539.382 : 539.4.013

偏心球かを有する厚板の1軸引張り*

土田栄一郎**, 戸川　悟***, 中原一郎****, 小玉正雄**

1. 緒　言

1個の球かが中央に存在する無限厚板に，軸対称，非軸対称を問わず種々の外力が作用する問題は既に幾人かの研究者によって解析されてきた．球かが厚板の中央より偏心する場合は強度設計上からも重要であり，1958年 N. Kaufman[(1)]は応力関数を使用しないで解析する方法を示したが具体的な計算は行っていない．さらに1969年に C. B. Ling-C. P. Tsai[(2)]は球かあるいは球状剛介在物が偏心して存在する厚板が，2軸一様引張りおよび円周曲げを受ける問題を Love の重調和応力関数を用いて解析した．これらの解は軸対称荷重が作用する場合で，非軸対称荷重が作用する場合についての研究はないようである．著者らは先に非軸対称荷重を受ける球かを有する半無限体[(3)]と厚板[(4)(5)]について，6個の調和応力関数に異なる座標系で表された調和方程式の変数分離解を与え，それらを座標変換することによって球面と平面の境界条件を完全に満足させる方法を示した．本研究では偏心球かを有する厚板が，1軸引張りを受ける非軸対称問題を，三次元弾性理論に基づいて厳密に解析し，応力分布および最大引張応力に及ぼす偏心量および球か半径の大きさの影響を明らかにした．

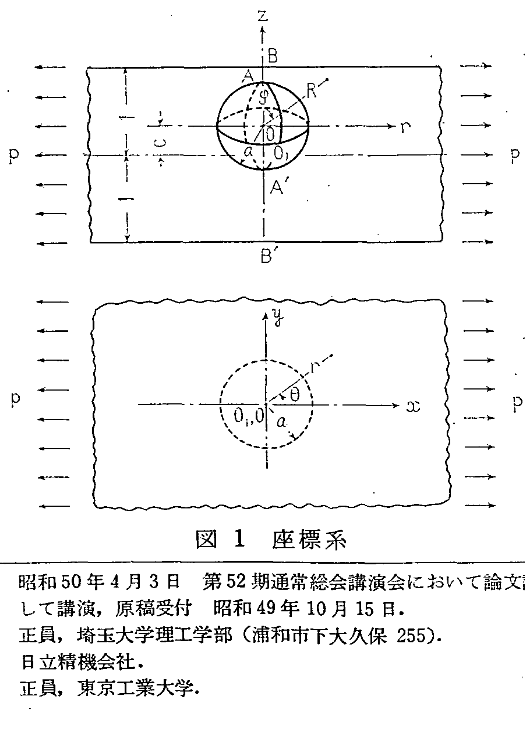

図 1　座標系

* 昭和50年4月3日　第52期通常総会講演会において論文講演として講演，原稿受付　昭和49年10月15日．
** 正員，埼玉大学理工学部（浦和市下大久保 255）．
*** 日立精機会社．
**** 正員，東京工業大学．

2. 解　析　法

2·1 応力関数と境界条件　図1に示されるように板厚の半分を単位として，すべての長さの基準にとり，球か半径を a，球かの板中央面からの偏心量を c とする．さて直角座標 (x, y, z) のもとで6個の応力関数 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \lambda_3$ を用いて x, y, z 方向の変位 u_x, v_y, w_z を次のように表すと，これらは物体力のない場合の三次元弾性基礎方程式を満足する解となる．ここでは便宜上応力関数をわけて表示したが，変位はこれらを一次結合したものである．

