

539.4.013.1 : 539.382

## 球かを有する半無限体の 1 軸引張り\*

土田 栄一郎\*\*, 中原 一郎\*\*\*

## 1. 緒 言

溶接部にしばしば生ずる巣やブローホールなどによる応力集中を明らかにするために、既に球かを有する半無限体が無限遠方において 2 軸一様引張荷重をうける軸対称問題<sup>(1)</sup>を解析した。本研究では球かを有する半無限体に無限遠方で 1 軸一様引張荷重が作用する非軸対称問題を三次元弾性理論に基づいて解析した。

非軸対称応力状態は軸対称応力状態よりも一般的ではあるが、その解析はより困難であるから実際に解析された例は少ない。一般に三次元弾性基礎方程式の一般解は 3 個の調和応力関数の微分形で表されることが知られており、既に Boussinesq, Dougall, Neuber などによってそれぞれ異なった形で一般解が表示された。これらの解は全く同等なもので、応力関数として用いる調和関数を変えることによって得られる解は全く同じものになる。したがって特定の応力関数と調和方程式の変数分離解のみを用いて境界条件が都合よく満足されない場合には、より複雑な調和関数を用いる代わりに種々の応力関数の組合せをくふうすることによって、変数分離解のみを用いて与えられた境界条件を満足する解を導くことができる。また複連結問題において複数の座標系での調和関数を組合わせて用い、一

方の座標系における調和関数を他方の座標系における調和関数で展開する場合には、調和関数としては単純な変数分離解のみを用いるほうが数学的処理が容易である。そこで本解析においては Boussinesq, Neuber および Dougall の応力関数を組合わせて 6 個の応力関数を用いて解を表示し、円柱座標および球座標での調和方程式の変数分離解を用いて境界条件を満足させる方法を示した。境界条件より本解は (i) 2 軸一様引張荷重のもとにおける軸対称解と (ii) 単純せん断荷重のもとにおける非軸対称解に分離され (i) に対しては前論文<sup>(1)</sup>の解を用い、本論文では (ii) に対する解を導いた。

## 2. 応 力 関 数

図 1 のように円柱座標  $(r, \theta, z)$ 、球座標  $(R, \theta, \varphi)$  を用い半無限体平面から球かの中心までの距離を 1 としこれを単位としてすべての長さを表し球かの半径を  $a$  とおく。いま円柱座標のもとで応力関数  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \lambda_3$  を用いて  $r, \theta, z$  方向変位  $u_r, v_\theta, w_z$  を次のように表すとそれらは三次元弾性基礎方程式の互いに独立な解となることが知られているから、それらの一次結合によって境界条件を満足させれば本問題の解が得られる。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2Gu_r = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}, \quad 2Gv_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}, \quad 2Gw_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \\
 (2) \quad & 2Gu_r = r \cos \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - (3-4\nu) \cos \theta \varphi_1, \quad 2Gv_\theta = \cos \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + (3-4\nu) \sin \theta \varphi_1, \quad 2Gw_z = r \cos \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\
 (3) \quad & 2Gu_r = r \sin \theta \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - (3-4\nu) \sin \theta \varphi_2, \quad 2Gv_\theta = \sin \theta \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - (3-4\nu) \cos \theta \varphi_2, \quad 2Gw_z = r \sin \theta \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\
 (4) \quad & 2Gu_r = z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \quad 2Gv_\theta = \frac{z}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}, \quad 2Gw_z = z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu) \varphi_3 \\
 (5) \quad & 2Gu_r = r \frac{\partial \varphi_4}{\partial z}, \quad v_\theta = 0, \quad 2Gw_z = -r \frac{\partial \varphi_4}{\partial r} - 4(1-\nu) \varphi_4 \\
 (6) \quad & 2Gu_r = \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}, \quad 2Gv_\theta = -2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial r}, \quad w_z = 0
 \end{aligned}$$

.....(1)

ここで  $\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = \nabla^2 \varphi_3 = \nabla^2 \varphi_4 = \nabla^2 \lambda_3 = 0$ ,  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  であり、 $\nu$  はポア

\* 昭和 47 年 4 月 3 日 第 49 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 47 年 11 月 10 日。

\*\* 正員、埼玉大学理工学部 (浦和市下大久保 255)。

\*\*\* 正員、東京工業大学。

ソソ比,  $G$  は横弾性係数であり,  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  のみを用いれば, Neuber の解<sup>(2)</sup>となり,  $\varphi_0, \varphi_3, \lambda_3$  のみを用いれば Boussinesq の解<sup>(3)</sup>になり,  $\varphi_0, \varphi_4, \lambda_3$  のみを用いれば Dougall の解<sup>(4)</sup>となる. また式(1)を用いて球座標における  $R, \theta, \varphi$  方向変位  $u_R, v_\theta, w_\varphi$  を表せば次のようになる.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2Gu_R = \frac{\partial \varphi_0}{\partial R}, \quad 2Gv_\theta = \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}, \quad 2Gw_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} \\
 (2) \quad & 2Gu_R = R \sin \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \cos \theta - (3-4\nu) \sin \varphi \varphi_1 \cos \theta, \\
 & 2Gv_\theta = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \cos \theta + (3-4\nu) \varphi_1 \sin \theta, \quad 2Gw_\varphi = \sin \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \cos \theta - (3-4\nu) \cos \varphi \varphi_1 \cos \theta \\
 (3) \quad & 2Gu_R = R \sin \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \sin \theta - (3-4\nu) \sin \varphi \varphi_2 \sin \theta, \\
 & 2Gv_\theta = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \sin \theta - (3-4\nu) \varphi_2 \cos \theta, \quad 2Gw_\varphi = \sin \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} - (3-4\nu) \cos \varphi \varphi_2 \sin \theta \\
 (4) \quad & 2Gu_R = R \cos \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial R} - (3-4\nu) \cos \varphi \varphi_3, \\
 & 2Gv_\theta = \cot \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}, \quad 2Gw_\varphi = \cos \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi} + (3-4\nu) \sin \varphi \varphi_3 \\
 (5) \quad & 2Gu_R = -\sin \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial R} - 4(1-\nu) \cos \varphi \varphi_4, \quad v_\theta = 0, \quad 2Gw_\varphi = R \sin \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial R} + 4(1-\nu) \sin \varphi \varphi_4, \\
 (6) \quad & 2Gu_R = \frac{2}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}, \quad 2Gv_\theta = -2 \left[ \sin \varphi \frac{\partial \lambda_3}{\partial R} + \frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi} \right], \quad 2Gw_\varphi = \frac{2}{R} \cot \varphi \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

3. 解析法

いまO点を原点とする調和関数を用いて応力関数  $\varphi_0, \varphi_3$  を次のように表す<sup>(5)</sup>.

$$[I] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{4} \frac{1-\nu}{1+\nu} p (r^2 - 2z^2) + \frac{p}{4} r^2 \cos 2\theta \\ \varphi_3 &= -\frac{p}{2(1+\nu)} z \end{aligned} \right.
 \tag{3}$$

式(3)を式(1)に代入して得られる変位及び応力成分を直角座標で表すと

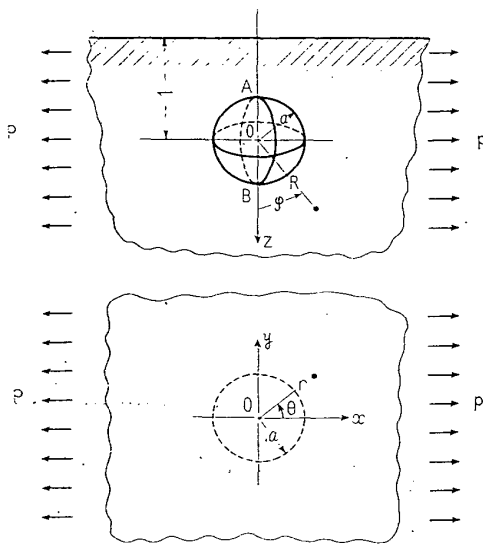


図1 座標系

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{p}{E} x, \quad v_y = -\nu \frac{p}{E} y, \quad w_z = -\nu \frac{p}{E} z \\ \sigma_x &= p, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

となり, これは半無限体を無限遠方において単位面積当たり  $p$  の力で  $x$  軸方向に一樣に引張った場合の解である. ここで  $E$  は縦弾性係数である. この場合弾性体内に原点Oを中心とする半径  $a$  の球面を考えれば, この面に生じている応力は式(4)を座標変換するかあるいは式(3)を式(2)に代入して次のように表される.

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\sigma_R}{p} \right)_{R=a} &= \frac{1}{3} (P_0 - P_2) + \frac{P_2^2}{6} \cos 2\theta \\ \left( \frac{\sigma_\theta}{p} \right)_{R=a} &= \frac{P_0}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \\ \left( \frac{\sigma_\varphi}{p} \right)_{R=a} &= \frac{1}{6} (P_0 + 2P_2) + \frac{1}{6} (P_0 + 2P_2) \cos 2\theta \\ \left( \frac{\tau_{R\varphi}}{p} \right)_{R=a} &= \frac{P_2'}{6} \sin \varphi - \frac{P_2'^2}{12} \sin \varphi \cos 2\theta \\ \left( \frac{\tau_{R\theta}}{p} \right)_{R=a} &= -\frac{P_2^2}{6 \sin \varphi} \sin 2\theta \\ \left( \frac{\tau_{\theta\varphi}}{p} \right)_{R=a} &= \frac{P_2'^2}{12} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

ここで  $P_n(\mu), P_n^m(\mu)$  を  $P_n, P_n^m$  で示し, それぞれ  $n$  次のルジャンドル関数およびルジャンドル陪関数を表し,  $\mu = \cos \varphi$  で  $'$  は  $\mu$  による微分を示している. それゆえに無限遠方ですべての応力および変位が消失し, 以下のような境界条件を満足する解を導いて [I] から導かれる解に重ね合わせれば球か有する半無限

体の 1 軸引張りに対する解が得られる。

(i) 半無限体平面  $z = -1$  で

$$(\sigma_z)_{z=-1} = (\tau_{rz})_{z=-1} = (\tau_{z\theta})_{z=-1} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(ii) 球か面  $R = a$  において

