

539.4.013 : 539.384

### 偏心球かを有する厚板の曲げ\*

土田栄一郎\*\*, 前田公三\*\*\*, 中原一郎\*\*\*\*, 小玉正雄\*\*

#### 1. 緒 言

無限に広がる厚板に曲げモーメントが作用するとき、厚板内に存在する球かによる応力集中問題は工学上重要であり、球かが厚板の中央に存在する場合は、幾人かの研究者によって解析されてきた。しかし球かが偏心して存在する場合も重要であり、1969年に C. B. Ling-C. P. Tsai が Love の重調和応力関数を用いて、偏心した球かあるいは球状剛介在物を有する厚板の問題<sup>(1)</sup>を解析している。この場合厚板は円周曲げを受け、軸対称応力状態にあり、非軸対称荷重が作用する場合の研究はまだないようである。本報は偏心球かを有する厚板が一軸回りに曲げモーメントを受ける非軸対称問題を、三次元弾性理論に基づき6個の調和応力関数<sup>(2)(3)</sup>を用いて厳密に解析し、球か近傍の応力分布、偏心量および球か半径が最大引張応力に及ぼす影響を明らかにしたものである。

#### 2. 解 析 法

**2.1 応力関数と境界条件** 図1に示されるように板厚の半分の1としてすべての長さをこれを単位とする無次元量で表すことにし、球か半径を  $a$ 、球かの板中央面からの偏心量を  $c$  とする。そして  $O$  点を原点と

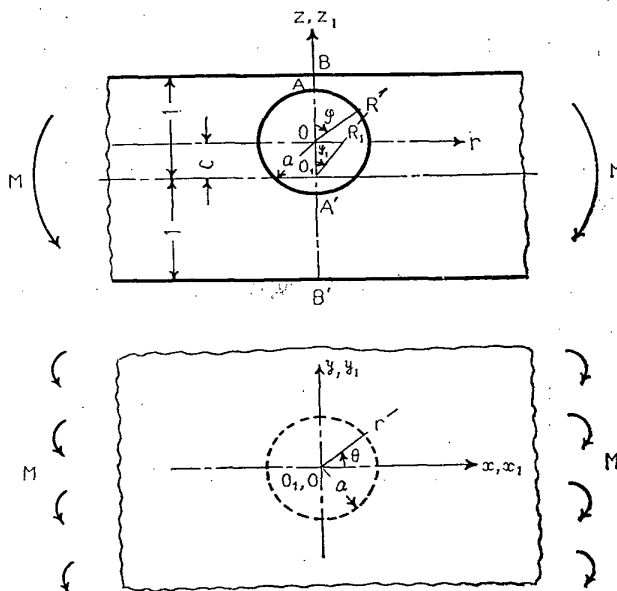


図 1 座標系

して直角座標、円柱座標、球座標をそれぞれ  $(x, y, z)$ ,  $(r, \theta, z)$ ,  $(R, \theta, \varphi)$  ととることとする。

さて球座標  $(R, \theta, \varphi)$  のもとで6個の応力関数<sup>(2)</sup>  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \lambda_3$  を用いて  $R, \theta, \varphi$  方向の変位  $u_R, v_\theta, w_\varphi$  を次のように表すと、これらは物体力のない場合の三次元弾性基礎方程式を満足する解となる。ここでは便宜上応力関数をわけて表示したが、変位はこれらを一次結合したものである。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2Gu_R = \frac{\partial \varphi_0}{\partial R}, \quad 2Gv_\theta = \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}, \quad 2Gw_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} \\
 (2) \quad & 2Gu_R = R \sin \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \cos \theta - (3-4\nu) \sin \varphi \varphi_1 \cos \theta, \quad 2Gv_\theta = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \cos \theta + (3-4\nu) \varphi_1 \sin \theta \\
 & 2Gw_\varphi = \sin \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \cos \theta - (3-4\nu) \cos \varphi \varphi_1 \cos \theta \\
 (3) \quad & 2Gu_R = R \sin \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \sin \theta - (3-4\nu) \sin \varphi \varphi_2 \sin \theta, \quad 2Gv_\theta = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \sin \theta - (3-4\nu) \varphi_2 \cos \theta \\
 & 2Gw_\varphi = \sin \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} \sin \theta - (3-4\nu) \cos \varphi \varphi_2 \sin \theta \\
 (4) \quad & 2Gu_R = R \cos \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial R} - (3-4\nu) \cos \varphi \varphi_3, \quad 2Gv_\theta = \cot \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}, \quad 2Gw_\varphi = \cos \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi} + (3-4\nu) \sin \varphi \varphi_3 \\
 (5) \quad & 2Gu_R = -\sin \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial R} - 4(1-\nu) \cos \varphi \varphi_4, \quad v_\theta = 0, \quad 2Gw_\varphi = R \sin \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial R} + 4(1-\nu) \sin \varphi \varphi_4 \\
 (6) \quad & 2Gu_R = \frac{2}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}, \quad 2Gv_\theta = -2 \left[ \sin \varphi \frac{\partial \lambda_3}{\partial R} + \frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi} \right], \quad 2Gw_\varphi = \frac{2}{R} \cot \varphi \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

\* 昭和50年10月11日 第53期全国大会講演会において論文講演として講演，原稿受付 昭和50年4月10日。  
 \*\* 正員，埼玉大学工学部（浦和市下大久保255）。 \*\*\* 日産自動車会社。 \*\*\*\* 正員，東京工業大学。

ここで

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = \nabla^2 \varphi_3 = \nabla^2 \varphi_4 = \nabla^2 \lambda_3 = 0$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

であり,  $\nu$  はポアソン比,  $G$  は横弾性係数である.

いま球かの中心を  $O$  点,  $O$  点を通り, 厚板の中央面に下した垂線と中央面との交点を  $O_1$  として, それぞれの点を原点として二つの直角座標  $(x, y, z)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$  および球座標  $(R, \theta, \varphi)$ ,  $(R_1, \theta, \varphi_1)$  をとる.

両座標系の  $z$  軸を一致させると二つの座標間に次の関係がある.

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + c \quad \dots\dots\dots(2)$$

さて  $O_1$  を原点として応力関数  $\varphi_0, \varphi_3$  に次の調和関数を与える<sup>(3)</sup>.

$$[I] \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{01} = -\frac{(1-2\nu)}{12(1+\nu)} kR_1^3 P_3(\mu_1) + \frac{(1-2\nu)}{120(1-\nu)} \\ \quad \times kR_1^3 P_3^2(\mu_1) \cos 2\theta \\ \varphi_{31} = -\frac{kR_1^2 P_2(\mu_1)}{4(1+\nu)} + \frac{k}{24(1-\nu)} \\ \quad \times R_1^2 P_2^2(\mu_1) \cos 2\theta \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで  $\varphi_0, \varphi_3$  の後に付けた添字は,  $O_1$  を原点とする座標系で表された応力関数を意味し,  $M$  を単位幅当たりの曲げモーメントとすれば  $k$  は曲げ応力分布のこう配で  $k = (3/2)M$  である. また  $P_n(\mu_1), P_n^m(\mu_1)$  は, それぞれルジャンドル関数およびルジャンドル陪関数であり  $\mu_1 = \cos \varphi_1$  である. 式(3)より導かれる変位, 応力成分を直角座標で表せば

$$\left. \begin{array}{l} u_x = \frac{k}{E} x_1 z_1; \quad v_y = -\frac{\nu}{E} k y_1 z_1 \\ w_z = -\frac{k}{2E} \{x_1^2 + \nu(z_1^2 - y_1^2)\}, \quad \sigma_x = k z_1 \\ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

であり, これは厚板が  $y_1$  軸回りに単位幅当たり  $M$  の曲げモーメントを受ける場合の解である.  $[I]$  の応力関数は  $O_1$  を原点とする座標で表されているので, これを  $O$  を原点とする座標で表すことにする. 文献(4), (5)にしたがえば,  $O$  点を原点とする応力関数を  $\varphi_0, \varphi_3$  として式(3)で  $\varphi_{01}, \varphi_{31}$  に与えた調和関数を次の座標変換式(図2)<sup>(6)</sup>

$$R_1^n P_n^m(\cos \varphi_1) \cos m\theta = (n+m)! \times \sum_{q=0}^{n-m} \frac{c^q}{q!} \frac{R_2^{n-q}}{(n+m-q)!} P_{n-q}^m(\cos \varphi_2) \cos m\theta \quad \dots\dots\dots(5)$$

にしたがって  $O$  を原点とする座標で表し

$$\varphi_0 = \varphi_{01} + c\varphi_{31}, \quad \varphi_3 = \varphi_{31} \quad \dots\dots\dots(6)$$

とおけばよい. 変換された応力関数  $[I]$  は  $O$  点を原点として次のようになる.

$$[I]^* \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = -\frac{(1-2\nu)}{12(1+\nu)} kR^3 P_3(\mu) + \frac{(1-2\nu)}{120(1-\nu)} \\ \quad \times kR^3 P_3^2(\mu) \cos 2\theta - \frac{(1-\nu)}{2(1+\nu)} \\ \quad \times kcR^2 P_2(\mu) + \frac{kc}{12} R^2 P_2(\mu) \cos 2\theta \\ \varphi_3 = -\frac{kR^2 P_2(\mu)}{4(1+\nu)} + \frac{kR^2 P_2(\mu)}{24(1-\nu)} \cos 2\theta \\ \quad - \frac{kcR P_1(\mu)}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで剛体変位を生ずる項は省略している. これより得られる応力は厚板両面で応力自由であるが, 原点  $O$  を中心として半径  $a$  の球面を考えれば, この面に生じている応力は  $P_n, P_n^m$  をそれぞれ  $P_n(\mu), P_n^m(\mu)$  を表すものとして次のようになる.

