 外力の分布形 ( $\mu = \cos \varphi$ )

であるから

$$T_m = 0 \quad (m=3, 5, 7, \dots)$$

となる。すなわちトルクは一次の波 ( $m=1$ ) によって伝達され、高次の波 ( $m=3, 5, 7, \dots$ ) はトルクの伝達に寄与しない。

外力が時間に関して任意に変動する場合の結果は、上に与えられたステップ応答の結果(14)、(16)とデュアメル積分を用いて次のように得られる。すなわち外力が  $\tau(\varphi, t) = \tau_0 f(\mu) g(\xi)$  で与えられる場合には応力  $\tau_{R\theta}$  は

$$\frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m P_m^1(\mu) \left[ \frac{1}{\rho^{m+2}} k_1(\xi) - \frac{2}{\rho^{3/2}} \sum_{n=1}^{(m+1)/2} R_n \left\{ \frac{\rho \lambda_m^n F_m(\rho \lambda_m^n)}{D_m(\lambda_m^n)} k_2(\xi) \right\} \right]$$

ここで

$$k_1(\xi) = \int_0^\xi \frac{dg(\eta)}{d\eta} d\eta$$

$$k_2(\xi) = \int_0^\xi \frac{dg(\xi-\eta)}{d(\xi-\eta)} e^{\lambda_m^n(\xi-\eta)} d\eta$$

.....(17)

の形になる。

表 1  $F_m(\lambda) = 0$  の根 ( $\lambda_m^n = x + iy = r e^{i\theta}$ )

m	n	極座標		直角座標	
		r	$\theta$ deg	x	y
1	1	1.732 05	150.0	-1.5	0.866 02
	3	2.612 86	159.711	-2.450 76	0.906 01
3	2	3.314 46	117.867	-1.549 24	2.930 10
	5	3.822 78	166.628	-3.719 14	0.884 12
5	2	4.132 79	139.187	-3.127 88	2.701 17
	3	5.148 04	108.729	-1.652 98	4.875 44
7	1	5.018 78	170.100	-5.022 87	0.876 66
	2	5.304 39	150.014	-4.594 39	2.651 10
7	3	5.796 68	128.846	-3.635 83	4.514 67
	4	7.034 28	104.379	-1.746 90	6.813 91
9	1	6.396 50	172.154	-6.336 66	0.873 29
	2	6.552 42	156.317	-6.000 52	2.631 96
9	3	6.896 58	139.992	-5.282 43	4.433 76
	4	7.529 77	122.532	-4.049 31	6.348 26
9	5	8.945 26	101.812	-1.831 07	8.755 85
	11	7.703 12	173.516	-7.654 82	0.871 48
11	2	7.829 78	160.422	-7.378 07	2.622 55
	3	8.099 26	149.094	-6.799 87	4.399 54
11	4	8.553 62	133.217	-5.857 94	6.233 46
	5	9.305 24	118.233	-4.401 92	8.198 20
11	6	10.871 07	100.105	-1.907 36	10.702 44
	13	9.022 58	174.0	-8.972 37	0.866 40
13	2	9.108 73	163.453	-8.740 66	2.618 56
	3	9.371 89	151.844	-8.253 51	4.381 64
13	4	9.702 44	140.508	-7.484 36	6.180 42
	5	10.254 07	128.297	-6.357 13	8.048 21
13	6	11.110 18	115.092	-4.711 60	10.061 26
	7	12.806 91	98.882	-1.977 32	12.653 35

たとえば図3のように外力が指数関数状に増大して一定値に達するならば

$$g(\xi) = (1 - e^{-\omega\xi})H(\xi)$$

を式(17)に代入して

$$k_1(\xi) = \{1 - e^{-\omega(\xi - \rho + 1)}\}H(\xi - \rho + 1)$$

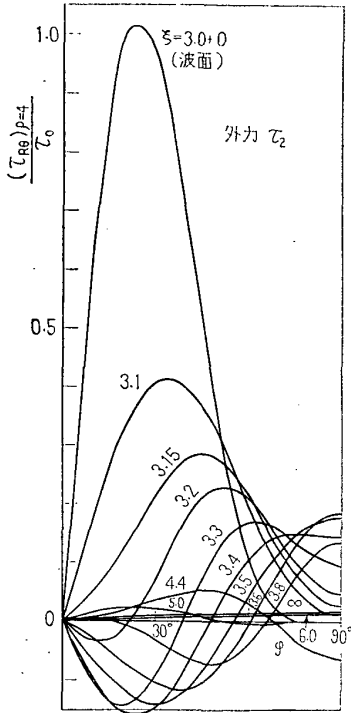
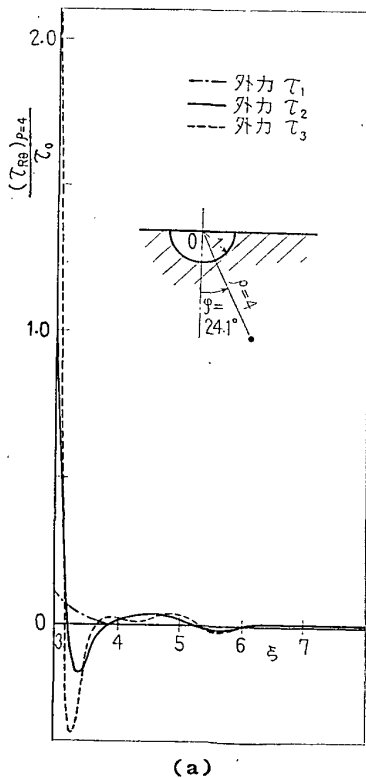