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad 2Gu_x=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x},\quad 2Gv_y=\frac{\partial\varphi_0}{\partial y},\quad 2Gw_z=\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\\
&(2)\quad 2Gu_x=x\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-(3-4\nu)\varphi_1,\quad 2Gv_y=x\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\\
&\qquad 2Gw_z=x\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\\
&(3)\quad 2Gu_x=y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x},\quad 2Gv_y=y\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-(3-4\nu)\varphi_2\\
&\qquad 2Gw_z=y\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\\
&(4)\quad 2Gu_x=z\frac{\partial\varphi_3}{\partial x},\quad 2Gv_y=z\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\\
&\qquad 2Gw_z=z\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}-(3-4\nu)\varphi_3\\
&(5)\quad 2Gu_x=x\frac{\partial\varphi_4}{\partial z},\quad 2Gv_y=y\frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\\
&\qquad 2Gw_z=-x\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}-y\frac{\partial\varphi_4}{\partial y}-4(1-\nu)\varphi_4\\
&(6)\quad 2Gu_x=2\frac{\partial\lambda_3}{\partial y},\quad 2Gv_y=-2\frac{\partial\lambda_3}{\partial x},\quad w_z=0
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで $\nabla^2\varphi_0=\nabla^2\varphi_1=\nabla^2\varphi_2=\nabla^2\varphi_3=\nabla^2\varphi_4=\nabla^2\lambda_3=0$，$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ であり ν はポアソン比，G は横弾性係数である．

まずO点を原点として応力関数 φ_0, φ_3 に次のような調和関数を与える．

$$〔\mathrm{I}〕\left\{\begin{aligned}\varphi_0&=\frac{p}{4}\frac{1-\nu}{1+\nu}(x^2+y^2-2z^2)+\frac{p}{4}(x^2-y^2)\\ \varphi_3&=-\frac{p}{2(1+\nu)}z\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

これより得られる変位および応力成分は

$$\left.\begin{aligned}&u_x=\frac{p}{E}x,\quad v_y=-\nu\frac{py}{E},\quad w_z=-\nu\frac{pz}{E}\\ &\sigma_x=p,\quad \sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

であり，これは厚板を無限遠方において単位面積当たり p の力で x 軸方向に一様に引張った場合の解である．ここで E は縦弾性係数である．この場合厚板内に原点Oを中心とする半径 a の球面を考えれば，この面に生じている応力は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R=a}&=\frac{1}{3}\{P_0(\mu)-P_2(\mu)\}+\frac{P_2{}^2(\mu)}{6}\cos 2\theta\\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R=a}&=\frac{P_2'}{6}(\mu)\sin\varphi-\frac{P_2{}^{2\prime}}{12}(\mu)\sin\varphi\cos 2\theta\\ \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R=a}&=-\frac{P_2{}^2(\mu)}{6\sin\varphi}\sin 2\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここで $P_n(\mu), P_n{}^m(\mu)$ はそれぞれ n 次のルジャンドル関数およびルジャンドル陪関数で $\mu=\cos\varphi$ である．

それゆえに無限遠方ですべての変位および応力が消失し，以下の境界条件を満足する解を導いて〔I〕の解に重ね合わせれば，偏心球かを有する厚板の1軸引張りに対する解が得られる．

（i）厚板の上下面 $z=\pm 1-c$ で

$$(\sigma_z)_{z=\pm1-c}=(\tau_{rz})_{z=\pm1-c}=(\tau_{z\theta})_{z=\pm1-c}=0\cdots(5)$$

（ii）球か面 $R=a$ で

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R=a}&=-\frac{1}{3}\{P_0(\mu)-P_2(\mu)\}-\frac{P_2{}^2(\mu)}{6}\cos 2\theta\\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R=a}&=-\frac{P_2'}{6}(\mu)\sin\varphi+\frac{P_2{}^{2\prime}}{12}(\mu)\sin\varphi\cos 2\theta\\ \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R=a}&=\frac{P_2{}^2(\mu)}{6\sin\varphi}\sin 2\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

式(5)，(6)の境界条件は軸対称部分と非軸対称部分に分離できるから，θ に無関係な境界条件を満足する軸対称解と θ に関係する境界条件を満足する非軸対称解を別々に求めて重ね合わせれば，境界条件（i），（ii）は満足される．