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\sigma_R}{k}\right)_{R=a} = \frac{a}{5}(P_1 - P_3) + \frac{c}{3}(P_0 - P_2) \\ \quad + \frac{a}{30} P_3^2 \cos 2\theta + \frac{c}{6} P_2^2 \cos 2\theta \\ \left(\frac{\sigma_\theta}{k}\right)_{R=a} = \frac{a}{2} P_1 + \frac{c}{2} + \frac{a}{12} P_2^{2'} \cos 2\theta \\ \quad - \frac{c}{2} \cos 2\theta \\ \left(\frac{\sigma_\varphi}{k}\right)_{R=a} = \frac{a}{10}(3P_1 + 2P_3) + \frac{c}{6}(P_0 + 2P_2) \\ \quad - \frac{a}{60}(5P_2^{2'} + 2P_3^2) \cos 2\theta \\ \quad - \frac{c}{60}(P_3^{2'} - 5P_2^2) \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{k \sin \varphi}\right)_{R=a} = \frac{a}{30}(3P_1' + 2P_3') + \frac{c}{6} P_2' \\ \quad + \frac{a}{60}(5P_2^{2'} - P_3^{2'}) \cos 2\theta - \frac{c}{12} P_2^{2'} \cos 2\theta \end{array} \right\}$$

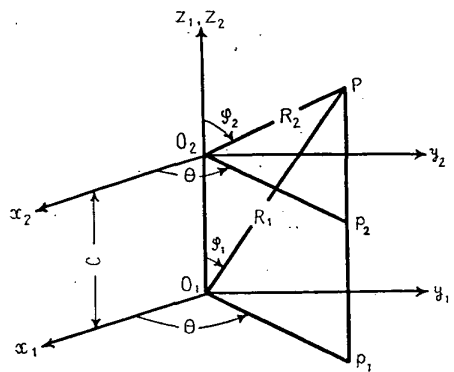


図 2

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\tau_{R\theta} \sin \varphi}{k}\right)_{R=a} &= -\left(\frac{a}{30} P_3^2 + \frac{c}{6} P_2^2\right) \sin 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{\theta\varphi}}{k}\right)_{R=a} &= \frac{a}{30} (15 - 10P_2^2 + P_3^2) \sin 2\theta \\ &\quad - \frac{c}{12} P_2^2 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

ここで  $P_n^{m'} = \frac{dP_n^m}{d\mu}$

である。

それゆえに無限遠方ですべての変位および応力が消失し、以下の境界条件を満足する解を導いて [I]\* の解に重ね合わせれば、偏心球かを有する厚板の曲げに対する解が得られる。

(i) 厚板の上下面  $z = \pm 1 - c$  で

$$(\sigma_z)_{z=\pm 1-c} = (\tau_{rz})_{z=\pm 1-c} = (\tau_{z\theta})_{z=\pm 1-c} = 0 \dots\dots(9)$$

(ii) 球か面  $R = a$  で

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{k}\right)_{R=a} &= -\frac{a}{5} (P_1 - P_3) - \frac{c}{3} (P_0 - P_2) \\ &\quad - \frac{a}{30} P_3^2 \cos 2\theta - \frac{c}{6} P_2^2 \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{k \sin \varphi}\right)_{R=a} &= -\frac{a}{30} (3P_1' + 2P_3') - \frac{c}{6} P_2' \\ &\quad - \frac{a}{60} (5P_2^2 - P_3^2) \cos 2\theta + \frac{c}{12} P_2^2 \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\theta} \sin \varphi}{k}\right)_{R=a} &= \left(\frac{a}{30} P_3^2 + \frac{c}{6} P_2^2\right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

式 (9), (10) の境界条件は軸対称部分と非軸対称部分に分離できるから  $\theta$  に無関係な境界条件を満足する軸対称解と  $\theta$  に関する境界条件を満足する非軸対称解を別々に求めて重ね合わせればよい。

2.2 軸対称解 軸対称解に対する応力関数として

$\varphi_0, \varphi_3$  に O 点を原点として、以下のような調和関数を与える<sup>(2)</sup>。

$$\begin{aligned} (\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2) \phi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m} [(3-4\nu-2\lambda)(\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) + e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda \\ &\quad - 2\lambda \cosh 2\lambda c) + 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m+1}}{(2m+1)!} \lambda^{2m+1} [(3-4\nu-2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c \\ &\quad - 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c + 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda)] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m-1} [4(1-\nu)(1-2\nu) \\ &\quad - 2\lambda^2] \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + 4\lambda^2 c \{(3-4\nu) + \cosh 2\lambda \cosh 2\lambda c\} \\ &\quad - 2\lambda^2 c^2 \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!} \lambda^{2m} [4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda^2] (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) \\ &\quad + 4\lambda^2 c (\cosh 2\lambda \sinh 2\lambda c - \lambda c) - 2\lambda^2 c^2 \sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c] \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2) \phi_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} 2 \frac{A_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m} (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} 2 \frac{A_{2m+1}}{(2m+1)!} \lambda^{2m+1} \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m-1} [(3-4\nu+2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c \\ &\quad + 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c - 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda)] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!} \lambda^{2m} [(3-4\nu \\ &\quad + 2\lambda) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) - e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda - 2\lambda \cosh 2\lambda c) - 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$[II] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{P_m(\mu)}{R^{m+1}} \\ \varphi_3 &= k \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{P_m(\mu)}{R^{m+1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

$$[III] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) J_0(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda \\ \varphi_3 &= k \int_0^{\infty} \lambda \phi_2(\lambda) J_0(\lambda r) \sinh \lambda z d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

$$[III]^* \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \int_0^{\infty} \phi_1^*(\lambda) J_0(\lambda r) \sinh \lambda z d\lambda \\ \varphi_3 &= k \int_0^{\infty} \lambda \phi_2^*(\lambda) J_0(\lambda r) \cosh \lambda z d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

ここで  $J_n(\lambda r)$  は第 1 種ベッセル関数で、 $A_m, B_m$  および  $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \phi_1^*(\lambda), \phi_2^*(\lambda)$  はそれぞれ境界条件から決定される未定係数ならびに未知関数である。特に球かが十分小さくて、厚板両面の境界を考慮しなくてもよい場合には応力関数 [II] で

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{a^3} &= -\frac{13-10\nu}{4(7-5\nu)} c, & \frac{A_1}{a^4} &= -\frac{(11-7\nu)}{6(13-7\nu)} a \\ \frac{A_2}{a^5} &= -\frac{c}{2(7-5\nu)}, & \frac{A_3}{a^6} &= -\frac{a}{2(13-7\nu)} \\ A_m &= 0 \quad (m \geq 4), & \frac{B_1}{a^3} &= \frac{5}{4} \frac{c}{7-5\nu} \\ \frac{B_2}{a^4} &= \frac{7}{6} \frac{a}{13-7\nu}, & B_m &= 0 \quad (m=0, m \geq 3) \end{aligned}$$

とおいて得られる。

まず応力関数 [II] を次の公式で円柱座標で表す<sup>(7)</sup>。

$$\frac{P_m^n(\mu)}{R^{m+1}} = \frac{1}{(m-n)!} \int_0^{\infty} \lambda^m J_n(\lambda r) e^{-\lambda^2 d} d\lambda \quad (z > 0) \dots\dots(14)$$

さらに応力関数 [III], [III]\* と合わせて応力成分を求め、厚板両面の境界条件式 (9) を満足させると、未知関数  $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \phi_1^*(\lambda), \phi_2^*(\lambda)$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 (\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2) \phi_1^*(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m} [(3-4\nu-2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c - 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c \\
 &+ 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda)] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m+1}}{(2m+1)!} \lambda^{2m+1} [(3-4\nu-2\lambda) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda) \\
 &- e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda + 2\lambda \cosh 2\lambda c) + 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m-1} [4(1-\nu)(1-2\nu) \\
 &- 2\lambda^2] (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda) + 4\lambda^2 c \cosh 2\lambda \sinh 2\lambda c - 2\lambda^2 c^2 (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c \\
 &- 2\lambda)] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!} \lambda^{2m} [4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda^2] \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c \\
 &- 4\lambda^2 c [(3-4\nu) - \cosh 2\lambda \cosh 2\lambda c] - 2\lambda^2 c^2 \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sinh^2 2\lambda - 4\lambda) \phi_2^*(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} 2 \frac{A_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m} \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + \sum_{m=0}^{\infty} 2 \frac{A_{2m+1}}{(2m+1)!} \lambda^{2m+1} (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c \\
 &+ 2\lambda) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \lambda^{2m-1} [(3-4\nu+2\lambda) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda) + e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda \\
 &+ 2\lambda \cosh 2\lambda c) - 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!} \lambda^{2m} [(3-4\nu+2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c \\
 &+ 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c - 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda)] \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