図5 せん断応力分布の時間的変動 ( $\xi = \infty$  は静的結果を表す)



(a)

$$k_2(\xi) = \frac{\omega}{\omega + \lambda_m^n} \{e^{\lambda_m^n(\xi - \rho + 1)} - e^{-\omega(\xi - \rho + 1)}\}H(\xi - \rho + 1)$$

となる. また振動外力が作用する場合には

$$g(\xi) = \sin(\omega\xi)H(\xi)$$

とおけば

$$k_1(\xi) = \sin\{\omega(\xi - \rho + 1)\}$$

$$k_2(\xi) = \frac{\omega}{\omega^2 + (\lambda_m^n)^2} [\lambda_m^n e^{\lambda_m^n(\xi - \rho + 1)} + \omega \sin\{\omega(\xi - \rho + 1)\} - \lambda_m^n \cos\{\omega(\xi - \rho + 1)\}]$$

とすればよい.

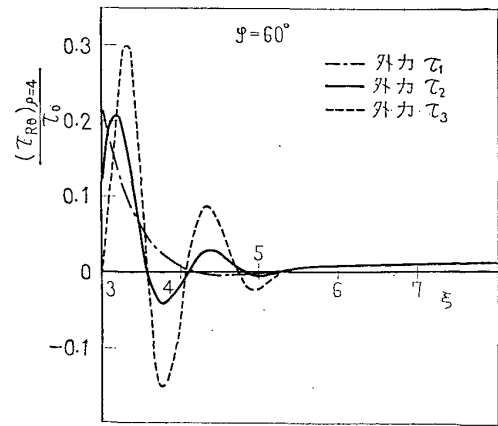
#### 4. 数値計算

外力の分布状態が伝ばする衝撃応力に及ぼす影響を明らかにするために, ピット面に作用するせん断力の分布形として次の三つを選んだ.

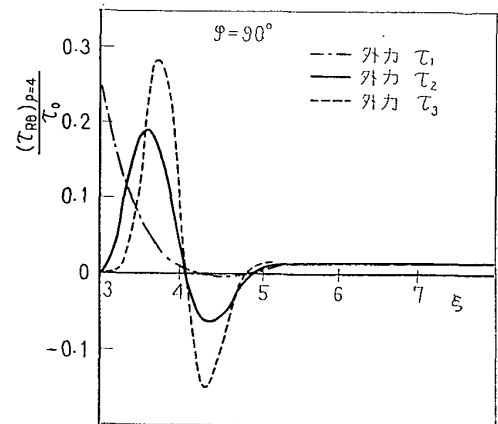
$$\tau_0 f(\mu) = \begin{cases} \tau_0 \sqrt{1 - \mu^2} = \tau_0 \sin \varphi = \tau_1 \\ 16 \tau_0 \mu^5 \sqrt{1 - \mu^2} = \tau_2 \\ 56 \tau_0 \mu^{11} \sqrt{1 - \mu^2} = \tau_3 \end{cases}$$

$\tau_1$  は応力波の基本分布形であるとも考えられ, この場合の結果は式(10)で表される.

これらのせん断力の対称軸に関する合モーメントは



(b)



(c)

図6 せん断応力の時間的変動

等しく、 $\tau_1$  はピットの縁で最大になり、 $\tau_2, \tau_3$  はピットの底近く、すなわち  $\varphi=24.1^\circ, \varphi=16.8^\circ$  で最大になり、図 4 にはこれらの分布形が示してある。

数値計算においては応力の数値結果の有効数字が 3 けた以上になるように  $m$  の値を定め、外力  $\tau_2$  が作用する場合には  $m=7$ 、外力  $\tau_3$  が作用する場合には  $m=11$  とした。

衝撃外力が作用する場合の応答を式 (14)、(16) を用いて計算するために、まず特性方程式 (15) の複素根をニュートン法によって求めれば表 1 に示されるようになる。これらの根は複素平面上に無数に存在し、図 2 に示されるように  $m$  が増加するにつれて原点から遠く離れるようになる。