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R=a} &= -\frac{1}{3}(P_0 - P_2) - \frac{P_2^2}{6} \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R=a} &= -\frac{\sin \varphi}{6} P_2' + \frac{\sin \varphi}{12} P_2'^2 \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R=a} &= \frac{1}{6} \frac{P_2^2}{\sin \varphi} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式 (6), (7) の境界条件は軸対称部分と非軸対称部分に分離できるから,  $\theta$  に無関係な

$$(\sigma_z)_{z=-1} = (\tau_{rz})_{z=-1} = 0$$

$$\left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R=a} = -\frac{1}{3}(P_0 - P_2)$$

$$\left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R=a} = -\frac{\sin \varphi}{6} P_2'$$

を満足する軸対称解と  $\theta$  に関する

$$(\sigma_z)_{z=-1} = (\tau_{rz})_{z=-1} = (\tau_{z\theta})_{z=-1} = 0$$

$$\left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R=a} = -\frac{P_2^2}{6} \cos 2\theta$$

$$\left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R=a} = \frac{\sin \varphi}{12} P_2'^2 \cos 2\theta$$

$$\left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R=a} = \frac{1}{6} \frac{P_2^2}{\sin \varphi} \sin 2\theta$$

を満足する非軸対称解を重ね合わせれば境界条件(6),

(7) は満足される。

**3・1 軸対称解**<sup>(1)</sup> 応力関数を次のように表せば軸対称解が得られる。

$$[II] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{P_m(\mu)}{R^{m+1}} \\ \varphi_3 &= p \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{P_m(\mu)}{R^{m+1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$[III] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda^2} d\lambda \\ \varphi_3 &= p \int_0^{\infty} \lambda \phi_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda^2} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで  $A_m, B_m$  および  $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$  はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数であり  $J_n(\lambda r)$  は  $n$  次の第 1 種ベッセル関数である。これから得られる応力は既報<sup>(1)</sup>において  $p$  の代わりに  $p/2$  とおきかえれば得られる。特に球かが無限体内に存在する場合は応力関数 [II] で

$$A_0 = -\frac{13-10\nu}{4(7-5\nu)} a^3, \quad A_2 = -\frac{a^3}{2(7-5\nu)}$$

$$A_m = 0 \quad (m \neq 0, 2), \quad B_1 = \frac{5a^3}{4(7-5\nu)}$$

$$B_m = 0 \quad (m \neq 1, \quad m = 0, 2, 3, \dots\dots)$$

とにおいて得られる。応力関数 [III] は半無限体平面の境界条件を満足させるために与えたものである。

**3・2 非軸対称解** 非軸対称解に対する応力関数は境界面における応力が  $\cos 2\theta, \sin 2\theta$  に比例して分布することに注目して 6 個の応力関数  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \lambda_3$  を次のようにおく。

$$[IV] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \sum_{m=2}^{\infty} C_m \frac{P_m^2(\mu)}{R^{m+1}} \cos 2\theta \\ \varphi_1 &= p \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{P_m^1(\mu)}{R^{m+1}} \cos \theta \\ \varphi_2 &= -p \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{P_m^1(\mu)}{R^{m+1}} \sin \theta \\ \varphi_4 &= -p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{D_m}{(m-1)} \frac{P_m^2(\mu)}{R^{m+1}} \cos 2\theta \\ \varphi_3 &= p \sum_{m=2}^{\infty} E_m \frac{P_m^2(\mu)}{R^{m+1}} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$[V] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \int_0^{\infty} \phi_3(\lambda) J_2(\lambda r) e^{-\lambda^2} \cos 2\theta d\lambda \\ \varphi_1 &= p \int_0^{\infty} \phi_4(\lambda) J_1(\lambda r) e^{-\lambda^2} \cos \theta d\lambda \\ \varphi_2 &= -p \int_0^{\infty} \phi_4(\lambda) J_1(\lambda r) e^{-\lambda^2} \sin \theta d\lambda \\ \varphi_3 &= p \int_0^{\infty} \lambda \phi_5(\lambda) J_2(\lambda r) e^{-\lambda^2} \cos 2\theta d\lambda \\ \lambda_3 &= p \int_0^{\infty} \phi_6(\lambda) J_2(\lambda r) e^{-\lambda^2} \sin 2\theta d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで  $C_m, D_m, E_m$  および  $\phi_3(\lambda) \sim \phi_6(\lambda)$  はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数である。特に球かが無限体内に存在する場合は応力関数 [IV] において

$$C_2 = \frac{1}{4} \frac{a^3}{7-5\nu}, \quad C_m = 0 \quad (m \geq 3)$$

$$D_1 = -\frac{5a^3}{4(7-5\nu)}, \quad D_m = E_m = 0 \quad (m \geq 2)$$

とにおいて得られる。応力関数 [V] は半無限体平面の境界条件を満たすために与えられたものである。

まず半無限体平面の境界条件を満足させるために次の数学公式<sup>(6)</sup>

$$\frac{P_m^n(\mu)}{R^{m+1}} = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} \int_0^{\infty} \lambda^m J_n(\lambda r) e^{\lambda^2} d\lambda \quad (z < 0) \dots\dots\dots (12)$$

を用いて応力関数 [IV] を書き直す。

$$\left[ \begin{array}{l} \varphi_0 = p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{C_m(-1)^m}{(m-2)!} \int_0^{\infty} \lambda^m J_2(\lambda r) e^{\lambda z} \cos 2\theta d\lambda \\ \varphi_1 = -p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^m J_1(\lambda r) e^{\lambda z} \cos \theta d\lambda \\ \varphi_2 = p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^m J_1(\lambda r) e^{\lambda z} \sin \theta d\lambda \\ \varphi_4 = -p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{D_m(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^m J_2(\lambda r) e^{\lambda z} \cos 2\theta d\lambda \\ \varphi_3 = p \sum_{m=2}^{\infty} E_m \frac{(-1)^m}{(m-2)!} \int_0^{\infty} \lambda^m J_2(\lambda r) e^{\lambda z} \cos 2\theta d\lambda \quad (z < 0) \end{array} \right] \dots\dots\dots(13)$$

応力関数 [V], [VI] から応力成分を求めて半無限体平面の境界条件を満足させると次のようになる。

$$\left( \frac{\sigma_z}{p \cos 2\theta} \right)_{z=-1} = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{\lambda} \left[ \left\{ \psi_3(\lambda) + \frac{2\nu}{\lambda} \psi_4(\lambda) + (2-2\nu-\lambda)\psi_5(\lambda) + 2\nu D_1 e^{-2\lambda} \right\} J_2(\lambda r) \right. \\ \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{C_m(-1)^m}{(m-2)!} \lambda^m + \frac{2(1-2\nu)D_m(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{(2-2\nu+\lambda)E_m(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-2)!} \right\} \right. \\ \left. \times e^{-2\lambda} J_2(\lambda r) + \left\{ \psi_4(\lambda) + D_1 e^{-2\lambda} \right\} r J_1(\lambda r) \right] d\lambda = 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$- \left( \frac{\tau_{rz}}{p \cos 2\theta} \right)_{z=-1} = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{\lambda} \left[ \left\{ \psi_3(\lambda) + \frac{2\nu}{\lambda} \psi_4(\lambda) + (1-2\nu-\lambda)\psi_5(\lambda) - 2\nu D_1 e^{-2\lambda} \right\} J_2'(\lambda r) \right. \\ \left. - \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ C_m \frac{(-1)^m \lambda^m}{(m-2)!} + 2(1-2\nu) \frac{D_m(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-1)!} - (1-2\nu+\lambda) \frac{E_m(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-2)!} \right\} \right. \\ \left. \times e^{-2\lambda} J_2'(\lambda r) + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{2\nu}{\lambda} \psi_4(\lambda) + \psi_6(\lambda) - 2\nu D_1 e^{-2\lambda} - \sum_{m=2}^{\infty} (1-2\nu) \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{D_m(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-2\lambda} \right\} \frac{2J_2(\lambda r)}{r} + \left\{ -\psi_4(\lambda) + \lambda D_1 e^{-2\lambda} \right\} r J_2(\lambda r) \right] d\lambda = 0 \dots\dots\dots(15)$$

$$\left( \frac{\tau_{\theta z}}{p \sin 2\theta} \right)_{z=-1} = \int_0^{\infty} \lambda e^{\lambda} \left[ \left\{ \psi_3(\lambda) + \frac{2\nu}{\lambda} \psi_4(\lambda) + (1-2\nu-\lambda)\psi_5(\lambda) - 2\nu D_1 e^{-2\lambda} \right\} \frac{2}{r} J_2(\lambda r) \right. \\ \left. - \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{C_m(-1)^m \lambda^m}{(m-2)!} + \frac{2(1-2\nu)D_m(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-1)!} - (1-2\nu+\lambda) E_m \frac{(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-2)!} \right\} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. \times 2 \frac{J_2(\lambda r)}{r} + \lambda \left\{ \frac{2\nu}{\lambda} \psi_4(\lambda) + \psi_6(\lambda) - 2\nu D_1 e^{-2\lambda} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(1-2\nu)D_m(-1)^m}{(m-1)!} \lambda^{m-1} e^{-2\lambda} \right\} J_2'(\lambda r) \right] d\lambda = 0 \dots\dots\dots(16)$$

そこで  $\psi_4(\lambda) = D_1 \lambda e^{-2\lambda}$  .....(17)

と決めて式 (14) にハンケルの逆変換を施せば次のような関係式が得られる。

$$\psi_3(\lambda) + (2-2\nu-\lambda)\psi_5(\lambda) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-2)!} e^{-2\lambda} \left\{ \lambda C_m + \frac{2(1-2\nu)D_m}{(m-1)} \right. \\ \left. - (2-2\nu+\lambda)E_m \right\} + 4\nu D_1 e^{-2\lambda} = - \frac{2D_1}{\lambda e^{\lambda}} I \dots\dots\dots(18)$$

$$\text{ただし } I = \int_0^{\infty} r \left[ \int_0^{\infty} k^3 r J_1(kr) e^{-k} dk \right] J_2(\lambda r) dr \dots\dots\dots(19)$$

である。

ここで数学公式<sup>(6)(7)</sup>

$$\int_0^{\infty} k^3 J_1(kr) e^{-k} dk = 2 \frac{P_3^1(\mu_0)}{R_0^4}, \quad R_0 = \sqrt{1+r^2}, \quad \mu_0 = \frac{1}{R_0} \dots\dots\dots(20)$$