2・2 軸対称解　軸対称解に対する応力関数として以下のような調和関数を与える．

$$〔\mathrm{II}〕\left\{\begin{aligned}\varphi_0&=p\sum_{m=0}^{\infty}A_m\frac{P_m(\mu)}{R^{m+1}}\\ \varphi_3&=p\sum_{m=0}^{\infty}B_m\frac{P_m(\mu)}{R^{m+1}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$〔\mathrm{III}〕\left\{\begin{aligned}\varphi_0&=p\int_0^\infty\psi_1(\lambda)J_0(\lambda r)\cosh\lambda z d\lambda\\ \varphi_3&=p\int_0^\infty\lambda\psi_2(\lambda)J_0(\lambda r)\sinh\lambda z d\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$〔\mathrm{III}〕^*\left\{\begin{aligned}\varphi_0&=p\int_0^\infty\psi_1{}^*(\lambda)J_0(\lambda r)\sinh\lambda z d\lambda\\ \varphi_3&=p\int_0^\infty\lambda\psi_2{}^*(\lambda)J_0(\lambda r)\cosh\lambda z d\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ここで $J_n(\lambda r)$ は第1種ベッセル関数で A_m, B_m および $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, $\psi_1{}^*(\lambda)$, $\psi_2{}^*(\lambda)$ はそれぞれ境界条件から決定される未定係数ならびに未知関数である．

まず応力関数〔II〕を次の公式[(6)]によって円柱座標で表す．

$$\frac{P_m{}^n}{R^{m+1}}(\mu)=\frac{1}{(m-n)!}\int_0^\infty\lambda^m J_n(\lambda r)e^{-\lambda z}d\lambda\quad(z>0)\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

さらに応力関数〔II〕,〔III〕* と合わせて応力成分を求め，厚板両面の境界条件を満足させると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_z}{p}\right)_{z=\pm1-c}&=\int_0^\infty\lambda_2\Big[\psi_1(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda\\&+\{(1\mp c)\lambda\sinh(1\mp c)\lambda-2(1-\nu)\cosh(1\mp c)\lambda\}\\&\times\psi_2(\lambda)\pm\psi_1{}^*(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda\\&\pm\{(1\mp c)\lambda\cosh(1\mp c)\lambda-2(1-\nu)\sinh(1\mp c)\lambda\}\\&\times\psi_2{}^*(\lambda)+\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\frac{A_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m}\\&\pm\frac{A_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m+1}\Big\}e^{-(1\mp c)\lambda}+\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\pm\frac{B_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m-1}\\&+\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m}\Big\}\{2(1-\nu)+(1\mp c)\lambda\}e^{-(1\mp c)\lambda}\Big]\\&\times J_0(\lambda r)d\lambda=0\cdots\cdots\cdots\cdots(11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm\left(\frac{\tau_{rz}}{p}\right)_{z=\pm1-c}&=\int_0^\infty\lambda^2\Big[\psi_1(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda\\&-\{(1-2\nu)\sinh(1\mp c)\lambda-(1\mp c)\lambda\cosh(1\mp c)\lambda\}\\&\times\psi_2(\lambda)\pm\psi_1{}^*(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda\\&\mp\{(1-2\nu)\cosh(1\mp c)\lambda-(1\mp c)\lambda\sinh(1\mp c)\lambda\}\\&\times\psi_2{}^*(\lambda)-\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\frac{A_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m}\\&\pm\frac{A_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m+1}\Big\}e^{-(1\mp c)\lambda}+\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\pm\frac{B_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m-1}\\&+\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m}\Big\}\{(1-2\nu)+(1\mp c)\lambda\}e^{-(1\mp c)\lambda}\Big]\\&\times J_1(\lambda r)d\lambda=0\cdots\cdots\cdots\cdots(12)\end{aligned}$$

式(11)，(12)の四つの式で被積分項を零に等置し，$\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, $\psi_1{}^*(\lambda)$, $\psi_2{}^*(\lambda)$ を求めると以下のようになる．