そこで球か面の境界条件を満足させるために, 応力関数 [III], [III]\* に含まれている円柱関数を次の公式を用いて球関数に直す.

$$J_\nu(kr) \cosh kz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{\nu+2n}}{(2\nu+2n)!} R^{\nu+2n} P_{\nu+2n}^\nu(\mu) \dots\dots\dots(19)$$

$$J_\nu(kr) \sinh kz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{\nu+2n+1}}{(2\nu+2n+1)!} R^{\nu+2n+1} P_{\nu+2n+1}^\nu(\mu) \dots\dots\dots(20)$$

変換された応力関数 [III], [III]\* はまとめて次のように書ける.

$$[IV] \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R^n P_n(\mu) \\ \varphi_3 = k \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n R^n P_n(\mu) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

ここで  $\alpha_n, \beta_n$  は  $n$  が偶数, 奇数によって異なり

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \int_0^\infty \phi_1(\lambda) \lambda^{2n} d\lambda, \quad \alpha_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^\infty \phi_1^*(\lambda) \lambda^{2n+1} d\lambda \\ \beta_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \int_0^\infty \phi_2^*(\lambda) \lambda^{2n+1} d\lambda, \quad \beta_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^\infty \phi_2(\lambda) \lambda^{2n+2} d\lambda \end{array} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

である. そこで応力関数 [II], [IV] より応力成分を求めて, 球か面の境界条件を満足させると以下のようなになる.

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\sigma_R}{k} \right)_{R=a} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1)(n+2) \frac{A_n}{a^{n+3}} + \frac{n}{2n-1} \{n(n+3) - 2\nu\} \frac{B_{n-1}}{a^{n+1}} \right. \\
 &+ \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \{n+3+2(1-2\nu)\} \frac{B_{n+1}}{a^{n+3}} + n(n-1) \alpha_n a^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2n-1} \{n-2-2(1-2\nu)\} \beta_{n-1} a^{n-2} \\
 &+ \left. \frac{n+1}{2n+3} \{(n+1)(n-2) - 2\nu\} \beta_{n+1} a^n \right] P_n(\mu) = -\frac{a}{5} \{P_1(\mu) - P_3(\mu)\} - \frac{c}{3} \{P_0(\mu) - P_2(\mu)\} \dots\dots(23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\tau_{R\varphi}}{k \sin \varphi} \right)_{R=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n+2) \frac{A_n}{a^{n+3}} + \frac{1}{2n-1} \{n^2 - 2(1-\nu)\} \frac{B_{n-1}}{a^{n+1}} \right. \\
 &+ \frac{(n+2)}{2n+3} \{n+3+2(1-2\nu)\} \frac{B_{n+1}}{a^{n+3}} - (n-1) \alpha_n a^{n-2} - \frac{(n-1)}{2n-1} \{n-2-2(1-2\nu)\} \beta_{n-1} a^{n-2} \\
 &+ \left. \frac{1}{2n+3} \{-(n+1)^2 + 2(1-\nu)\} \beta_{n+1} a^n \right] P_n'(\mu) = -\frac{a}{30} \{3P_1'(\mu) + 2P_3'(\mu)\} - \frac{c}{6} P_2'(\mu) \dots\dots(24)
 \end{aligned}$$

式 (23), (24) において, それぞれ  $P_n(\mu)$  および  $P_n'(\mu)$  の係数を零に等置すれば,  $A_n, B_n$  に関する無限連立一次方程式が得られる. 特に式 (23), (24) で  $n=1$  とおいた関係式より  $B_0=0$  であることが分かる.

2.3 非軸対称解 非軸対称解に対しては応力関数として, O を原点とする次のような調和関数を与える<sup>(2)</sup>.

$$[V] \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = k \sum_{m=2}^{\infty} C_m \frac{P_m^2(\mu)}{R^{m+1}} \cos 2\theta, \quad \varphi_4 = -k \sum_{m=2}^{\infty} \frac{D_m}{(m-1)} \frac{P_m^2(\mu)}{R^{m+1}} \cos 2\theta \\ \varphi_1 = k \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{P_m^1(\mu)}{R^{m+1}} \cos \theta, \quad \varphi_3 = k \sum_{m=2}^{\infty} E_m \frac{P_m^2(\mu)}{R^{m+1}} \cos 2\theta \\ \varphi_2 = -k \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{P_m^1(\mu)}{R^{m+1}} \sin \theta \end{array} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

$$[VI] \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = k \int_0^{\infty} \psi_3(\lambda) J_2(\lambda r) \cosh \lambda z \cos 2\theta d\lambda, \quad \varphi_1 = k \int_0^{\infty} \psi_4(\lambda) J_1(\lambda r) \cosh \lambda z \cos \theta d\lambda \\ \varphi_2 = -k \int_0^{\infty} \psi_4(\lambda) J_1(\lambda r) \cosh \lambda z \sin \theta d\lambda, \quad \varphi_3 = k \int_0^{\infty} \lambda \psi_3(\lambda) J_2(\lambda r) \sinh \lambda z \cos 2\theta d\lambda \\ \lambda_3 = k \int_0^{\infty} \psi_6(\lambda) J_2(\lambda r) \cosh \lambda z \sin 2\theta d\lambda \end{array} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

$$[VI]^* \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = k \int_0^{\infty} \psi_3^*(\lambda) J_2(\lambda r) \sinh \lambda z \cos 2\theta d\lambda, \quad \varphi_1 = k \int_0^{\infty} \psi_4^*(\lambda) J_1(\lambda r) \sinh \lambda z \cos \theta d\lambda \\ \varphi_2 = -k \int_0^{\infty} \psi_4^*(\lambda) J_1(\lambda r) \sinh \lambda z \sin \theta d\lambda, \quad \varphi_3 = k \int_0^{\infty} \lambda \psi_5^*(\lambda) J_2(\lambda r) \cosh \lambda z \cos 2\theta d\lambda \\ \lambda_3 = k \int_0^{\infty} \psi_6^*(\lambda) J_2(\lambda r) \sinh \lambda z \sin 2\theta d\lambda \end{array} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

ここで  $C_m, D_m, E_m$  および  $\psi_3(\lambda) \sim \psi_6(\lambda), \psi_3^*(\lambda) \sim \psi_6^*(\lambda)$  は、それぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数である。特に球かが十分小さくて、厚板両面の境界を考慮しなくてもよいときは応力関数 [V] で

$$\frac{C_2}{a^5} = \frac{c}{4(7-5\nu)}, \quad \frac{C_3}{a^6} = \frac{a}{12(13-7\nu)}, \quad C_m = 0 \quad (m \geq 4), \quad \frac{D_1}{a^3} = -\frac{5}{4} \frac{c}{7-5\nu}$$

$$\frac{D_2}{a^4} = -\frac{(23-21\nu)a}{24(1-2\nu)(13-7\nu)}, \quad D_m = 0 \quad (m \geq 3), \quad \frac{E_2}{a^4} = -\frac{7}{12} \frac{a}{13-7\nu}, \quad E_m = 0 \quad (m \geq 3)$$

とおいて得られる。

まず公式 (14) を用いて応力関数 [V] を円柱座標で表し、さらに応力関数 [VI], [VI]\* を重ね合わせて応力成分を求め、厚板両面の境界条件を満足させることにする。その際

$$\psi_4(\lambda) = D_1 \lambda \frac{\cosh 2\lambda c + e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda} \dots\dots\dots(28)$$

$$\psi_4^*(\lambda) = D_1 \lambda \frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} \dots\dots\dots(29)$$