および

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1}}{(x^2+y^2)^{\mu+1}} J_{\nu}(ax) dx = \frac{a^{\mu} y^{\nu-\mu} K_{\nu-\mu}(ay)}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)} \quad \left( 2R_0\mu + \frac{3}{2} > R_0\nu > -1 \right) \dots\dots\dots(21)$$

$$K_{1/2}(z) = K_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \dots\dots\dots(22)$$

を用いると式 (19) の積分が実行できて

$$I = \lambda(\lambda-1)e^{-\lambda} \dots\dots\dots(23)$$

となり式 (18) は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} \phi_3(\lambda) + (2-2\nu-\lambda)\phi_5(\lambda) - 2(1-2\nu-\lambda)D_1e^{-2\lambda} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-2)!} \\ e^{-2\lambda} \times \left\{ \lambda C_m + \frac{2(1-2\nu)D_m}{(m-1)} - (2-2\nu+\lambda)E_m \right\} = 0 \dots\dots(24) \end{aligned}$$

式 (17) を考慮し式 (15) で  $J_2'(\lambda r)$ ,  $J_2(\lambda r)/r$ , 式 (16) で  $J_2(\lambda r)/r$ ,  $J_2'(\lambda r)$  の係数を零に等置するとそれぞれ同じ関係式が得られ以下に示される。

$$\phi_3(\lambda) + (1-2\nu-\lambda)\phi_5(\lambda) - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-2)!} e^{-2\lambda} \left\{ \lambda C_m + \frac{2(1-2\nu)D_m}{(m-1)} - (1-2\nu+\lambda)E_m \right\} = 0 \dots\dots(25)$$

$$\phi_6(\lambda) - (1-2\nu) \sum_{m=2}^{\infty} D_m \frac{(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-2\lambda} = 0 \dots\dots(26)$$

式 (24), (25), (26) より  $\phi_3(\lambda)$ ,  $\phi_5(\lambda)$ ,  $\phi_6(\lambda)$  を求めると

$$\begin{aligned} \phi_3(\lambda) = -2(1-2\nu-\lambda)^2 D_1 e^{-2\lambda} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^{m-1}}{(m-2)!} e^{-2\lambda} \\ \times \left\{ (3-4\nu-2\lambda)\lambda C_m + 2(1-2\nu) \frac{(3-4\nu-2\lambda)}{(m-1)} D_m - [4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda^2] E_m \right\} \dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$\phi_5(\lambda) = 2(1-2\nu-\lambda) D_1 e^{-2\lambda} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^{m-1} e^{-2\lambda}}{(m-2)!} \left\{ 2\lambda C_m + \frac{4(1-2\nu)D_m}{(m-1)} - (3-4\nu+2\lambda)E_m \right\} \dots\dots(28)$$

$$\phi_6(\lambda) = (1-2\nu) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{D_m (-1)^m}{(m-1)!} \lambda^{m-1} e^{-2\lambda} \dots\dots(29)$$

となる。式 (17) および式 (27)~(29) の関係が成立すれば半無限体平面の境界条件が満足される。

次に円柱調和関数と球調和関数の間に<sup>(8)</sup>

$$e^{-\lambda z} J_m(\lambda r) = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(\lambda R)^n}{(n+m)!} P_n^m(\mu) \dots\dots(30)$$

という関係があることに注目して応力関数 [V] を書き直すと

$$[\text{VII}] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= p \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n R^n P_n^2(\mu) \cos 2\theta, & \varphi_1 &= p \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n R^n P_n^1(\mu) \cos \theta, \\ \varphi_2 &= -p \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n R^n P_n^1(\mu) \sin \theta, & \varphi_3 &= p \sum_{n=2}^{\infty} \zeta_n R^n P_n^2(\mu) \cos 2\theta, \\ \lambda_3 &= p \sum_{n=2}^{\infty} \kappa_n R^n P_n^2(\mu) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(31)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= \int_0^{\infty} \phi_3(\lambda) \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} \lambda^n d\lambda, & \eta_n &= \int_0^{\infty} \phi_4(\lambda) \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda^n d\lambda \\ \zeta_n &= \int_0^{\infty} \phi_5(\lambda) \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} \lambda^{n+1} d\lambda, & \kappa_n &= \int_0^{\infty} \phi_6(\lambda) \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} \lambda^n d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots(32)$$

であり、これらの式に式 (17) および式 (27)~(29) を代入し第 2 種オイラーの積分公式<sup>(1)</sup>

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^b dx = \frac{\Gamma(b+1)}{a^{b+1}} \quad (a>0, b>-1) \dots\dots(33)$$

を用いれば  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n, \kappa_n$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} \xi_n &= -2D_1 \left\{ (1-2\nu)^2 \frac{{}^0\gamma_n}{(n+1)(n+2)} + 2(1-2\nu) \frac{{}^0\gamma_{n+1}}{n+2} + {}^0\gamma_{n+2} \right\} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[ \{(3-4\nu)^{m-2} \gamma_{n+2} \right. \\ &\quad \left. + 2(n+3)^{m-2} \gamma_{n+3}\} C_m - \left\{ 2(1-2\nu) \frac{(3-4\nu)^{m-1} \gamma_n}{(n+1)(n+2)} + 4(1-2\nu) \frac{m-1 \gamma_{n+1}}{n+2} \right\} D_m \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 4(1-\nu)(1-2\nu) \frac{m-2 \gamma_{n+1}}{n+2} - 2(n+3)^{m-2} \gamma_{n+3} \right\} E_m \right] \dots\dots(34) \end{aligned}$$

$$\eta_n = D_1 {}^0\gamma_{n+1} \dots\dots(35)$$

$$\begin{aligned} \zeta_n &= -2D_1 \left\{ (1-2\nu) \frac{{}^0\gamma_{n+1}}{n+2} + {}^0\gamma_{n+2} \right\} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[ 2(n+3)^{m-2} \gamma_{n+3} C_m \right. \\ &\quad \left. - 4(1-2\nu) \frac{m-1 \gamma_{n+1}}{n+2} D_m + \{(3-4\nu)^{m-2} \gamma_{n+2} - 2(n+3)^{m-2} \gamma_{n+3}\} E_m \right] \dots\dots(36) \end{aligned}$$

$$\kappa_n = -(1-2\nu) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^{-1} \gamma_n D_m}{(n+1)(n+2)} \dots\dots\dots (37)$$

ここで

$$m \gamma_n = \frac{(-1)^{n+m}}{n! m!} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda} \lambda^{n+m} d\lambda = \frac{(-1)^{n+m} (n+m)!}{n! m! 2^{n+m+1}} \dots\dots\dots (38)$$

である. 応力関数 [IV], [VII] より応力成分を求め以下のルジャンドル陪関数の公式

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi P_n^1 &= \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2] \\ (1-\mu^2) P_n^{1'} &= (n+1) \mu P_n^1 - n P_{n+1}^1 = (n+1) P_{n-1}^1 - n \mu P_n^1 = \sin \varphi P_n^2 - \mu P_n^1 \\ \mu P_n^{1'} &= \frac{\mu P_n^2}{\sin \varphi} + P_n^1 - \frac{P_n^1}{1-\mu^2}, \quad \mu P_n^1 = \frac{\sin \varphi}{2(2n+1)} [P_{n-1}^{2'} - P_{n+1}^{2'} + (2n+1) P_n^2] \\ \mu P_n^2 &= \frac{n-1}{2n+1} P_{n+1}^2 + \frac{n+2}{2n+1} P_{n-1}^2, \quad \mu P_n^{2'} = \frac{n-1}{2n+1} P_{n+1}^{2'} + \frac{n+2}{2n+1} P_{n-1}^{2'} - P_n^2 \\ (1-\mu^2) P_n^{2'} &= (n+1) \mu P_n^2 - (n-1) P_{n+1}^2 = (n+2) P_{n-1}^2 - n \mu P_n^2 \\ \frac{4 P_n^2}{1-\mu^2} &= (n+1)^2 P_n^2 + (n+1) \mu P_n^{2'} - (n-1) P_{n+1}^{2'} = n^2 P_n^2 - n \mu P_n^{2'} + (n+2) P_{n-1}^{2'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

を用い球か面の境界条件を書き直せば次のようになる.

$$\left( \frac{\sigma_R}{p \cos 2\theta} \right)_{R=a} = \frac{2}{3} (5-\nu) \frac{D_1}{a^3} P_2^2(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+1)(n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} - 2 \frac{(1-2\nu)(n+2)}{n} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} \right. \\ + \frac{n-2}{2n-1} \{n(n+3)-2\nu\} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} + (n+2) \frac{(n+3)}{2n+3} (n+5-4\nu) \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} + n(n-1) \xi_n a^{n-2} \\ + (n-1) \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} \eta_{n-1} a^{n-2} - \frac{(n+1)(n-2)-2\nu}{2n+3} \eta_{n+1} a^n + (n-1) \frac{(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \\ \left. \times \zeta_{n-1} a^{n-2} + (n+3) \frac{(n+1)(n-2)-2\nu}{2n+3} \zeta_{n+1} a^n + 4(n-1) \kappa_n a^{n-2} \right] P_n^2(\mu) = -\frac{P_2^2(\mu)}{6} \dots\dots\dots (40)$$

$$\left( \frac{\tau_{R\varphi}}{p \cos 2\theta \sin \varphi} \right)_{R=a} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(1-2\nu)(n-3)(n+2)}{2n(2n+3)} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} \right. \\ + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} - (n-1) \xi_n a^{n-2} + \frac{(1-\nu)n}{2n-1} \eta_{n-1} a^{n-2} \\ - \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} \eta_{n+1} a^n - (n-2) \frac{(n-3+2\nu)}{2n-1} \zeta_{n-1} a^{n-2} - (n+3) \frac{(n-1+2\nu)}{2n+3} \zeta_{n+1} a^n \\ - \left\{ n(n-2)+4 - \frac{(n-2)^2(n+2)}{2n-1} \right\} \frac{\kappa_n}{2} a^{n-2} + \frac{n(n+3)(n+4)}{2(2n+3)} \kappa_{n+2} a^n \left. \right] P_n^{2'}(\mu) \\ - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+3-4\nu)}{2(2n+1)} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} P_n^{2'}(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{(1-2\nu)(n+1)(n+2)}{2(n-1)} \frac{D_n}{a^{n+2}} - 2(1-\nu)(n+2) \frac{E_n}{a^{n+2}} \right. \\ \left. - (1-\nu)(n-1) \eta_n a^{n-1} + 2(1-\nu)(n-1) \zeta_n a^{n-1} + \frac{n(n-1)(n+3)}{2} \kappa_{n+1} a^{n-1} \right] P_n^2(\mu) = \frac{P_2^{2'}}{12}(\mu) \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\tau_{R\theta} \sin \varphi}{p \sin 2\theta} \right)_{R=a} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n+1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(1-2\nu)(n-3)(n+2)}{2n(2n+3)} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} \right. \\ + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} - (n-1) \xi_n a^{n-2} + \frac{(1-\nu)n}{2n-1} \eta_{n-1} a^{n-2} \\ - \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} \eta_{n+1} a^n - \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} \zeta_{n-1} a^{n-2} - \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} \zeta_{n+1} a^n \\ - \left\{ n(n-2)+4 - \frac{(n-2)^2(n+2)}{2n-1} \right\} \frac{\kappa_n}{2} a^{n-2} + \frac{n(n+3)(n+4)}{2(2n+3)} \kappa_{n+2} a^n \left. \right] P_n^2(\mu) \\ - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+3-4\nu)}{2(2n-1)} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} P_n^2(\mu) = \frac{P_2^2(\mu)}{12} \dots\dots\dots (42)$$