$$(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)\phi_1(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu-2\nu)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)+e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda-2\lambda\cosh 2\lambda c)$$
$$+2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m+1}[(3-4\nu-2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c$$
$$+2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)]+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m-1}[\{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2\}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c$$
$$+4\lambda^2 c\{(3-4\nu)+\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c\}-2\lambda^2c^2\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m}[\{4(1-\nu)(1-2\nu)$$
$$-2\lambda^2\}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)+4\lambda^2 c(\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c-\lambda c)-2\lambda^2c^2\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c] \quad\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)\phi_2(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2A_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2A_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m+1}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m-1}[(3-4\nu+2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c$$
$$-2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)]+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu+2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)$$
$$-e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda-2\lambda\cosh 2\lambda c)-2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c] \quad\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)\phi_1^*(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu-2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c$$
$$+2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)]+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m+1}[(3-4\nu-2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)$$
$$-e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda+2\lambda\cosh 2\lambda c)+2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m+1}[\{4(1-\nu)(1-2\nu)$$
$$-2\lambda^2\}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)+4\lambda^2 c\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c-2\lambda^2c^2(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)]$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m}[\{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2\}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-4\lambda^2 c\{(3-4\nu)$$
$$-\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c\}-2\lambda^2c^2\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c] \quad\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)\phi_2^*(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2A_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2A_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m+1}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\lambda^{2m-1}[(3-4\nu+2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)+e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda+2\lambda\cosh 2\lambda c)$$
$$-2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu+2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c$$
$$-2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)] \quad\cdots\cdots\cdots(16)$$

次に球か面の境界条件を満足させるために応力関数〔III〕，〔III〕* に含まれているベッセル関数を次の公式を用いて球関数で表す．

$$J_\nu(kr)\cosh kz=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^{\nu+2n}}{(2\nu+2n)!}R^{\nu+2n}P_{\nu+2n}{}^{\nu}(\mu) \quad\cdots\cdots\cdots(17)$$

$$J_\nu(kr)\sinh kz=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^{\nu+2n+1}}{(2\nu+2n+1)!}R^{\nu+2n+1}P_{\nu+2n+1}{}^{\nu}(\mu) \quad\cdots\cdots\cdots(18)$$

変換された応力関数〔III〕，〔III〕* はまとめて次のように書くことができる．

$$〔\mathrm{IV}〕\quad \varphi_0=p\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n R^n P_n(\mu),\qquad \varphi_3=p\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n R^n P_n(\mu) \quad\cdots\cdots\cdots(19)$$

ここで α_n, β_n の値は n が偶数，奇数によって異なり，

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{2n}&=\frac{1}{(2n)!}\int_0^\infty\phi_1(\lambda)\lambda^{2n}d\lambda, &\alpha_{2n+1}&=\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^\infty\phi_1^*(\lambda)\lambda^{2n+1}d\lambda\\ \beta_{2n}&=\frac{1}{(2n)!}\int_0^\infty\phi_2^*(\lambda)\lambda^{2n+1}d\lambda, &\beta_{2n+1}&=\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^\infty\phi_2(\lambda)\lambda^{2n+2}d\lambda\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(20)$$

である．

式 (20) に式 (13)～(16) を代入すれば α_n, β_n は次のようになる．

$$\alpha_{2n}=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[d_{2m,2n}A_{2m}[(3-4\nu)(K_{2m+2n}-I^*_{2m+2n})+L_{2m+2n}-N^*_{2m+2n}$$
$$+(2m+2n+1)(I^*_{2m+2n+1}+cJ_{2m+2n+1}-K_{2m+2n+1})]+d_{2m+1,2n}A_{2m+1}[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}$$
$$-M^*_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)(cI^*_{2m+2n+2}+cK_{2m+2n+2}-J_{2m+2n+2})]$$
$$+d_{2m,2n}\frac{2B_{2m}}{2m+2n}\Big[4(1-\nu)(1-2\nu)J_{2m+2n-1}+(2m+2n)\{(3-4\nu)cI^*_{2m+2n}+cN^*_{2m+2n}\}$$
$$+\frac{(2m+2n)(2m+2n+1)}{2}\{2cK_{2m+2n+1}-(1+c^2)J_{2m+2n+1}\}\Big]$$
$$+d_{2m+1,2n}\frac{2B_{2m+1}}{2m+2n+1}\Big[4(1-\nu)(1-2\nu)(K_{2m+2n}-I^*_{2m+2n})+(2m+2n+1)cM^*_{2m+2n+1}$$
$$+\frac{(2m+2n+1)(2m+2n+2)}{2}\{(1-c^2)I^*_{2m+2n+2}-(1+c^2)K_{2m+2n+2}+2cJ_{2m+2n+2}\}\Big]\Big] \quad\cdots\cdots(21)$$