とおけば両境界面における  $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$  の式において  $D_1, \psi_4(\lambda), \psi_4^*(\lambda)$  を含む項はなくなる。式 (28), (29) を考慮して厚板の上下面の境界条件式 (9) を満足させると、次のようになる。

$$\left( \frac{\sigma_z}{k \cos 2\theta} \right)_{z=\pm 1-c} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[ \psi_3(\lambda) \cosh(1 \mp c)\lambda + \{-2(1-\nu) \cosh(1 \mp c)\lambda \right.$$

$$+ (1 \mp c)\lambda \sinh(1 \mp c)\lambda \psi_5(\lambda) \pm \psi_3^*(\lambda) \sinh(1 \mp c)\lambda \pm \{-2(1-\nu) \sinh(1 \mp c)\lambda$$

$$+ (1 \mp c)\lambda \cosh(1 \mp c)\lambda \psi_5^* + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{C_{2m}\lambda^{2m}}{(2m-2)!} \pm \frac{C_{2m+1}\lambda^{2m+1}}{(2m-1)!} \right\} e^{-(1 \mp c)\lambda}$$

$$- 2(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \pm \frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{D_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m)!} \right\} e^{-(1 \mp c)\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \pm \frac{E_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-2)!}$$

$$+ \frac{E_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m-1)!} \right\} \{2(1-\nu) + (1 \mp c)\lambda\} e^{-(1 \mp c)\lambda} - D_1 \left\{ 2(1-2\nu) \frac{\cosh(1 \pm c)\lambda}{\sinh 2\lambda} \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda}{\sinh^2 2\lambda} \{ (1 \pm c) \sinh 2\lambda \sinh(1 \pm c)\lambda - 2 \cosh 2\lambda \cosh(1 \pm c)\lambda \} \right] J_2(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots(30)$$

$$\pm \left( \frac{\tau_{rz}}{k \cos 2\theta} \right)_{z=\pm 1-c} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[ \psi_3(\lambda) \sinh(1 \mp c)\lambda + \{-(1-2\nu) \sinh(1 \mp c)\lambda \right.$$

$$+ (1 \mp c)\lambda \cosh(1 \mp c)\lambda \psi_5(\lambda) \pm \psi_3^*(\lambda) \cosh(1 \mp c)\lambda \pm \{-(1-2\nu) \cosh(1 \mp c)\lambda$$

$$+ (1 \mp c)\lambda \sinh(1 \mp c)\lambda \psi_5^*(\lambda) - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{C_{2m}\lambda^{2m}}{(2m-2)!} \pm \frac{C_{2m+1}\lambda^{2m+1}}{(2m-1)!} \right\} e^{-(1 \mp c)\lambda}$$

$$\begin{aligned}
 &+2(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \pm \frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{D_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} \right\} e^{-(1\mp c)\lambda} - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \pm \frac{E_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-2)!} + \frac{E_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m-1)!} \right\} \{ (1-2\nu) \\
 &+ (1\mp c)\lambda \} e^{-(1\mp c)\lambda} \left[ J_2'(\lambda r) d\lambda + \int_0^{\infty} \lambda \left[ \phi_6(\lambda) \sinh(1\mp c)\lambda \pm \phi_6^*(\lambda) \cosh(1\mp c)\lambda \right. \right. \\
 &\left. \left. + (1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \pm \frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{D_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} \right\} e^{-(1\mp c)\lambda} \right] 2 \frac{J_2(\lambda r)}{r} d\lambda = 0 \dots\dots\dots(31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mp \left( \frac{\tau_{\theta z}}{k \sin 2\theta} \right)_{z=\pm 1-c} = &\int_0^{\infty} \lambda \left[ \phi_8(\lambda) \sinh(1\mp c)\lambda + \{ -(1-2\nu) \sinh(1\mp c)\lambda \right. \\
 &+ (1\mp c)\lambda \cosh(1\mp c)\lambda \} \phi_5(\lambda) \pm \phi_5^*(\lambda) \cosh(1\mp c)\lambda \pm \{ -(1-2\nu) \cosh(1\mp c)\lambda \\
 &+ (1\mp c)\lambda \sinh(1\mp c)\lambda \} \phi_5^*(\lambda) - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{C_{2m}\lambda^{2m}}{(2m-2)!} \pm \frac{C_{2m+1}\lambda^{2m+1}}{(2m-1)!} \right\} e^{-(1\mp c)\lambda} \\
 &+ 2(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \pm \frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{D_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m)!} \right\} e^{-(1\mp c)\lambda} - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \pm E_{2m} \frac{\lambda^{2m-1}}{(2m-2)!} + \frac{E_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m-1)!} \right\} \\
 &\times \{ (1-2\nu) \pm (1\mp c)\lambda \} e^{-(1\mp c)\lambda} \left[ 2 \frac{J_2(\lambda r)}{r} d\lambda + \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[ \phi_6(\lambda) \sinh(1\mp c)\lambda \pm \phi_6^*(\lambda) \cosh(1\pm c)\lambda \right. \right. \\
 &\left. \left. + (1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \pm \frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{D_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m)!} \right\} e^{-(1\mp c)\lambda} \right] J_2'(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots(32)
 \end{aligned}$$

式(30)で  $J_2(\lambda r)$ , 式(31)で  $J_2'(\lambda r)$ ,  $J_2(\lambda r)/r$ , 式(32)で  $J_2(\lambda r)/r$ ,  $J_2'(\lambda r)$  の係数を零に等置する。式(31)と式(32)から得られる関係式は同一であるので, 結局六つの関係式から未知関数  $\phi_8(\lambda)$ ,  $\phi_5(\lambda)$ ,  $\phi_6(\lambda)$ ,  $\phi_8^*(\lambda)$ ,  $\phi_5^*(\lambda)$ ,  $\phi_6^*(\lambda)$  が求まり以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 (\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2) \phi_8(\lambda) = &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{2m}}{(2m-2)!} \lambda^{2m} [(3-4\nu-2\lambda)(\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) \\
 &+ e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda - 2\lambda \cosh 2\lambda c) + 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{2m+1}}{(2m-1)!} \lambda^{2m+1} [(3-4\nu \\
 &- 2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c - 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c + 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda)] \\
 &- 2(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} [(3-4\nu-2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c - 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c \\
 &+ 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda)] - 2(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} [(3-4\nu \\
 &- 2\lambda) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) + e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda - 2\lambda \cosh 2\lambda c) + 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{2m}}{(2m-2)!} \lambda^{2m-1} [\{ 4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda^2 \} \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c \\
 &+ 4\lambda^2 c \{ (3-4\nu) + \cosh 2\lambda \cosh 2\lambda c \} - 2\lambda^2 c^2 \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{2m+1}}{(2m-1)!} \lambda^{2m} [\{ 4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda^2 \} (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) \\
 &+ 4\lambda^2 c (\cosh 2\lambda \sinh 2\lambda c - \lambda c) - 2\lambda^2 c^2 \sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c] + 2D_1 [4(1-\nu)(1-2\nu)\lambda \\
 &- 2(1-c^2)\lambda^3 - \{ (1-2\nu)^2 + (1+c^2) \} \sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2(1-2\nu)\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c \\
 &+ 2\lambda^2 c \cosh 2\lambda \sinh 2\lambda c + 2(1-2\nu)\lambda \cosh 2\lambda \cosh 2\lambda c \\
 &- 2(3-4\nu)\lambda^2 \left\{ \frac{\cosh 2\lambda + \cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} \right\} - 4\lambda^3 c \frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} + 4\lambda^3 \frac{(1 + \cosh 2\lambda \cosh 2\lambda c)}{\sinh^2 2\lambda} ] \dots\dots\dots(33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2) \phi_5(\lambda) = &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2C_{2m}}{(2m-2)!} \lambda^{2m} (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} 2 \frac{C_{2m+1}}{(2m-1)!} \lambda^{2m+1} \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c - 4(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c \\
 &- 4(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{2m}}{(2m-2)!} \lambda^{2m-1} [(3-4\nu \\
 &+ 2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c - 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda)] \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{2m+1}}{(2m-1)!} \lambda^{2m} [(3-4\nu+2\lambda) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) - e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda - 2\lambda \cosh 2\lambda c)
 \end{aligned}$$

$$-2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] + 2D_1 \left[ -(1-2\nu) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda) - \lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + \lambda (\cosh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 1) - 2\lambda^2 \frac{(\cosh 2\lambda + \cosh 2\lambda c)}{\sinh 2\lambda} \right] \dots\dots\dots(34)$$

$$\psi_6(\lambda) = -(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{D_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} \frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} + \frac{D_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} \frac{e^{-2\lambda} + \cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} \right] \dots\dots\dots(35)$$

$$(\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2) \psi_3^*(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{2m} \lambda^{2m}}{(2m-2)!} [(3-4\nu-2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c - 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c + 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda)] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{2m+1}}{(2m-1)!} \lambda^{2m+1} [(3-4\nu-2\lambda) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda) - e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda + 2\lambda \cosh 2\lambda c) + 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] - 2(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} [(3-4\nu-2\lambda) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda) - e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda + 2\lambda \cosh 2\lambda c) + 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] - 2(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} [(3-4\nu-2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c - 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c + 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c - 2\lambda)] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{2m}}{(2m-2)!} \lambda^{2m-1} [(4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda^2) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda) + 4\lambda^2 c (\cosh 2\lambda \sinh 2\lambda c + \lambda c) - 2\lambda^2 c^2 \sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{2m+1}}{(2m-1)!} \lambda^{2m} [(4(1-\nu)(1-2\nu) - 2\lambda^2) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c - 4\lambda^2 c \{ (3-4\nu) - \cosh 2\lambda \cosh 2\lambda c \} - 2\lambda^2 c^2 \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] + 2D_1 \left[ -2(1-2\nu) \lambda c \sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda^2 c \cosh 2\lambda \cosh 2\lambda c - \{ (1-2\nu)^2 + (1+c^2) \lambda^2 \} \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + 2(1-2\nu) \cosh 2\lambda \sinh 2\lambda c + 2\lambda^2 \{ 2\lambda \coth 2\lambda - (3-4\nu) \} \frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} - 4\lambda^3 c \frac{\cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} \right] \dots\dots\dots(36)$$