式 (40) で  $P_n^2(\mu)$ , 式 (41) で  $P_n^{2'}(\mu)$ ,  $P_n^2(\mu)$ , 式 (42) で  $P_n^2(\mu)$  の係数をそれぞれ零に等置すれば  $C_n, D_n, E_n$  に関する無限連立一次方程式が得られる. この場合式 (41) で  $P_n^{2'}(\mu)$  の係数を零に等置して得ら

れる係数方程式は式 (42) で  $P_n^2(\mu)$  の係数を零に等置した式と同一である。これらを  $C_n, D_n, E_n$  について解けば非軸対称解は完全に決まる。そして全体の変位および応力は応力関数 [I]~[V] を重ね合わせて得られる。

4. 数 値 計 算

ポアソン比  $\nu=0.25$  とし球か半径が  $a=0.2, 0.4,$

0.6, 0.7, 0.8, 0.9 の場合について数値計算を行った。軸対称解に対する  $A_n, B_n$  の値は既報<sup>(1)</sup>で示された  $A_n, B_n$  の値の 1/2 に等しい。すべての無限級数の収束は良好であるが球か半径  $a$  が大きくなるにつれてしだいに収束が悪くなるから最終の応力値が有効数字 3 けた以上になるように  $C_n, D_n, E_n$  をそれぞれ 12~50 項で打ち切って連立一次方程式を解いた。  $C_n, D_n, E_n$  および  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n, \kappa_n$  の値は収束の悪い  $a=0.8$  の場合について表 1 に示した。球か面上の応力  $\sigma_\varphi$  は

$$\left(\frac{\sigma_\varphi}{p}\right)_{R=a} = \frac{1}{6} (P_0+2P_2) + \frac{1}{6} (P_0+2P_2) \cos 2\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{a^{n+3}} \{-(n+1)(n+2)P_n + P_{n+1}'\} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+2}} \frac{1}{2n+1} [(n+1)\{(n+1)(n-2) + (3-2\nu)\}P_{n+1} + n(n+1)(n+4-4\nu)P_{n-1} \\ - (2n+1)P_n'] + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a^{n-2} \{-(n^2+n+1)P_n + P_{n+1}'\} - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{a^{n-1}}{2n+1} \{n(n^2+3n+3-2\nu)P_{n-1} \\ + n(n+1)(n-3+4\nu)P_{n+1} - (2n+1)P_n'\} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{a^{n+3}} \left\{ \mu P_n^{2'} - (n+1)^2 P_n^2 + \frac{4}{1-\mu^2} P_n^2 \right\} \cos 2\theta \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{a^{n+2}} \left[ \sin \varphi \{-(n+1)(n+1-2\nu)P_n^1 + (3-2\nu)\mu P_n^{1'}\} + (1+2\nu) \frac{P_n^1}{\sin \varphi} \right] \cos 2\theta \\ - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D_n}{a^{n+2}} \frac{1}{n-1} \{(n+1)(n-3+4\nu)\mu P_n^2 - (n-1)(n-2+2\nu)P_{n+1}^2\} \cos 2\theta$$

表 1 係数の値 (その 1)

$a=0.8$

$n$	$C_n$	$D_n$	$E_n$
1	—	-0.118 253 630 4	—
2	0.160 092 992 2×10 <sup>-1</sup>	0.879 019 182 6×10 <sup>-2</sup>	0.437 539 623 2×10 <sup>-2</sup>
3	-0.612 631 558 6×10 <sup>-3</sup>	-0.301 393 759 5×10 <sup>-2</sup>	-0.994 697 117 1×10 <sup>-3</sup>
4	0.196 027 341 2×10 <sup>-3</sup>	0.959 917 374 1×10 <sup>-3</sup>	0.260 803 838 4×10 <sup>-3</sup>
5	-0.600 044 724 5×10 <sup>-4</sup>	-0.297 712 416 8×10 <sup>-3</sup>	-0.712 373 071 1×10 <sup>-4</sup>
6	0.179 985 695 9×10 <sup>-4</sup>	0.920 754 043 6×10 <sup>-4</sup>	0.199 240 399 0×10 <sup>-4</sup>
7	-0.537 954 347 9×10 <sup>-5</sup>	-0.288 215 324 2×10 <sup>-4</sup>	-0.570 623 585 7×10 <sup>-5</sup>
8	0.162 393 076 5×10 <sup>-5</sup>	0.922 095 703 7×10 <sup>-5</sup>	0.168 258 773 9×10 <sup>-5</sup>
9	-0.500 819 085 3×10 <sup>-6</sup>	-0.303 190 570 3×10 <sup>-5</sup>	-0.514 083 474 7×10 <sup>-6</sup>
10	0.159 184 681 5×10 <sup>-6</sup>	0.102 592 933 3×10 <sup>-5</sup>	0.163 460 635 8×10 <sup>-6</sup>
11	-0.523 952 590 8×10 <sup>-7</sup>	-0.356 452 571 0×10 <sup>-6</sup>	-0.541 084 474 2×10 <sup>-7</sup>
12	0.178 569 588 4×10 <sup>-7</sup>	0.126 578 356 5×10 <sup>-6</sup>	0.185 706 960 9×10 <sup>-7</sup>
13	-0.627 399 951 0×10 <sup>-8</sup>	-0.456 854 049 1×10 <sup>-7</sup>	-0.656 132 095 9×10 <sup>-8</sup>
14	0.225 682 194 4×10 <sup>-8</sup>	0.166 702 978 5×10 <sup>-7</sup>	0.236 687 472 3×10 <sup>-8</sup>
15	-0.824 948 686 8×10 <sup>-9</sup>	-0.612 255 447 2×10 <sup>-8</sup>	-0.865 111 530 3×10 <sup>-9</sup>
16	0.304 417 573 1×10 <sup>-9</sup>	0.225 581 834 9×10 <sup>-8</sup>	0.318 443 580 9×10 <sup>-9</sup>
17	-0.112 826 105 7×10 <sup>-9</sup>	-0.831 910 551 8×10 <sup>-9</sup>	-0.117 530 177 9×10 <sup>-9</sup>
18	0.418 505 677 0×10 <sup>-10</sup>	0.306 658 476 7×10 <sup>-9</sup>	0.433 684 674 8×10 <sup>-10</sup>
19	-0.155 014 852 8×10 <sup>-10</sup>	-0.112 913 527 5×10 <sup>-9</sup>	-0.159 726 701 2×10 <sup>-10</sup>
20	0.572 662 949 4×10 <sup>-11</sup>	0.415 225 435 2×10 <sup>-10</sup>	0.586 701 274 4×10 <sup>-11</sup>
21	-0.210 902 482 6×10 <sup>-11</sup>	-0.152 535 490 8×10 <sup>-10</sup>	-0.214 896 743 1×10 <sup>-11</sup>
22	0.774 396 781 5×10 <sup>-12</sup>	0.560 054 698 1×10 <sup>-11</sup>	0.785 155 362 6×10 <sup>-12</sup>
23	-0.283 636 072 3×10 <sup>-12</sup>	-0.205 670 479 0×10 <sup>-11</sup>	-0.286 340 127 8×10 <sup>-12</sup>
24	0.103 710 076 5×10 <sup>-12</sup>	0.756 068 996 5×10 <sup>-12</sup>	0.104 329 580 4×10 <sup>-12</sup>
25	-0.378 950 846 8×10 <sup>-13</sup>	-0.278 481 154 5×10 <sup>-12</sup>	-0.380 198 084 6×10 <sup>-13</sup>
26	0.138 534 109 2×10 <sup>-13</sup>	0.102 867 674 8×10 <sup>-12</sup>	0.138 746 985 9×10 <sup>-13</sup>
27	-0.507 335 807 7×10 <sup>-14</sup>	-0.381 415 121 2×10 <sup>-13</sup>	-0.507 705 494 4×10 <sup>-14</sup>
28	0.186 367 130 6×10 <sup>-14</sup>	0.142 069 357 5×10 <sup>-13</sup>	0.186 525 937 0×10 <sup>-14</sup>
29	-0.687 599 076 3×10 <sup>-15</sup>	-0.531 953 546 9×10 <sup>-14</sup>	-0.688 872 431 3×10 <sup>-15</sup>
30	0.255 096 686 8×10 <sup>-15</sup>	0.200 321 422 1×10 <sup>-14</sup>	0.256 022 618 6×10 <sup>-15</sup>
31	-0.952 598 542 0×10 <sup>-16</sup>	-0.758 895 118 2×10 <sup>-15</sup>	-0.958 357 004 2×10 <sup>-16</sup>
32	0.358 321 277 0×10 <sup>-16</sup>	0.289 243 162 1×10 <sup>-15</sup>	0.361 518 062 3×10 <sup>-16</sup>
33	-0.135 825 750 3×10 <sup>-16</sup>	-0.110 893 631 0×10 <sup>-15</sup>	-0.137 463 917 7×10 <sup>-16</sup>
34	0.518 900 188 8×10 <sup>-17</sup>	0.427 529 535 6×10 <sup>-16</sup>	0.526 818 177 4×10 <sup>-17</sup>
35	-0.199 747 791 4×10 <sup>-17</sup>	-0.165 664 418 1×10 <sup>-16</sup>	-0.203 408 532 2×10 <sup>-17</sup>
36	0.774 382 707 5×10 <sup>-18</sup>	0.644 815 295 4×10 <sup>-17</sup>	0.790 724 945 0×10 <sup>-18</sup>
37	-0.302 123 623 6×10 <sup>-18</sup>	-0.251 938 357 5×10 <sup>-17</sup>	-0.309 214 315 7×10 <sup>-18</sup>
38	0.118 517 132 0×10 <sup>-18</sup>	0.987 424 553 4×10 <sup>-18</sup>	0.121 521 390 0×10 <sup>-18</sup>
39	-0.458 436 354 5×10 <sup>-19</sup>	-0.387 939 997 8×10 <sup>-18</sup>	-0.479 476 675 7×10 <sup>-19</sup>
40	0.126 491 838 9×10 <sup>-19</sup>	0.143 852 070 3×10 <sup>-18</sup>	0.174 273 493 9×10 <sup>-19</sup>
41	-0.520 095 963 6×10 <sup>-20</sup>	—	0.300 394 344 3×10 <sup>-20</sup>