$$\alpha_{2n+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[d_{2m,2n+1}A_{2m}[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}-M^*_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)(cK_{2m+2n+2}-cI^*_{2m+2n+2}$$
$$-J_{2m+2n+2})]+d_{2m+1,2n+1}A_{2m+1}[(3-4\nu)(I^*_{2m+2n+2}+K_{2m+2n+2})-N^*_{2m+2n+2}-L_{2m+2n+2}$$
$$-(2m+2n+3)(I^*_{2m+2n+3}+K_{2m+2n+3}-cJ_{2m+2n+3})]$$
$$+d_{2m,2n+1}\frac{2B_{2m}}{2m+2n+1}\Big[4(1-\nu)(1-2\nu)(I^*_{2m+2n}+K_{2m+2n})+(2m+2n+1)cM^*_{2m+2n+1}$$
$$+\frac{(2m+2n+1)}{2}(2m+2n+2)\{2cJ_{2m+2n+2}-(1-c^2)I^*_{2m+2n+2}-(1+c^2)K_{2m+2n+2}\}\Big]$$
$$+d_{2m+1,2n+1}\frac{2B_{2m+1}}{2m+2n+2}\Big[4(1-\nu)(1-2\nu)J_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)c\{N^*_{2m+2n+2}$$
$$-(3-4\nu)I^*_{2m+2n+2}\}+\frac{(2m+2n+2)(2m+2n+3)}{2}\{2cK_{2m+2n+3}-(1+c^2)J_{2m+2n+3}\}\Big]\Big] \quad\cdots\cdots(22)$$

$$\beta_{2n}=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[d_{2m,2n}(2m+2n+1)A_{2m}J_{2m+2n+1}+d_{2m+1,2n}(2m+2n+2)A_{2m+1}\{I^*_{2m+2n+2}+K_{2m+2n+2}\}$$
$$+d_{2m,2n}B_{2m}[(3-4\nu)(I^*_{2m+2n}+K_{2m+2n})+L_{2m+2n}+N_{2m+2n}+(2m+2n+1)(I^*_{2m+2n+1}+K_{2m+2n+1}$$
$$-cJ_{2m+2n+1})]+d_{2m+1,2n}B_{2m+1}[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}+M^*_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)\{J_{2m+2n+2}$$
$$-c(I^*_{2m+2n+2}+K_{2m+2n+2})\}]\Big] \quad\cdots\cdots(23)$$

$$\beta_{2n+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[d_{2m,2n+1}(2m+2n+2)A_{2m}(K_{2m+2n+2}-I^*_{2m+2n+2})+d_{2m+1,2n+1}(2m+2n+3)A_{2m+1}J_{2m+2n+3}$$
$$+d_{2m,2n+1}B_{2m}[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}+M^*_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)\{J_{2m+2n+2}$$
$$+c(I^*_{2m+2n+2}-K_{2m+2n+2})\}]+d_{2m+1,2n+1}B_{2m+1}[(3-4\nu)(K_{2m+2n+2}-I^*_{2m+2n+2})$$
$$-L_{2m+2n+2}+N^*_{2m+2n+2}+(2m+2n+3)(K_{2m+2n+3}-I^*_{2m+2n+3}-cJ_{2m+2n+3})]\Big] \quad\cdots\cdots(24)$$

ここで $d_{m,n}=(m+n)!/m!n!2^{m+n+1}$ であり，$I_k\sim N_k$ および $I_k^*\sim N_k^*$ は以下に示される積分である．