$$(\sinh^2 2\lambda - 4\lambda^2) \psi_5^*(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2C_{2m}}{(2m-2)!} \lambda^{2m} \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + \sum_{m=1}^{\infty} 2 \frac{C_{2m+1}}{(2m-1)!} \lambda^{2m+1} \times [\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda] - 4(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} [\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda] - 4(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{2m} \lambda^{2m-1}}{(2m-2)!} [(3-4\nu + 2\lambda) (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda) + e^{-2\lambda} (\sinh 2\lambda + 2\lambda \cosh 2\lambda c) - 2\lambda c \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{2m+1} \lambda^{2m}}{(2m-1)!} [(3-4\nu + 2\lambda) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + 2\lambda e^{-2\lambda} \sinh 2\lambda c - 2\lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda)] + 2D_1 \left[ -(1-2\nu) \sinh 2\lambda \sinh 2\lambda c + \lambda \cosh 2\lambda \sinh 2\lambda c - \lambda c (\sinh 2\lambda \cosh 2\lambda c + 2\lambda) - 2\lambda^2 \frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} \right] \dots\dots\dots(37)$$

$$\psi_6^*(\lambda) = -(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{D_{2m}}{(2m-1)!} \lambda^{2m-1} \frac{-e^{-2\lambda} + \cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} + \frac{D_{2m+1}}{(2m)!} \lambda^{2m} \frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} \right] \dots\dots\dots(38)$$

式 (28), (29) および式 (33)~(38) が満足されれば,  $C_m, D_m, E_m$  に無関係に厚板両面の境界条件は満足される. 次に球か面における境界条件を満足させるために, 応力関数 [VI], [VI]\* を公式 (19), (20) を用いて球座標で表し, 両者をまとめて次のように書く.

$$[VII] \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = k \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n R^n P_n^2(\mu) \cos 2\theta, \quad \varphi_3 = k \sum_{n=2}^{\infty} \zeta_n R^n P_n^2(\mu) \cos 2\theta \\ \varphi_1 = k \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n R^n P_n^1(\mu) \cos \theta, \quad \lambda_3 = k \sum_{n=2}^{\infty} \kappa_n R^n P_n^2(\mu) \sin 2\theta \\ \varphi_2 = -k \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n R^n P_n^1(\mu) \sin \theta \end{array} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

ただし  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n, \kappa_n$  は  $n$  が偶数, 奇数によって異なり, 次に示すものである.

$$\left. \begin{aligned} \xi_{2n} &= \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^\infty \phi_3(\lambda) \lambda^{2n} d\lambda, & \xi_{2n+1} &= \frac{1}{(2n+3)!} \int_0^\infty \phi_3^*(\lambda) \lambda^{2n+1} d\lambda \\ \eta_{2n} &= \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^\infty \phi_4^*(\lambda) \lambda^{2n} d\lambda, & \eta_{2n+1} &= \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^\infty \phi_4(\lambda) \lambda^{2n+1} d\lambda \\ \zeta_{2n} &= \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^\infty \phi_5^*(\lambda) \lambda^{2n+1} d\lambda, & \zeta_{2n+1} &= \frac{1}{(2n+3)!} \int_0^\infty \phi_5(\lambda) \lambda^{2n+2} d\lambda \\ \kappa_{2n} &= \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^\infty \phi_6(\lambda) \lambda^{2n} d\lambda, & \kappa_{2n+1} &= \frac{1}{(2n+3)!} \int_0^\infty \phi_6^*(\lambda) \lambda^{2n+1} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

そこで応力関数 [V], [VII] より応力成分を求めて, 球か面の境界条件を満足させると以下のようになる.

$$\left( \frac{\sigma_R}{k \cos 2\theta} \right)_{R=a} = \frac{2}{3} (5-\nu) \frac{D_1}{a^3} P_2^2(\mu) + \sum_{n=2}^\infty \left[ (n+1)(n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} - \frac{2(1-2\nu)(n+2)}{n} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} \right. \\ + \frac{(n-2)}{2n-1} \{n(n+3)-2\nu\} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+2)(n+3)}{2n+3} (n+5-4\nu) \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} + n(n-1) \xi_n a^{n-2} \\ + \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} \eta_{n-1} a^{n-2} - \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} \eta_{n+1} a^n + \frac{(n-1)(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \zeta_{n-1} a^n \\ \left. + (n+3) \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} \zeta_{n+1} a^n + 4(n-1) \kappa_n a^{n-2} \right] P_n^2(\mu) = -\frac{a}{30} P_3^2(\mu) - \frac{c}{6} P_2^2(\mu) \dots\dots\dots(41)$$

$$\left( \frac{\tau_{R\varphi}}{k \sin \varphi \cos 2\theta} \right)_{R=a} = \sum_{n=2}^\infty \left[ (n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(1-2\nu)(n-3)(n+2)}{2n(2n+3)} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} \right. \\ + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} - (n-1) \xi_n a^{n-2} + \frac{(1-\nu)n}{2n-1} \eta_{n-1} a^{n-2} \\ - \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} \eta_{n+1} a^n - (n-2) \frac{(n-3+2\nu)}{2n-1} \zeta_{n-1} a^{n-2} - (n+3) \frac{(n-1+2\nu)}{2n+3} \zeta_{n+1} a^n \\ - \left\{ n(n-2)+4 - \frac{(n-2)^2(n+2)}{2n-1} \right\} \frac{\kappa_n}{2} a^{n-2} + \frac{n(n+3)(n+4)}{2(2n+3)} \kappa_{n+2} a^n \left. \right] P_n^{2'}(\mu) \\ - \sum_{n=3}^\infty \frac{(n+3-4\nu)}{2(2n-1)} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} P_n^{2'}(\mu) + \sum_{n=2}^\infty \left[ (1-2\nu) \frac{(n+1)(n+2)}{2(n-1)} \frac{D_n}{a^{n+2}} \right. \\ - 2(1-\nu)(n+2) \frac{E_n}{a^{n+2}} - (1-\nu)(n-1) \eta_n a^{n-1} + 2(1-\nu)(n-1) \zeta_n a^{n-1} \\ \left. + \frac{n(n-1)(n+3)}{2} \kappa_{n+1} a^{n-1} \right] P_n^2(\mu) = -\frac{a}{60} \{5P_2^2(\mu) - P_3^{2'}(\mu)\} + \frac{c}{12} P_2^{2'}(\mu) \dots\dots\dots(42)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\tau_{R\theta} \sin \varphi}{k \sin 2\theta} \right)_{R=a} = \sum_{n=2}^\infty \left[ (n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(1-2\nu)(n-3)(n+2)}{2n(2n+3)} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} \right. \\ + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} - (n-1) \xi_n a^{n-2} \\ + \frac{(1-\nu)n}{2n-1} \eta_{n-1} a^{n-2} - \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} \eta_{n+1} a^n - \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} \zeta_{n-1} a^{n-2} \\ - \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} \zeta_{n+1} a^n - \left\{ n(n-2)+4 - \frac{(n-2)^2(n+2)}{2n-1} \right\} \frac{\kappa_n}{2} a^{n-2} \\ \left. + \frac{n(n+3)(n+4)}{2(2n+3)} \kappa_{n+2} a^n \right] P_n^2(\mu) - \sum_{n=3}^\infty \frac{(n+3-4\nu)}{2(2n-1)} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} P_n^2(\mu) = \frac{a}{60} P_3^2(\mu) + \frac{c}{12} P_2^2(\mu) \dots\dots\dots(43)$$

式 (41) で  $P_n^2(\mu)$ , 式 (42) で  $P_n^{2'}(\mu)$ ,  $P_n^2(\mu)$ , 式 (43) で  $P_n^2(\mu)$  の係数を零に等置すれば,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$  に関する無限連立一次方程式が得られる. この場合式 (42) で  $P_n^{2'}(\mu)$  の係数を零に等置して得られる係数方程式は式 (43) から得られる方程式と同一である. これらを  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$  について解けば非軸対称解は完全に決まる. そして全体の変位および応

力は応力関数 [I]\*, [II], [III], [III]\*, [V], [VI], [VI]\* を重ね合わせて得られる.