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{E_n}{a^{n+2}} \left[ P_n^{2\nu} - \frac{(n+1)(n+2)(n+4-4\nu)}{2n+1} P_{n-1}^{2\nu} - (n-1) \frac{\{n(n-1)+1-2\nu\}}{2n+1} P_{n+1}^{2\nu} \right. \\
 & + \left. \frac{4\mu}{1-\mu^2} P_n^2 \right] \cos 2\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n a^{n-2} \left\{ \left( \frac{4}{1-\mu^2} - n^2 \right) P_n^2 + \mu P_n^{2\nu} \right\} \cos 2\theta \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a^{n-1} \left[ \sin \varphi \{ -n(n+2\nu) P_n^{1+\nu} + (3-2\nu) \mu P_n^{1'} \} + (1+2\nu) \frac{P_n^1}{\sin \varphi} \right] \cos 2\theta \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \zeta_n a^{n-1} \left[ P_n^{2\nu} - \frac{(n-1)n(n-3+4\nu)}{2n+1} - \frac{(n+2)}{2n+1} \{ (n+1)(n+2)+1-2\nu \} P_{n-1}^{2\nu} \right. \\
 & + \left. \frac{4\mu}{1-\mu^2} P_n^2 \right] \cos 2\theta - \sum_{n=2}^{\infty} 4\kappa_n a^{n-2} \left\{ \mu P_n^{2\nu} + \frac{\mu^2}{1-\mu^2} P_n^2 \right\} \cos 2\theta \dots\dots\dots(43)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_n &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \{ (3-4\nu)^m \gamma_n + 2(m+1)^{m+1} \gamma_n \} A_m + \left\{ 4(1-\nu)(1-2\nu) \frac{m \gamma_n}{m+1} - 2(m+1)^{m+1} \gamma_n B_m \right\} \right] \\
 \beta_n &= \sum_{m=0}^{\infty} [ 2(m+1)^{m+1} \gamma_n A_m + \{ (3-4\nu)^m \gamma_n - 2(m+1)^{m+1} \gamma_n \} B_m ], \quad B_0 = 0
 \end{aligned} \right\} \dots(44)$$

与えられ  $\theta=0$  の場合は図2に示される. すなわち球かの頂点  $\varphi=0^\circ, 180^\circ$  において引張応力は極大になり  $\varphi=90^\circ$  で圧縮応力は極大となる. そして  $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$  までは  $\sigma_\varphi$  は球かの大きさにほとんど影響されないが,  $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$  においては球かの大きさにかなり影響される.

球か面における応力  $\sigma_\theta$  は

表 1 係数の値 (その2)

$a=0.8$

$n$	$\xi_n$	$\eta_n$	$\zeta_n$	$\kappa_n$
1	—	—	—	—
2	0.325 081 143 $1 \times 10^{-2}$	-0.147 817 038 $0 \times 10^{-1}$	0.360 274 506 $0 \times 10^{-2}$	0.100 320 290 $5 \times 10^{-3}$
3	-0.171 143 339 $7 \times 10^{-2}$	0.739 085 190 $0 \times 10^{-2}$	-0.185 182 878 $4 \times 10^{-2}$	-0.443 381 178 $6 \times 10^{-4}$
4	0.877 602 115 $0 \times 10^{-3}$	-0.369 542 595 $0 \times 10^{-2}$	0.927 579 504 $0 \times 10^{-3}$	0.204 523 545 $9 \times 10^{-4}$
5	-0.443 454 643 $8 \times 10^{-3}$	0.184 771 297 $5 \times 10^{-2}$	-0.459 951 740 $5 \times 10^{-3}$	-0.972 256 699 $3 \times 10^{-5}$
6	0.222 684 056 $6 \times 10^{-3}$	-0.923 856 487 $5 \times 10^{-3}$	0.227 661 578 $4 \times 10^{-3}$	0.472 714 419 $6 \times 10^{-5}$
7	-0.111 800 744 $6 \times 10^{-3}$	0.461 928 243 $7 \times 10^{-3}$	-0.113 098 936 $8 \times 10^{-3}$	-0.233 921 485 $7 \times 10^{-5}$
8	0.563 803 160 $8 \times 10^{-4}$	-0.230 964 121 $8 \times 10^{-3}$	0.566 271 903 $6 \times 10^{-4}$	0.117 419 212 $9 \times 10^{-5}$
9	-0.286 650 199 $3 \times 10^{-4}$	0.115 482 060 $9 \times 10^{-3}$	-0.286 712 087 $3 \times 10^{-4}$	-0.596 437 643 $1 \times 10^{-6}$
10	0.147 370 808 $7 \times 10^{-4}$	-0.577 410 304 $6 \times 10^{-4}$	0.147 186 655 $0 \times 10^{-4}$	0.306 039 082 $1 \times 10^{-6}$
11	-0.767 844 800 $4 \times 10^{-5}$	0.288 705 152 $3 \times 10^{-4}$	-0.767 533 182 $7 \times 10^{-5}$	-0.158 411 783 $4 \times 10^{-6}$
12	0.406 025 128 $5 \times 10^{-5}$	-0.144 352 576 $1 \times 10^{-4}$	0.406 959 784 $4 \times 10^{-5}$	0.826 302 264 $2 \times 10^{-7}$
13	-0.218 017 726 $0 \times 10^{-5}$	0.721 762 880 $8 \times 10^{-5}$	-0.219 406 995 $3 \times 10^{-5}$	-0.433 977 487 $7 \times 10^{-7}$
14	0.118 843 034 $3 \times 10^{-5}$	-0.360 881 440 $4 \times 10^{-5}$	0.120 183 901 $4 \times 10^{-5}$	0.229 339 025 $9 \times 10^{-7}$
15	-0.657 019 974 $7 \times 10^{-6}$	0.180 440 720 $2 \times 10^{-5}$	-0.667 888 194 $6 \times 10^{-6}$	-0.121 879 300 $5 \times 10^{-7}$
16	0.367 847 436 $0 \times 10^{-6}$	-0.902 203 601 $0 \times 10^{-6}$	0.375 843 042 $7 \times 10^{-6}$	0.651 062 887 $5 \times 10^{-8}$
17	-0.208 200 208 $3 \times 10^{-6}$	0.451 101 800 $5 \times 10^{-6}$	-0.213 729 935 $9 \times 10^{-6}$	-0.349 453 170 $9 \times 10^{-8}$
18	0.118 912 382 $0 \times 10^{-6}$	-0.225 550 900 $2 \times 10^{-6}$	0.122 576 924 $1 \times 10^{-6}$	0.188 402 175 $6 \times 10^{-8}$
19	-0.684 150 647 $1 \times 10^{-7}$	0.112 775 450 $1 \times 10^{-6}$	-0.707 693 832 $6 \times 10^{-7}$	-0.101 998 162 $3 \times 10^{-8}$
20	0.395 899 303 $6 \times 10^{-7}$	-0.563 877 250 $6 \times 10^{-7}$	0.410 675 998 $9 \times 10^{-7}$	0.554 375 300 $8 \times 10^{-9}$
21	-0.230 123 972 $7 \times 10^{-7}$	0.281 938 625 $3 \times 10^{-7}$	-0.239 233 221 $6 \times 10^{-7}$	-0.302 433 594 $1 \times 10^{-9}$
22	0.134 224 205 $6 \times 10^{-7}$	-0.140 969 312 $6 \times 10^{-7}$	0.139 761 234 $7 \times 10^{-7}$	0.165 573 913 $8 \times 10^{-9}$
23	-0.784 956 926 $0 \times 10^{-8}$	0.704 846 563 $3 \times 10^{-8}$	-0.818 241 417 $0 \times 10^{-8}$	-0.909 536 717 $7 \times 10^{-10}$
24	0.459 997 728 $3 \times 10^{-8}$	-0.352 423 281 $6 \times 10^{-8}$	0.479 830 216 $3 \times 10^{-8}$	0.501 249 254 $0 \times 10^{-10}$
25	-0.270 016 152 $4 \times 10^{-8}$	0.176 211 640 $8 \times 10^{-8}$	-0.281 751 138 $6 \times 10^{-8}$	-0.277 100 871 $6 \times 10^{-10}$
26	0.158 724 207 $3 \times 10^{-8}$	-0.881 058 204 $1 \times 10^{-9}$	0.165 629 997 $2 \times 10^{-8}$	0.153 646 895 $9 \times 10^{-10}$
27	-0.934 250 414 $0 \times 10^{-9}$	0.440 529 102 $0 \times 10^{-9}$	-0.974 718 909 $4 \times 10^{-9}$	-0.854 411 804 $0 \times 10^{-11}$
28	0.550 601 584 $5 \times 10^{-9}$	-0.220 264 551 $0 \times 10^{-9}$	0.574 242 204 $3 \times 10^{-9}$	0.476 461 666 $5 \times 10^{-11}$
29	-0.324 924 405 $3 \times 10^{-9}$	0.110 132 275 $5 \times 10^{-9}$	-0.338 704 088 $0 \times 10^{-9}$	-0.266 421 304 $8 \times 10^{-11}$
30	0.192 014 903 $6 \times 10^{-9}$	-0.550 661 377 $6 \times 10^{-10}$	0.200 035 490 $9 \times 10^{-9}$	0.149 367 414 $2 \times 10^{-11}$
31	-0.113 643 588 $1 \times 10^{-9}$	0.275 330 688 $8 \times 10^{-10}$	-0.118 308 719 $5 \times 10^{-9}$	-0.839 569 317 $7 \times 10^{-12}$
32	0.673 702 558 $0 \times 10^{-10}$	-0.137 665 344 $4 \times 10^{-10}$	0.700 834 349 $9 \times 10^{-10}$	0.473 086 624 $1 \times 10^{-12}$
33	-0.400 093 428 $5 \times 10^{-10}$	0.688 326 722 $0 \times 10^{-11}$	-0.415 879 786 $6 \times 10^{-10}$	-0.267 226 322 $8 \times 10^{-12}$
34	0.238 055 238 $4 \times 10^{-10}$	-0.344 163 361 $0 \times 10^{-11}$	0.247 248 608 $7 \times 10^{-10}$	0.151 301 908 $4 \times 10^{-12}$
35	-0.141 926 416 $2 \times 10^{-10}$	0.172 081 680 $5 \times 10^{-11}$	-0.147 287 190 $1 \times 10^{-10}$	-0.858 636 167 $1 \times 10^{-13}$
36	0.847 918 720 $9 \times 10^{-11}$	-0.860 408 402 $5 \times 10^{-12}$	0.879 228 651 $4 \times 10^{-11}$	0.488 367 982 $2 \times 10^{-13}$
37	-0.507 662 875 $7 \times 10^{-11}$	0.430 204 201 $2 \times 10^{-12}$	-0.525 984 028 $4 \times 10^{-11}$	-0.278 376 466 $0 \times 10^{-13}$
38	0.304 606 191 $6 \times 10^{-11}$	-0.215 102 100 $6 \times 10^{-12}$	0.315 349 227 $6 \times 10^{-11}$	0.159 015 549 $6 \times 10^{-13}$
39	-0.183 165 189 $6 \times 10^{-11}$	0.107 551 050 $3 \times 10^{-12}$	-0.189 478 638 $5 \times 10^{-11}$	-0.910 213 025 $4 \times 10^{-14}$
40	0.110 375 780 $2 \times 10^{-11}$	-0.537 755 251 $5 \times 10^{-13}$	0.114 094 636 $5 \times 10^{-11}$	0.522 056 657 $4 \times 10^{-14}$
41	-0.666 507 005 $0 \times 10^{-12}$	0.268 877 625 $7 \times 10^{-13}$	-0.688 463 877 $4 \times 10^{-12}$	-0.300 011 720 $4 \times 10^{-14}$