図 5 は外力  $\tau_2$  がステップ状に変動する場合に  $\rho=4$  の位置に生ずる応力  $\tau_{R\theta}$  の  $\varphi$  方向分布を示したものである。波面が到達した時 ( $\xi=3.0+0$ ) には、こ

の面の応力分布は端面に加えられた荷重分布と同じであり、時間の経過とともに分布形が変化して基本分布形すなわち  $\sin \varphi$  状の分布に近づき、波面到達後ピット半径のほぼ 3 倍の距離を進むに要する時間が経過すれば ( $\xi=6.0$ ) ほとんど基本波形分布と同じになる。

図 6 (a)~(c) は  $\rho=4$  に相当する球面上で  $\varphi=$

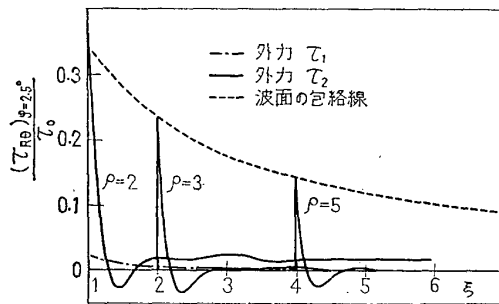
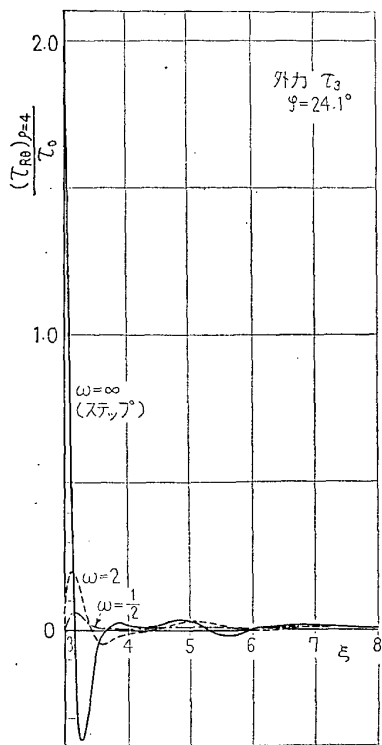


図 7 せん断応力の時間的変動



(a)

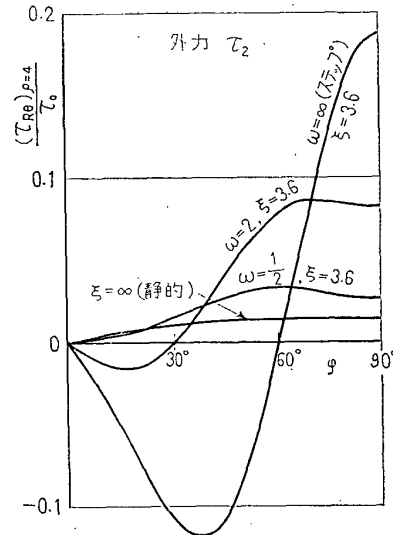
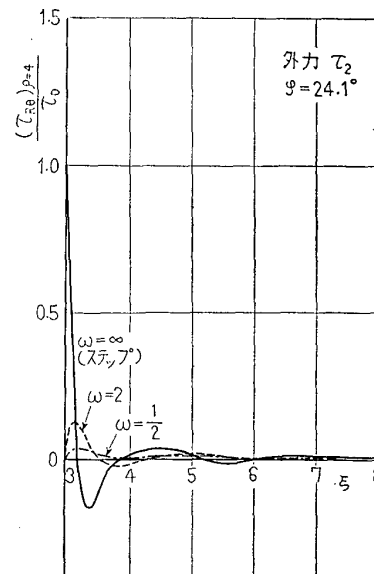
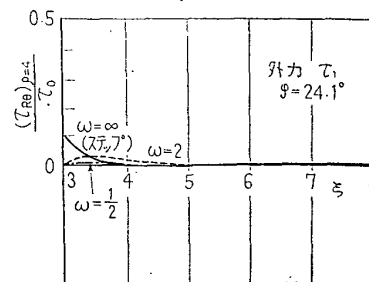


図 8 せん断応力分布におよぼす外力の立ち上がり時間の影響



(b)



(c)

図 9 指数関数状増加外力によるせん断応力の時間変動

24.1°, 60°, 90° の位置における応力変動を示したものである。応力変動は外力の分布形に影響され、ピット底近くに極大値をもつように分布した衝撃力をうける場合ほど波面到達後に激しく応力変動するが、ピット半径の 2~3 倍の距離を応力波が伝ばするのに要する程度の時間を経過すれば、外力の分布形に無関係に基本分布形の衝撃力をうける場合の結果にほとんど一致する。