### 3. 数 値 計 算

ポアソン比  $\nu=0.3$  として偏心量  $c$  が 0.25, 0.5 の 2 とおりの場合について, それぞれ球か半径を  $a=0.05 \sim 0.45$  および  $a=0.05 \sim 0.35$  に変化させて数値



計算を行った. 計算に際して式 (22), (40) の積分が必要であるが, これらは前報<sup>(2)</sup>の結果を用いた. すべての無限級数の収束は良好であるが, 偏心量および球か半径が大きくなるにつれてひどく悪くなる. そこで最終に得られる応力値が有効数字 3 けた以上になるように,  $n=13, 14$  で無限級数の項を打ち切った. 応力分布に及ぼす偏心量の影響を求めるために, 図 3~7 に偏心量  $c=0.25$  の場合を図 8~12 に  $c=0.5$  の場合を示した. 図 3, 4 はそれぞれ  $\theta=0, \pi/2$  における球か面の  $\sigma_\varphi$  の分布を示したものである. 図 3 では球かの頂点  $\varphi=0^\circ$  で,  $\sigma_\varphi$  は引張応力が極大となり  $\varphi=70^\circ\sim 90^\circ$  付近で圧縮応力が極大となる. また  $\varphi=40^\circ, 90^\circ, 130^\circ$  近傍で球か半径の大きさを変えた

曲線群が交わる. 図 4 では  $\sigma_\varphi$  の値は全体に小さく球か半径が小さい場合は引張応力であるが,  $a=0.3$  を越えると  $A'$  点近傍では圧縮応力となる. 図 5, 6 はそれぞれ  $\theta=0, \pi/2$  の場合の球か面の  $\sigma_\theta$  の分布である.

図 5 において  $\sigma_\theta$  の分布は  $\sigma_\varphi$  の分布と似ているが, その値は全体に小さく  $\varphi=0^\circ, 180^\circ$  近傍を除いて圧縮応力となっている. 図 6 においては  $\varphi=90^\circ$  をずれた位置で曲線群が 1 点で交わっていて, この交点

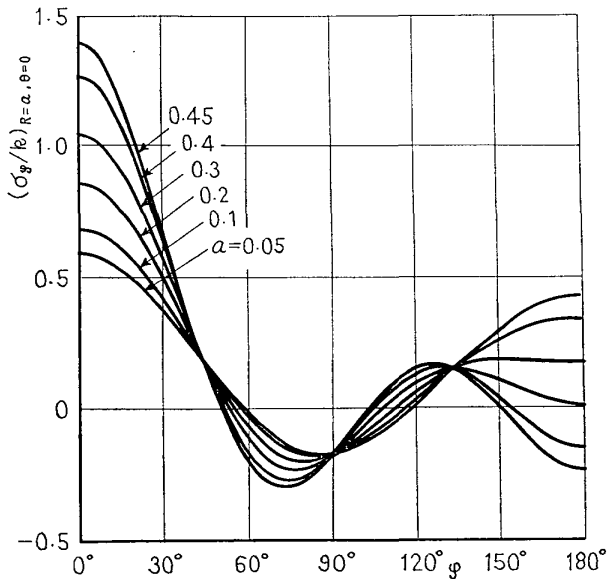


図 3 球か面の  $\sigma_\varphi$  の分布 ( $\theta=0, c=0.25$ )

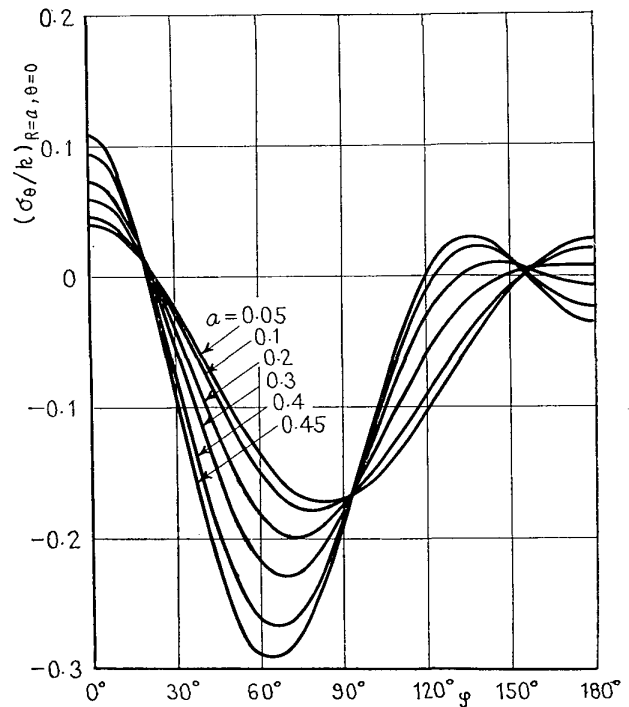


図 5 球か面の  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=0, c=0.25$ )

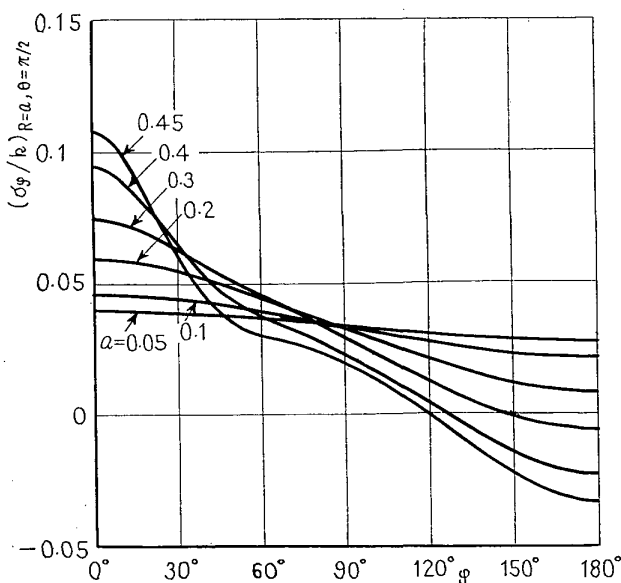


図 4 球か面の  $\sigma_\varphi$  の分布 ( $\theta=\pi/2, c=0.25$ )

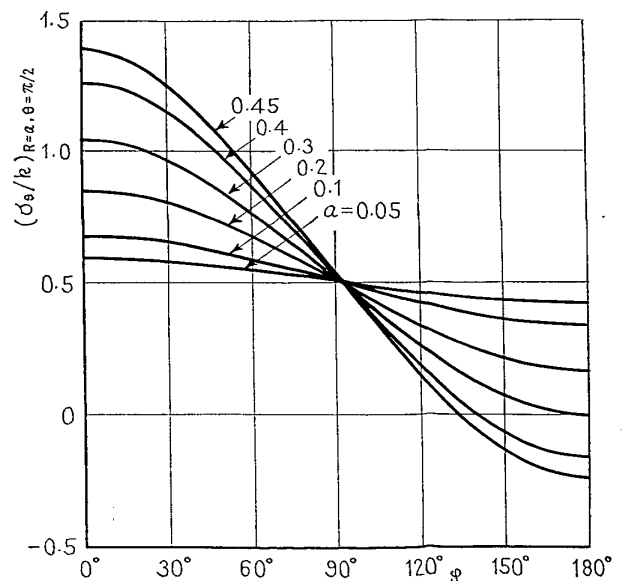


図 6 球か面の  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=\pi/2, c=0.25$ )

の  $\sigma_\theta$  は  $\sigma_\theta/k=0.5$  である。球かが板中央にある場合<sup>(3)</sup>には  $\varphi=90^\circ$  で  $\sigma_\theta=0$  で、かつ曲線群がこれを境に逆対称に分布したのに比べ、偏心の影響が現れていることが分かる。図7は  $z>0$  における  $z$  軸上の  $\sigma_\varphi$  の分布で、球かが小さいときは球か近傍を除いて直線的に分布するが、球か半径が大きくなるにつれ直線性はくずれる。

図8~12は  $c=0.5$  の場合であり、その分布傾向は  $c=0.25$  の場合と似ているが、全体に球か半径の

大きさによる影響が顕著で応力値は  $c=0.25$  の場合よりも高くなっている。以上の計算結果より最大引張応力は、球か面上のA点か厚板上面のB点のいずれかに生ずることが分かる。

図13はこれらの値に及ぼす球か半径の影響を示したものである。A点の引張応力  $(\sigma_\varphi)_{R=a, \varphi=0, \theta=0}$  を  $\sigma_A$  とすれば、 $\sigma_A$  は球か半径が零に近づけば、

$$\frac{\sigma_A}{k} = \frac{27-15\nu}{2(7-5\nu)} c$$

となり、球か半径が大きくなるにつれて増大し偏心量  $c$  が大きい程その増加率は高い。これに対しB点の引張応力  $(\sigma_\varphi)_{z=1, \varphi=0, \theta=0}$  を  $\sigma_B$  とすれば  $\sigma_B$  は球か半径が零に近づけば  $\sigma_B=k$  となり、球か半径が増大するにつれ減少するが  $c=0.5$  の場合は球か半径が大き