$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sigma_\theta}{p}\right)_{R=a} = & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_{n+1}'}{a^{n+3}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+2}} \{ (1-2\nu)(n+1)P_{n+1} + P_n' \} \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a^{n-2} P_{n-1}' + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a^{n-1} \{ -P_n' + (1-2\nu)nP_{n-1} \} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{a^{n+3}} \left\{ \left( \frac{4}{1-\mu^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + n+1 \right) P_n^2 + \mu P_n^{2'} \right\} \cos 2\theta - (1-2\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{a^{n+2}} \left[ \sin \varphi \{ (n+1)P_n^1 + \mu P_n^{1'} \} - \frac{P_n^1}{\sin \varphi} \right] \cos 2\theta \\
 & + (1-2\nu) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D_n}{a^{n+2}} P_{n+1}^2 \cos 2\theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{E_n}{a^{n+2}} \left\{ P_n^{2'} + (1-2\nu)(n-1)P_{n+1}^2 + \frac{4\mu}{1-\mu^2} P_n^2 \right\} \cos 2\theta \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n a^{n-2} \left\{ \left( \frac{4}{1-\mu^2} - n \right) P_n^2 + \mu P_n^{2'} \right\} \cos 2\theta + (1-2\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a^{n-1} \left\{ \sin \varphi (nP_n^1 - \mu P_n^{1'}) \right. \\
 & \left. + \frac{P_n^1}{\sin \varphi} \right\} \cos 2\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \zeta_n a^{n-1} \left\{ (1-2\nu)n\mu P_n^2 - P_n^{2'} + (1-2\nu)(1-\mu^2)P_n^{2'} - \frac{4\mu}{1-\mu^2} P_n^2 \right\} \cos 2\theta \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} 4\kappa_n a^{n-2} \left\{ -nP_n^2 + \mu P_n^{2'} + \frac{P_n^2}{1-\mu^2} \right\} \cos 2\theta \dots\dots\dots (45)
 \end{aligned}$$

で与えられ  $\theta=0$  における  $\sigma_\theta$  の分布が図 3 に示される。  $0^\circ, 180^\circ$  付近を除くと  $\sigma_\theta$  は圧縮応力であり  $90^\circ$  付近で極大となる。そして  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  においては球か半径にほとんど影響されない。

また  $\theta=\pi/2$  における  $\sigma_\theta$  の分布が図 4 に示され

る。この場合  $\sigma_\theta$  は引張応力であり、  $0^\circ \leq \varphi < 120^\circ$  ではほぼ一定で球か半径にほとんど影響されないが  $\varphi > 120^\circ$  では球か半径によってかなり変化する。これに対して軸対称荷重が作用する場合には  $\sigma_\theta$  はすべての場所で引張応力となり  $\varphi=90^\circ$  付近で最小となった。  
 $z$  軸上においては  $\sigma_1$  を軸対称部分、  $\sigma_2$  を非軸対称部分とすれば

$$\left(\frac{\sigma_r}{p}\right)_{r=0} = \sigma_1 + \sigma_2 \cos 2\theta \dots\dots\dots (46)$$

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{p}\right)_{r=0} = \sigma_1 - \sigma_2 \cos 2\theta \dots\dots\dots (47)$$

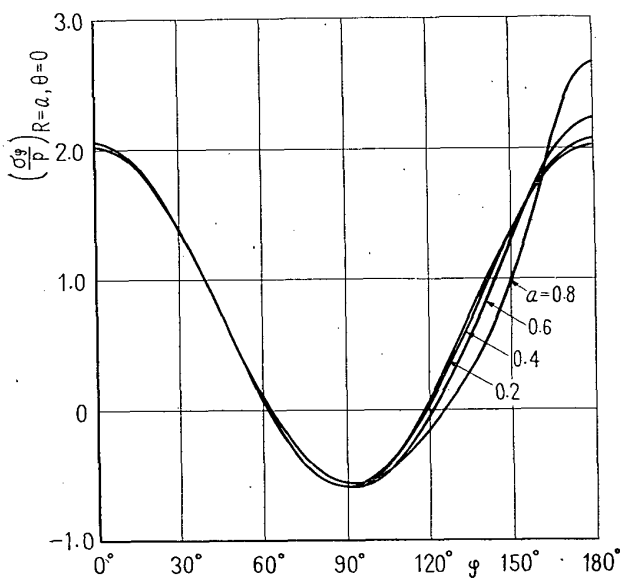


図 2 球か面の  $\sigma_\varphi$  の分布 ( $\theta=0$ )

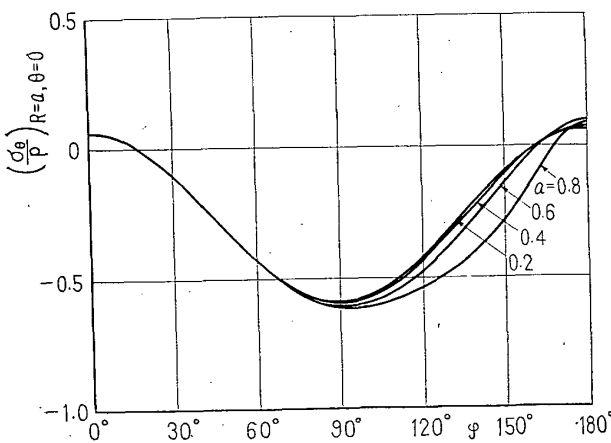


図 3 球か面の  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=0$ )

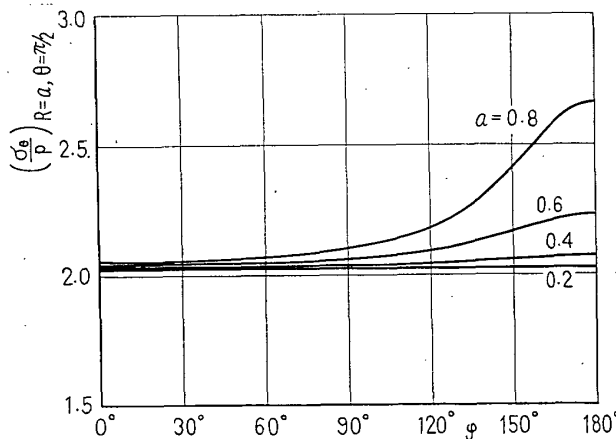


図 4 球か面の  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=\pi/2$ )

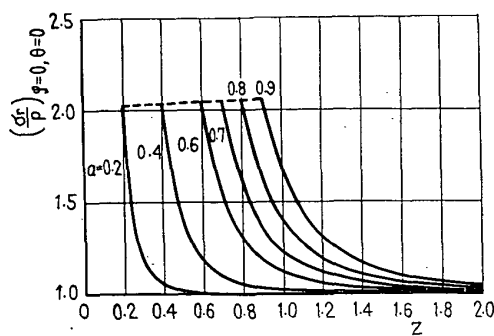


図 5  $z$  軸上の  $\sigma_r$  の分布 ( $\varphi=0, \theta=0$ )