図7は  $\varphi=2.5^\circ$  としてピット面からの距離が異なる各位置における応力変動を示したもので、波面到達直後はピット面から遠く離れた位置でも、外力の分布形によって衝撃応力が異なることがわかる。

実際問題においては外力は有限な立ち上がり時間を持つ。図8は外力  $\tau_2$  が図3のように有限な立ち上がり時間を持つ場合に  $\rho=4$  の位置に生ずる応力  $\tau_{R0}$  の  $\varphi$  方向の分布を  $\xi=3.6$  すなわち外力  $\tau_2$  により  $\rho=4$ ,  $\varphi=90^\circ$  の位置に最大応力が生ずる瞬間〔図6(c)〕について示したものである。立ち上がり時間が長いほど最大応力は小さくなる。

図9(a)~(c)は外力  $\tau_3$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_1$  がそれぞれ有限な立ち上がり時間を持つ場合の応力変動を示したもので、外力の分布形による応力変動の相違は、立ち上がり時間が長くなるにつれて小さくなることがわかる。

## 5. 結 言

半無限体表面の半球ピット面に分布するせん断力が

トルクを形成する場合を対象として、衝撃応力を解析し次の結果を得た。

(1) 特殊な応力関数を用いることによって半無限体のねじり問題の解析が簡単化される。

(2) 静的平衡状態においてサンブナンの原理が適用できる程度に端面から離れた位置でも、動的問題における波面到達直後の応力は外力の分布形に強く左右される。しかし波面到達後時間が経過すれば、応力は外力の分布形に無関係にほぼ等しくなる。その時間は、ステップ状外力の場合、ピット面からピット半径  $a$  の3倍離れた位置では応力波が  $3a$  の距離を伝ばするのに要する時間程度である。

(3) 衝撃力が有限な立ち上がり時間を持つ場合には、ステップ状外力を受けた場合よりも衝撃応力に及ぼす外力の分布の影響は小さい。

(4) 衝撃応力に及ぼす外力の分布形の影響の度合は物体の形状に依存すると考えられ、前報<sup>(3)</sup>の結果と本研究結果とを比較すれば、衝撃トルクをうける丸棒と半無限体とでは、後者のほうが外力分布の影響が大きい。

## 文 献

- (1) Boley, B.A., *J. Appl. Mech.*, 22-2 (1955-6), 204.
- (2) Boley, B.A., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-1 (1960-3), 74.
- (3) 竹内・ほか2名, 機論, 33-251 (昭42-7), 1018.
- (4) Hill, L., *J. Acous. Soc. Amer.*, 40-2 (1966), 376.

## 討 論

〔質問〕 片山 忠一 (大阪府立大学工学部)

(1) 図8では、 $\omega=\infty$  の時に  $\varphi=90^\circ$  で応力が最大となる時間 ( $\xi=3.6$ ) において比較がなされているが、この時間は  $\omega$  に依存するのではないか。

(2) 結言の(2)に関連して、おたずねしたい。

応力が外力の分布形に無関係になるような波面到達後の経過時間は、 $\rho \approx 4$  の場合にも(2)と同程度と考えるとよいか。

〔回答〕 (1) 図8,9には時間  $\xi$ , 位置  $\varphi$  を固定した例として  $\xi=3.6$ ,  $\varphi=24.1^\circ$  の場合を示した。これら  $\xi, \varphi$  の値は紙面の都合で一例のみを選ぶとすれば何か根拠のある値をとという考えで選ばれたもので、それ以外には深い意味はない。

一般に、分布形が等しく時間変動のパラメータ  $\omega$  が異なる外力を受ける場合、物体中の位置を固定して考えれば、その位置の変位、応力が最大となる時間は  $\omega$

が大きいほど大きく、また変位、応力の最大値は  $\omega$  が大きいほど小さいと考えて大きな誤りはないと思う。

(2) 応力が外力の分布形に無関係となるような波面到達後の経過時間は、 $\rho$  に関係する。たとえば、図7に外力  $\tau_1, \tau_2$  の場合についての  $(\tau_{R0})_{\varphi=2.5^\circ-\xi}$  曲線が示されているが、 $\rho=2$  の場合には外力  $\tau_1, \tau_2$  による結果は  $\xi \rightarrow \infty$  の場合でも一致しない。すなわち  $\rho=2$  の位置は静的問題においても外力の影響が顕著な領域に属している。本問題を静的問題におきかえて解析した結果、合トルクが等しい場合に外力の分布形の影響を無視しうる領域は  $\rho > 4$  と考えてよい。そして、動的な場合、問題の経過時間は  $\rho > 4$  の場合には  $\rho=4$  の場合と同程度と考えるとおけば十分である。 $\rho < 4$  の場合には、 $\rho$  が1に近づくほど外力の分布形の影響が大きくなる。