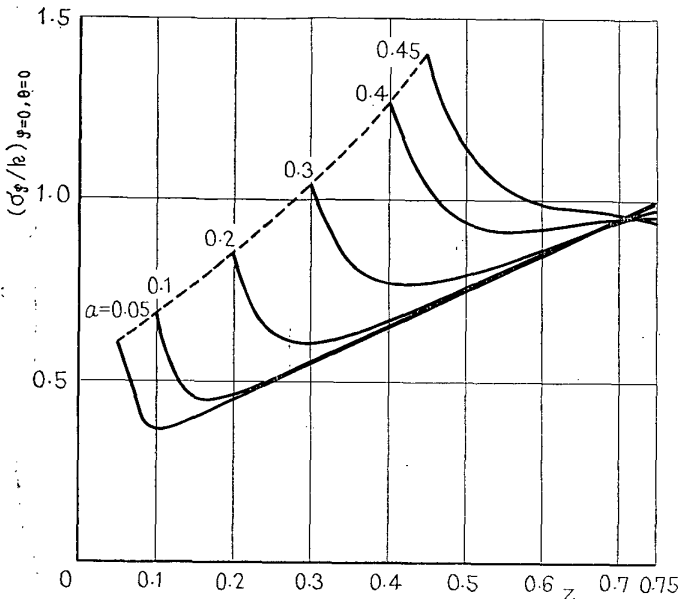


図7 z軸上の  $\sigma_\varphi$  の分布 ( $\varphi=0, \theta=0, c=0.25$ )

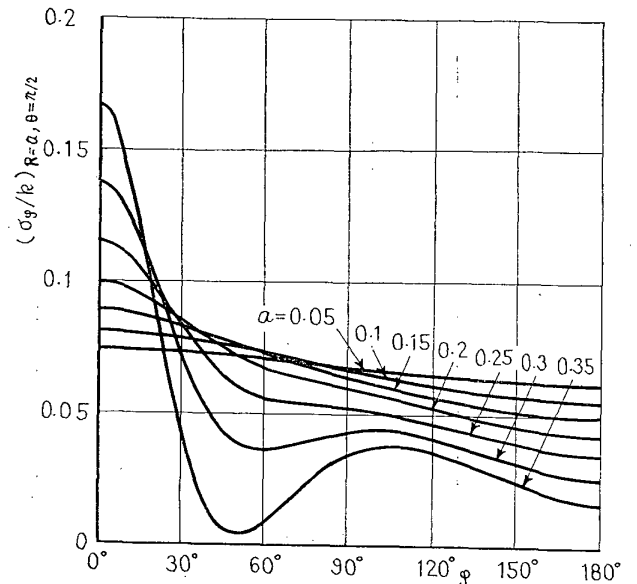


図9 球か面の  $\sigma_\varphi$  の分布 ( $\theta=\pi/2, c=0.5$ )

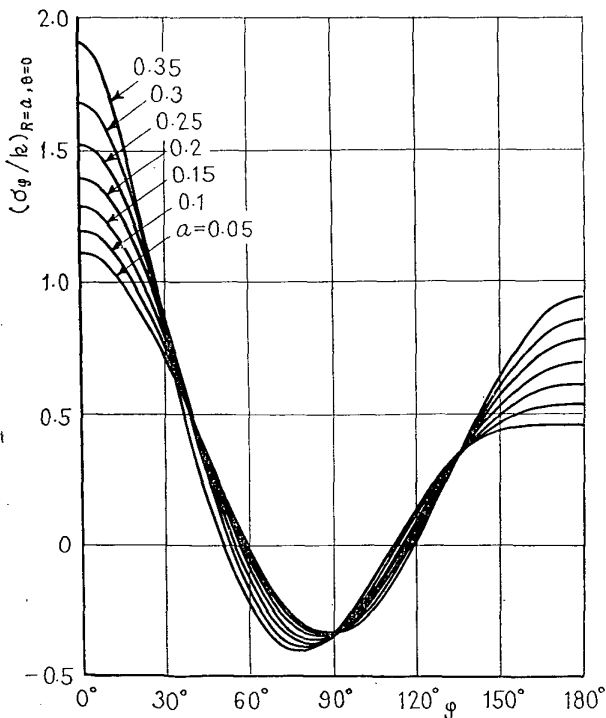


図8 球か面の  $\sigma_\varphi$  の分布 ( $\theta=0, c=0.5$ )

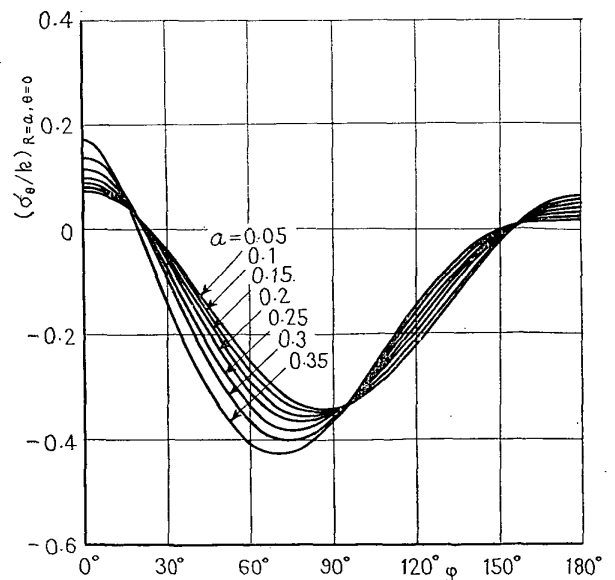


図10 球か面の  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=0, c=0.5$ )

くなくてもあまり減少しない。また同図に 2.2 節で得られた円周曲げの結果を併せ示した。円周曲げの場合  $\sigma_A$  は球か半径が零に近づけば  $\sigma_A/k = \{12/(7-5\nu)\}c$  となり、 $a$  に対する分布傾向は一軸回りの曲げの場合と似ている。

$\sigma_B$  については  $a$  が零に近づけば  $\sigma_B = k$  となり、 $a$  が大きくなるにつれ  $\sigma_B$  は減少するが  $c=0.5$  の場合には減少の度合が大きい。また円周曲げと一軸回りの曲げの結果を比較すれば、円周曲げのほうが  $\sigma_A$  につい

てはわずかに大きい。そして偏心量  $c=0$  の結果<sup>(3)</sup>を含めると、偏心量が大きくなる程円周曲げと一軸回りの曲げの差異が大きくなる。 $\sigma_B$  については円周曲げのほうが小さく、 $c=0.5$  の場合にはこの差が大きい。最大引張応力に注目すれば  $c=0$  のときは  $a \approx 0.5$  を境に  $\sigma_B$  と  $\sigma_A$  の大きさが逆転したが、 $c=0.25$  の場合  $a \leq 0.25$  では厚板上面の  $\sigma_B$  が最大応力となり、 $a \geq 0.25$  で球か面の  $\sigma_A$  が最大応力となる。 $c=0.5$  の場合には常に球か面の  $\sigma_A$  が最大応力となる。なお C. B. Ling ら<sup>(4)</sup>は円周曲げが作用する場合を解析し、ポアソン比  $\nu=0.25$  として  $c=0.25$ ,  $a=0.25$  の場合のみ結果を示しており、この結果と本解析で得られた軸対称解の結果と比較したのが表 1 であり、ポアソン比の差異を考慮すればほぼ一致している。

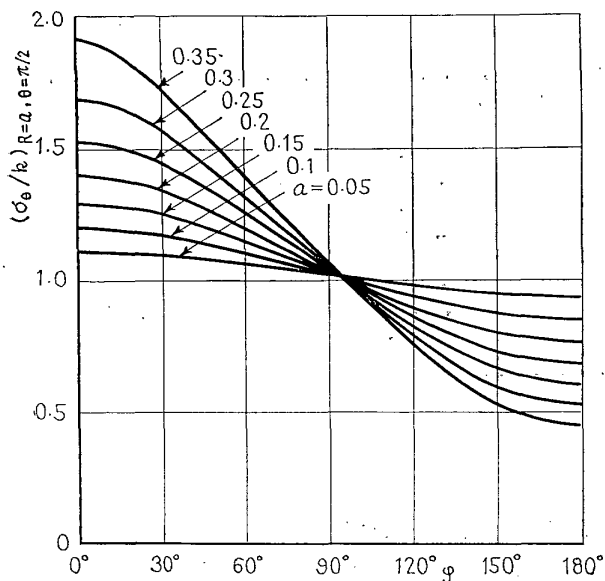


図 11 球か面の  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta = \pi/2, c = 0.5$ )

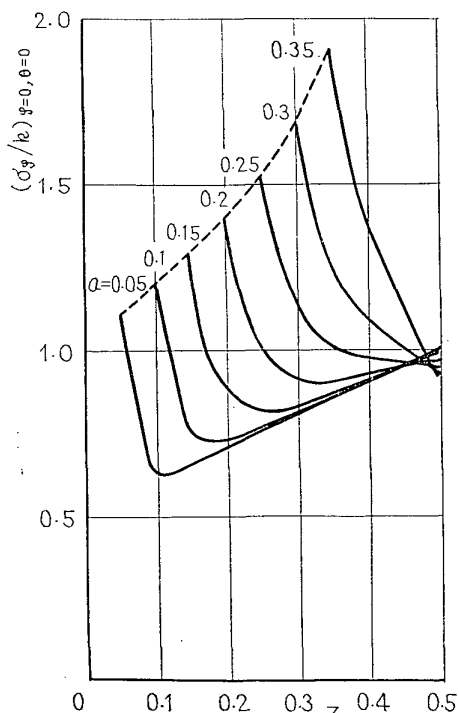


図 12 z 軸上の  $\sigma_r$  の分布 ( $\phi = 0, \theta = 0, c = 0.5$ )