で表されるから  $\sigma_r$  のみを示すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sigma_r}{p}\right)_{\varphi=0} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+3}} \frac{n+1}{2} \{(n+2)A_n + z(n+2-4\nu)B_n\} \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{(z+2)^{n+3}} A_n \left\{ -\frac{3+4\nu}{2} + \frac{n+3}{z+2} + (n+3) \frac{z}{(n+2)} \right\} \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{(z+2)^{n+3}} B_n \left\{ -2(1-\nu)(1-2\nu) + \frac{(n+2)(n+3)}{(z+2)^2} - (3-4\nu)2\nu \right. \\
 &- 4\nu \frac{(n+2)}{z+2} + \frac{(3-4\nu)(n+2)}{2} \frac{z}{z+2} + z \frac{(n+2)(n+3)}{(z+2)^2} \left. \right\} - 2(1-2\nu) \frac{D_1}{z^3} \cos 2\theta \\
 &- \frac{2D_1}{(z+2)^3} \left\{ 6 \frac{(z+1)}{(z+2)^2} - \nu(1-2\nu) \right\} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{z^{n+3}} \left\{ C_n - 4(1-2\nu) \right. \\
 &\times \frac{z}{(n+2)(n-1)} D_n + zE_n \left. \right\} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} C_n \frac{(-1)^n}{(z+2)^{n+3}} (n-1)n(n+1)(n+2) \\
 &\times \left\{ -2 \frac{(z+1)(n+3)}{z+2} + (3-4\nu) \right\} \cos 2\theta - (1-2\nu) \sum_{n=2}^{\infty} D_n (-1)^n \frac{n(n+1)}{(z+2)^{n+2}} \\
 &\times \left\{ \frac{z+1}{z+2} (n+2) - 2(1-\nu) \right\} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} E_n (-1)^n \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(z+2)^{n+3}} \\
 &\times \left\{ 2(n+3) \frac{z+1}{z+2} + (3-4\nu)z - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)(z+2)}{n+2} \right\} \cos 2\theta \dots \dots \dots (48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sigma_r}{p}\right)_{\varphi=\pi} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{|z|^{n+3}} \frac{n+1}{2} \{(n+2)A_n - |z|(n+2-4\nu)B_n\} \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{(z+2)^{n+3}} \left\{ -\frac{3+4\nu}{2} + \frac{n+3}{2-|z|} - (n+3) \frac{|z|}{2-|z|} \right\} \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^{n+1} \frac{n+1}{(2-|z|)^{n+3}} \left\{ -2(1-\nu)(1-2\nu) + \frac{(n+2)(n+3)}{(2-|z|)^2} - (3-4\nu)2\nu \right. \\
 &- 4\nu \frac{(n+2)}{2-|z|} - \frac{(3-4\nu)}{2} (n+2) \frac{|z|}{2-|z|} - |z| \frac{(n+2)(n+3)}{(2-|z|)^2} \left. \right\} - 2(1-2\nu) \frac{D_1}{|z|^3} \cos 2\theta \\
 &- \frac{2D_1}{(2-|z|)^3} \left\{ 6 \frac{(1-|z|)}{(2-|z|)^2} - \nu(1-2\nu) \right\} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{|z|^{n+3}} \\
 &\times \left\{ C_n + \frac{4(1-2\nu)|z|D_n}{(n+2)(n-1)} - |z|E_n \right\} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} C_n (-1)^n \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(2-|z|)^{n+3}} \\
 &\times \left\{ -2 \frac{(1-|z|)(n+3)}{(2-|z|)} + (3-4\nu) \right\} \cos 2\theta - (1-2\nu) \sum_{n=2}^{\infty} D_n (-1)^n \frac{n(n+1)}{(2-|z|)^{n+2}} \\
 &\times \left\{ \frac{(1-|z|)}{2-|z|} (n+2) - 2(1-\nu) \right\} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} E_n (-1)^n \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(2-|z|)^{n+3}} \\
 &\times \left\{ 2 \frac{(1-|z|)}{2-|z|} (n+3) - (3-4\nu)|z| - 4 \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{n+2} (2-|z|) \right\} \cos 2\theta \dots \dots \dots (49)
 \end{aligned}$$

$\theta=0$  における  $z$  軸上の応力  $\sigma_r$  を  $\varphi=0$  および  $\varphi=\pi$  の場合についてそれぞれ図 5, 6 に示してある。

平面境界から最も遠い球か面上の頂点 B の応力は平面境界の影響をあまりうけない。平面境界にもっとも近い球か面上の頂点 A において  $(\sigma_r)_{R=a, \theta=0, \varphi=\pi}$  が最大の引張応力となる。平面境界における応力  $\sigma_r$  は

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sigma_r}{p}\right)_{z=-1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^n \left\{ 4 \frac{(1-\nu)}{r} \frac{P_{n+1}^1(\mu_0)}{R_0^{n+2}} - 4(n+1)(n+2) \frac{P_{n+2}(\mu_0)}{R_0^{n+3}} \right\} \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n \left\{ -\frac{4(1-\nu)}{r} \frac{P_{n+1}^1(\mu_0)}{R_0^{n+2}} + 4(n+1)(n+2) \frac{P_{n+2}(\mu_0)}{R_0^{n+3}} \right. \\
 &+ 4\nu(1-2\nu)(n+2) \frac{P_{n+1}(\mu_0)}{R_0^{n+2}} - 4 \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{r} \frac{1}{n} \frac{P_n^1(\mu_0)}{R_0^{n+1}} \left. \right\} - D_1 \left\{ \frac{2(1-2\nu)(1+2\nu)}{r} \frac{P_1^1(\mu_0)}{R_0^2} \right. \\
 &+ \frac{2(1-2\nu)}{r} \frac{P_2^1(\mu_0)}{R_0^3} + 4r \frac{P_3^1(\mu_0)}{R_0^4} - 8(1-\nu) \frac{P_2^2(\mu_0)}{R_0^3} + 2 \frac{P_3^2(\mu_0)}{R_0^4} - 12 \frac{(1-2\nu)}{r} \\
 &\times \left( -\frac{1}{r^2} \frac{3}{R_0} + \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{R_0^3} \right) + 12 \frac{(1-2\nu)^2}{r^2} \frac{(R_0-1)^2}{r^2 R_0} \left. \right\} \cos 2\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \frac{(-1)^n}{R_0^{n+1}} \left\{ -4(1-\nu) \frac{n(n-1)}{r} \frac{P_{n+1}^1(\mu_0)}{R_0} + 24(1-\nu) \frac{P_n^2(\mu_0)}{r^2} - 4n(n-1) \right. \\
 & \times \frac{P_{n+2}^2(\mu_0)}{R_0^2} \left. \right\} \cos 2\theta - \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{(-1)^n}{R_0^n} \left\{ -8\nu \frac{(1-2\nu)}{r} \frac{P_n^1(\mu_0)}{R_0} - 24 \frac{(1-2\nu)^2}{r^2} \frac{P_{n-1}^2(\mu_0)}{(n-1)(n-2)} \right. \\
 & + 8(1-2\nu) \frac{P_{n+1}^2(\mu_0)}{R_0^2} \left. \right\} \cos 2\theta + \sum_{n=2}^{\infty} E_n \frac{(-1)^n}{R_0^n} \left\{ 4(1-\nu) \frac{(1-2\nu)(n-1)}{r} \frac{P_n^1(\mu_0)}{R_0} \right. \\
 & + 4(1-\nu) \frac{n(n-1)}{r} \frac{P_{n+1}^1(\mu_0)}{R_0^2} - \frac{24(1-\nu)(1-2\nu)}{r^2} \frac{P_{n-1}^2(\mu_0)}{n-2} - 24 \frac{(1-\nu)}{r^2} \frac{P_n^2(\mu_0)}{R_0} \\
 & \left. + 4(1-2\nu)(n-1) \frac{P_{n+1}^2(\mu_0)}{R_0^2} + 4n(n-1) \frac{P_{n+2}^2(\mu_0)}{R_0^3} \right\} \cos 2\theta \dots\dots\dots(50)
 \end{aligned}$$

となる。ここで  $R_0 = \sqrt{1+r^2}$ ,  $\mu_0 = 1/R_0$  であり, 数学公式<sup>(9)</sup>

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_{\nu}(bx) dx = \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}}{b^{\nu}\sqrt{a^2+b^2}} \quad [R_e \nu > -1, R_e(a \pm b) > 0] \dots\dots\dots(51)$$

および

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda h} J_2(\lambda r) d\lambda = -\frac{3h}{r^2 R_0} + \frac{2}{r^2} + \frac{h^3}{r^2} \frac{1}{R_0^3} \quad (R_0 = \sqrt{r^2+h^2}) \dots\dots\dots(52)$$

が用いられた。同様にして  $\sigma_{\theta}$  は

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\sigma_{\theta}}{p} \right)_{z=1} & = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \left\{ -\frac{4(1-\nu)}{r} \frac{P_{n+1}^1(\mu_0)}{R_0^{n+2}} - 4\nu(n+1)(n+2) \frac{P_{n+2}(\mu_0)}{R_0^{n+3}} \right\} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n \left\{ 4 \frac{(1-\nu)}{r} \frac{P_{n+1}^1(\mu_0)}{R_0^{n+2}} + 4\nu(1-2\nu)(n+1) \frac{P_{n+1}(\mu_0)}{R_0^{n+2}} \right. \\
 & + 4(1-\nu) \frac{(1-2\nu)}{r} \frac{1}{n} \frac{P_n^1(\mu_0)}{R_0^{n+1}} + 4\nu(n+1)(n+2) \frac{P_{n+2}(\mu_0)}{R_0^{n+3}} \left. \right\} - D_1 \left\{ -2 \frac{(1-2\nu)(1+2\nu)}{r} \frac{P_1^1(\mu_0)}{R_0^2} \right. \\
 & - \frac{2(1-2\nu)}{r} \frac{P_2^1(\mu_0)}{R_0^3} + 2(1-2\nu)^2 \frac{P_2^2(\mu_0)}{R_0^3} + 4\nu \frac{P_3^2(\mu_0)}{R_0^4} + 12 \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left( -\frac{3}{r^2 R_0} \right. \\
 & + \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{R_0^3} \left. \right) - 12 \frac{(1-2\nu)^2 (R_0-1)^2}{r^2 R_0} \left. \right\} \cos 2\theta + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \frac{(-1)^n}{R_0^{n+1}} \left\{ 4 \frac{(1-\nu)(n-1)}{r} n \right. \\
 & \times \frac{P_{n+1}^1(\mu_0)}{R_0} - \frac{24(1-\nu)}{r^2} P_n^2(\mu_0) - 4\nu(n-1)n \frac{P_{n+2}^2(\mu_0)}{R_0^2} \left. \right\} \cos 2\theta - \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{(-1)^n}{R_0^n} \\
 & \times \left\{ 8\nu \frac{(1-2\nu)}{r} \frac{P_n^1(\mu_0)}{R_0} + \frac{24(1-2\nu)^2 P_{n-1}^2(\mu_0)}{r^2(n-1)(n-2)} + 8\nu(1-2\nu) \frac{P_{n+1}^2(\mu_0)}{R_0^2} \right\} \cos 2\theta \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} E_n \frac{(-1)^n}{R_0^n} \left\{ -\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)(n-1)}{r} \frac{P_n^1(\mu_0)}{R_0} - 4(1-\nu) \frac{(n-1)n}{r} \frac{P_{n+1}^1(\mu_0)}{R_0^2} \right. \\
 & + 24 \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{r^2(n-2)} P_{n-1}^2(\mu_0) + 24 \frac{(1-\nu)}{r^2} \frac{P_n^2(\mu_0)}{R_0} + 4\nu(1-2\nu)(n-1) \frac{P_{n+1}^2(\mu_0)}{R_0^2} \\
 & \left. + 4\nu(n-1)n \frac{P_{n+2}^2(\mu_0)}{R_0^3} \right\} \cos 2\theta \dots\dots\dots(53)
 \end{aligned}$$