表 1 本結果と既知の結果の比較 [円周曲げ ( $\sigma_\phi/k$ )\_{r=0}]

位置	Ling ら ( $\nu=0.25$ )	本解 ( $\nu=0.3$ )
A 点	0.976	1.005
A' 点	0.080	0.093
B 点	0.939	0.965

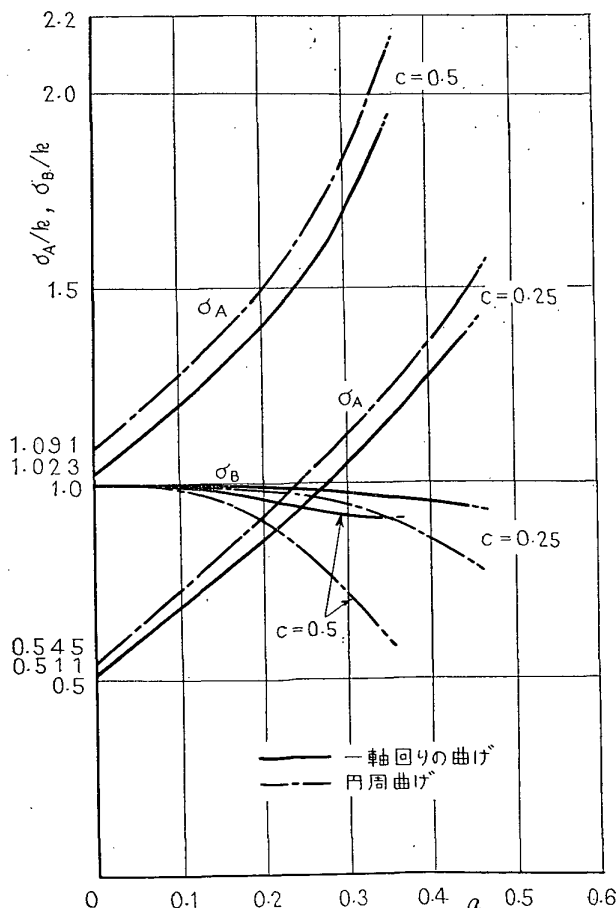


図 13 球か半径による最大引張応力の変化

## 4. 結 言

1 個の球かが中央より偏心して存在する無限厚板が、一軸回りに曲げモーメントを受ける非軸対称問題を三次元弾性理論に基づいて厳密に解析した。そして理論解に基づいて数値計算を行い、球か近傍の応力分布、偏心量および球か半径が最大引張応力に及ぼす影響などを明らかにし、また円周曲げを受ける場合と比較した。主な結果を述べると次のようである。

(1) 球かが厚板中央にある場合には、球か面の応力は  $\varphi=90^\circ$  に対し逆対称に分布したが、球かが偏心して存在する場合には偏心の影響により対称性はなくなり複雑な分布となる。

(2) 球か面に生ずる引張応力の最大値は、偏心量および球か半径が大きくなるにつれて増大し、厚板上面に生ずる引張応力の最大値は偏心量、球か半径が大きくなるにつれて減少する。そして偏心量  $c=0.25$  の場合は  $a=0.25$  において両者はほぼ一致する。 $c=0.5$  の場合は常に球か面の最大引張応力のほうが大き

い。

(3) 円周曲げの場合は一軸回りの曲げの場合に比べて、球か面の応力はわずかに大きく、厚板上面の応力は小さい。そしてその差は偏心量が増す程大きくなる。

数値計算には、東京大学大型電子計算機センターの HITAC 8800 および東京工業大学情報処理センターの HITAC 8700 を使用した。なお本研究は昭和 48 年度文部省科学研究費の補助により行われたもので付記して謝意を表する。

## 文 献

- (1) Ling, C.B. and Tsai, C.P., *Acta Mechanica*, 7-2/3 (1969), 169; 7-4 (1969), 262.
- (2) 土田・ほか 3 名, 機論, 41-352 (昭 50-12), 3366.
- (3) 土田・ほか 2 名, 文献 (2) の 3379 ページ.
- (4) 宮本, 機論, 23-131 (昭 32-7), 431.
- (5) 土田・ほか 2 名, 機論, 42-353 (昭 51-1), 46.
- (6) Robin L., *Fonctions Spheriques de Legendre et Fonctions Spheroidales*, Tome 1 (1957), 161, Gauthier-Villars.
- (7) Sneddon, I.N., *Fourier Transform*, (1951), 514, McGraw-Hill.

## 討 論

〔質問〕 齋藤憲司 (京都工芸繊維大学工芸学部)

(1) 式 (6) の意味を説明していただきたい。また式 (7) の  $\varphi_0$  は式 (5) を用いた座標変換, あるいは式 (16) によっても得られないように思われるがどうか。

(2) 球か面における  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_\theta$  などの応力成分について、詳細な数値計算を行っているが、球か面における主応力, 最大せん断応力などを求めておけば、表面近傍における欠陥などによる破壊現象の追求に対して、本研究の結果をいっそう意義あらしめることになると思われるが、これについてどうお考えか。

(3) 付図 1 のような曲げを受ける部材の表面付近にある欠陥の応力集中などを考える場合、正確に言えばこの場合は応力こう配を有しているが、これを近似的に一軸引張りを受ける半無限体と考えれば、著者らの既報の論文(付1)の結果を適用できると思う。そこで本論文の結果と上記論文の結果から、このような近似の可否および近似の限界などについてご意見をうかがいたい。

〔回答〕 (1) 使用する応力関数によっては、調和関数を座標変換しただけでは新座標における応力状態を表さない。 $\varphi_0$  を用いる場合には、座標変換によ

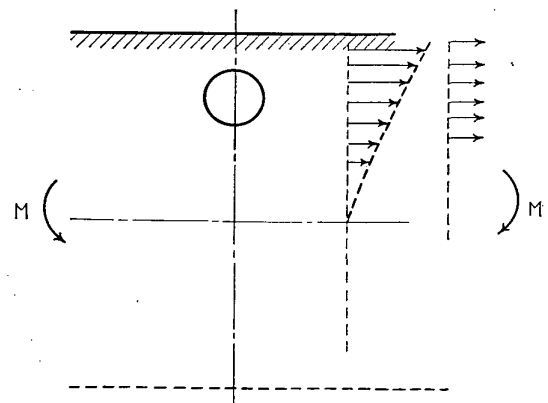
って  $\varphi_0=c\varphi_{31}$  において得られる量が付加された形になる<sup>(4)(5)</sup>。式 (5), (6) を用いて式 (7) を導くことはできる。ただし

$$\varphi_0 = -\frac{k}{12(1+\nu)} [3(3-2\nu)c^2 RP_1(\mu) + 2(2-\nu)c^3]$$

$$\varphi_3 = -\frac{kc^2}{4(1+\nu)}$$

が式 (7) に追加された形になるが、これらは剛体変位を表すので除いた。

(2) 球か面における主応力, 主せん断応力を求めることも有意義であると思う。必要ならば本論文で導



付図 1

(付 1) 土田・中原, 機論, 40-330 (昭 49-2), 285.

かれた式を数値計算すれば得られる。

(3) 球か面上の特定点の公称応力が等しくなるような、引張荷重と曲げ荷重を加えた場合に、その点の集中応力を比較すると、球かが大きくなるにつれてその差は大きくなり、曲げ荷重に対する結果を引張荷重による結果に近似することは無理と思われる。

〔質問〕 阿部 武治 (京都大学工学部)

直観的に言って、もし最初図 1 のような形状を持つ厚板に曲げモーメントが加わると、板はある曲率半径で曲り、また球かの形状も真円からずれ、特に AB の厚さが薄い場合などではこの部分の材料が落ち込むような形になり、このずれが大きくなると思われる。しかしながら、式 (4) あるいは境界条件式 (9), (10) からすると、本解析ではむしろ曲げモーメントが負荷

された状態で、厚板の上下面が平面であり、球かも真円であると仮定していると思われる。もしそうであるとすると、本解析結果を最初に図 1 の形状を持つ厚板に適用したとき、その誤差は無視しうる程度と考える良いか。

〔回答〕 三次元弾性理論では、力のつりあいは、変形前の状態でとると仮定しているのでこの場合力のつりあいをとるときは、厚板は平面、球かは真円の状態で考える。変形が微小のときはこの仮定による誤差は無視できる。しかしご指摘のように AB の厚さが極端に薄くなり、変形が大きくなる場合にはこの誤差は無視できなくなり、有限変形理論による解析が必要である。