となる。

$\theta = 0$  のときの平面境界上の応力  $\sigma_r, \sigma_{\theta}$  がそれぞれ 図 7, 8 に示してある。  $\sigma_r$  は引張応力になり  $r \doteq 0.5$  付近で極大となり  $r$  が大きくなるにつれ  $p$  に近づく。  $\sigma_{\theta}$  は  $r=0$  で極大の圧縮応力になり,  $r \doteq 0.6$  で引張応力に変わり  $r \doteq 1.1$  で極大の引張応力になり,  $r$  が大きくなるにつれ零に近づく。

以上の計算結果より平面境界に最も接近した球か面上 A 点に最大引張応力を生ずることがわかる。 図 9 はこの最大引張応力  $\sigma_{max}$  と球か半径との関係を示したもので球かの半径が零に近づけば球かを有する無限体の場合に一致し  $\sigma_{max} = 2.022p$  となり, 球か面が平

面境界に接近するにつれて  $\sigma_{max}$  は無限大に近づく。

図中に 2 軸一様引張荷重が作用する場合の結果<sup>(1)</sup>を示した。 軸対称の場合は球か半径が零に近づくとき  $\sigma_{max} = 2.087p$  であり球か半径が大きくなるにつれて  $\sigma_{max}$  は無限大となる。 両結果を比較するとき軸対称荷重をうける場合のほうが最大引張応力は大きい。 球か半径が大きくなるにつれその差は少なくなる。

5. 結 言

球かを有する半無限体に 1 軸引張荷重が作用する非軸対称問題を三次元弾性理論に基づいて厳密に解析する方法を示し, 理論解に基づいて球か面,  $z$  軸上の応

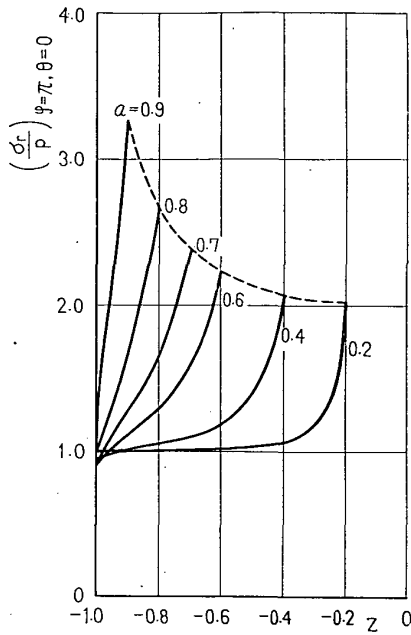


図 6 z 軸上の  $\sigma_r$  の分布 ( $\varphi=\pi, \theta=0$ )

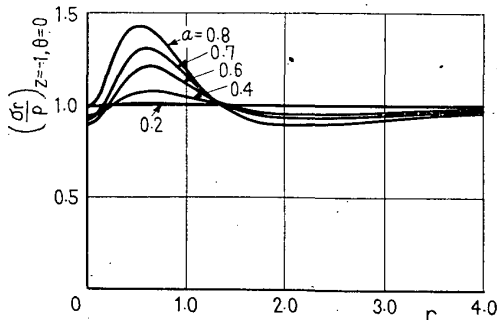


図 7 平面境界における  $\sigma_r$  の分布 ( $\theta=0$ )

力および平面境界における応力を数値計算して球かの位置による最大応力の変化などを明らかにし、また2軸一様引張荷重をうける場合の結果と比較した。

球かが平面境界に近づくと最大引張応力は平面境界に最も近い球か面上に生じ球かが半無限体平面に近づくとつれてこの応力は無限大に近づくことを示した。また1軸引張荷重をうける場合のほうが2軸一様引張荷重をうける場合よりも最大引張応力は小さい。数値計算には東京工業大学情報処理センターの HITAC 8500 および東京大学大型電子計算機センターの HITAC 5020 E を使用した。終わりにこの研究に関しては有益なご助言をいただいた東京工業大学 松本

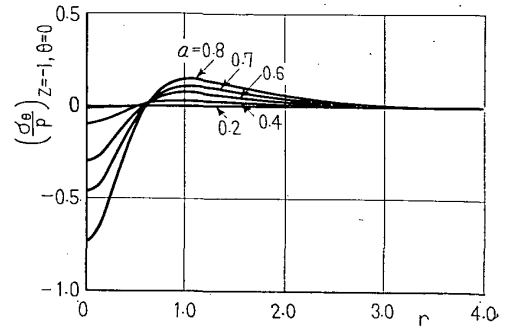


図 8 平面境界上の  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=0$ )

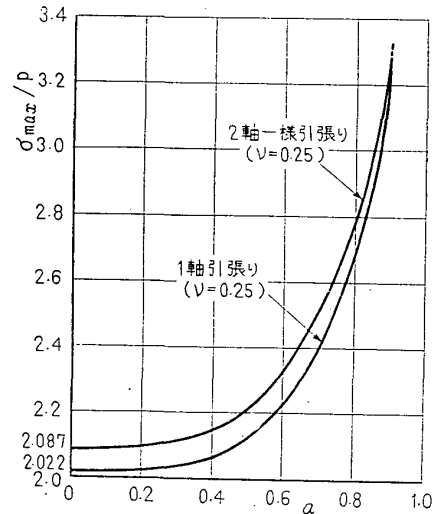


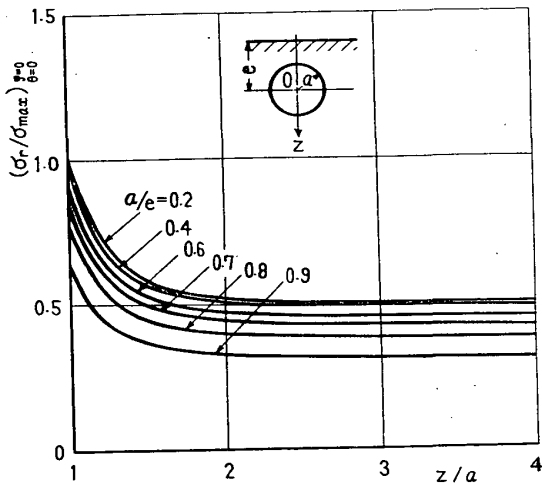
図 9 球か半径による最大引張応力の変化

浩之助教授に謝意を表します。なお本研究は昭和 46 年度文部省科学研究費の補助により行われたものである。

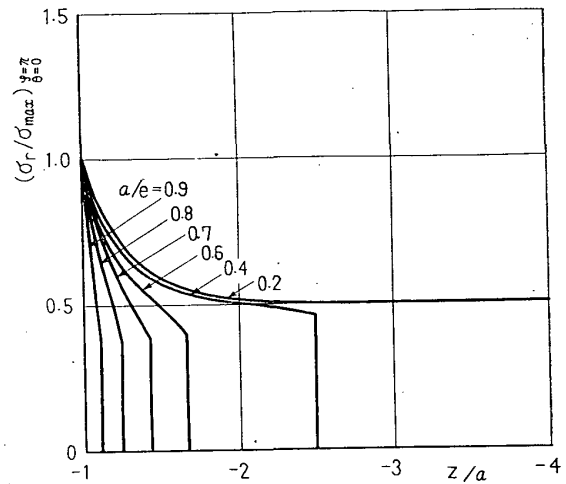
文 献

- (1) 土田・中原, 機論, 35-276 (昭 44-8), 1607.
- (2) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1958), 24, Springer-Verlag.
- (3) Todhunter, I. and Pearson, K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Vol. 2, Pt. II (1960), 242, Dover.
- (4) Gray, A., ほか 2 名, *Bessel Function*, (1922), 223, MacMillan.
- (5) 斎藤・中原, 機論, 33-247 (昭 42-3), 343.
- (6) Sneddon, I.N., *Fourier Transform*, (1951), 514, McGraw-Hill.
- (7) 森口・ほか 2 名, 数学公式 III, (昭 31), 196, 172, 岩波書店.
- (8) Morse, P.M. and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, Pt. II (1953), 1318, McGraw-Hill.
- (9) 文献 (7) の 198 ページ.

討 論



付図 1 z 軸上の  $\sigma_r$  の相対分布 ( $\theta=0, \varphi=0$ )



付図 2 z 軸上の  $\sigma_r$  の相対分布 ( $\theta=0, \varphi=\pi$ )

付表 1  $\sigma_{max}/p$  の値 ( $\nu=0.25$ )

$a$	2 軸一様引張り	1 軸引張り
0	2.087	2.022
0.2	2.092	2.026
0.4	2.145	2.070
0.6	2.332	2.233
0.7	2.506	2.397
0.8	2.760	2.668
0.9	3.270	3.266

[質問] 西谷 弘 信 (九州大学工学部)

(1)  $a$  を一定として球か中心と平面境界との距離  $e$  を変えたときの  $\sigma_r$  の相対応力分布 ( $\sigma_r$  の最大値を 1 としたときの  $z$  軸上の応力分布. 図 5, 6 に対応) をご教示いただきたい.

(2) 図 9 によれば,  $\sigma_{max}/p$  は 1 軸引張り と 2 軸一様引張り とで,  $a$  が 1 に近い所で大きさが逆転するように見えるが果たしてそうなるのか.

[回答] (1) A 点に生ずる  $\sigma_r$  が最大になるので, これを  $\sigma_{max}$  として相対応力分布を表すと付図 1, 2 のようになる.

(2)  $a$  が 1 に近づくにつれて級数の収束が急速に悪くなるので  $a=0.9$  までしか計算していない. また

$a$  が 1 に近づくにつれて  $\sigma_{max}$  は急激に増大するためにこの変化を曲線で正確に表すことは難しく, 図 9 のみによっては大きさが逆転するかどうかはわからない. 参考のために計算した最大応力値  $\sigma_{max}/p$  を付表 1 に示す.