$$\left.\begin{aligned}
\binom{I_k}{I_k^*}&=\frac{2^k}{k!}\int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\pm\frac{1}{\sinh 2\lambda+2\lambda}\Big]\lambda^k d\lambda,\\
\binom{J_k}{J_k^*}&=\frac{2^k}{k!}\int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\pm\frac{1}{\sinh 2\lambda+2\lambda}\Big]\sinh 2\lambda c\lambda^k d\lambda\\
\binom{K_k}{K_k^*}&=\frac{2^k}{k!}\int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\pm\frac{1}{\sinh 2\lambda+2\lambda}\Big]\cosh 2\lambda c\lambda^k d\lambda\\
\binom{L_k}{L_k^*}&=\frac{2^k}{k!}\int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\pm\frac{1}{\sinh 2\lambda+2\lambda}\Big]e^{-2\lambda}\lambda^k d\lambda\\
\binom{M_k}{M_k^*}&=\frac{2^k}{k!}\int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\pm\frac{1}{\sinh 2\lambda+2\lambda}\Big]e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c\lambda^k d\lambda\\
\binom{N_k}{N_k^*}&=\frac{2^k}{k!}\int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\pm\frac{1}{\sinh 2\lambda+2\lambda}\Big]e^{-2\lambda}\cosh 2\lambda c\lambda^k d\lambda
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(25)$$

このように表せば本問題は，形式上球かを有する半無限体の問題[7]と同じになる．式(7)，(19)より応力成分を求め，球か面の境界条件を満足させると次のようになる．

$$\left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R=a}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+1)(n+2)\frac{A_n}{a^{n+3}}+\frac{n}{2n-1}\{n(n+3)-2\nu\}\frac{B_{n-1}}{a^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}\{n+3+2(1-2\nu)\}\frac{B_{n+1}}{a^{n+3}}$$
$$+n(n-1)\alpha_n a^{n-2}+\frac{n(n-1)}{2n-1}\{n-2-2(1-2\nu)\}\beta_{n-1}a^{n-2}+\frac{n+1}{2n+3}\{(n+1)(n-2)-2\nu\}\beta_{n+1}a^n\Big]P_n(\mu)$$
$$=-\frac{1}{3}\{P_0(\mu)-P_2(\mu)\}\cdots\cdots(26)$$

$$\left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p\sin\varphi}\right)_{R=a}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+2)\frac{A_n}{a^{n+3}}+\frac{1}{2n-1}\{n^2-2(1-\nu)\}\frac{B_{n-1}}{a^{n+1}}+\frac{(n+2)}{2n+3}\{n+3+2(1-2\nu)\}\frac{B_{n+1}}{a^{n+3}}$$
$$-(n-1)\alpha_n a^{n-2}-\frac{(n-1)}{2n-1}\{n-2-2(1-2\nu)\}\beta_{n-1}a^{n-2}$$
$$+\frac{1}{2n-1}\{-(n+1)^2+2(1-\nu)\}\beta_{n+1}a^n\Big]P_n'(\mu)=-\frac{P_2'(\mu)}{6}\cdots\cdots(27)$$

式(26)，(27)においてそれぞれ $P_n(\mu)$ および $P_n'(\mu)$ の係数を零に等置すれば A_n, B_n に関する無限連立一次方程式が得られる．特に式(26)，(27)で $n=1$ とおいた関係式より $B_0=0$ であることが分かる．

2·3　非軸対称解　非軸対称解に対しては以下のような調和関数を与える．

$$[\mathrm{V}]\left\{\begin{aligned}&\varphi_0=p\sum_{m=2}^{\infty}C_m\frac{P_m{}^2(\mu)}{R^{m+1}}\cos 2\theta,\quad \varphi_1=p\sum_{m=1}^{\infty}D_m\frac{P_m{}^1(\mu)}{R^{m+1}}\cos\theta,\quad \varphi_2=-p\sum_{m=1}^{\infty}D_m\frac{P_m{}^1(\mu)}{R^{m+1}}\sin\theta\\&\varphi_4=-p\sum_{m=2}^{\infty}\frac{D_m}{(m-1)}\frac{P_m{}^2(\mu)}{R^{m+1}}\cos 2\theta,\quad \varphi_3=p\sum_{m=2}^{\infty}E_m\frac{P_m{}^2(\mu)}{R^{m+1}}\cos 2\theta\end{aligned}\right\}\cdots(28)$$

$$[\mathrm{VI}]\left\{\begin{aligned}&\varphi_0=p\int_0^{\infty}\psi_3(\lambda)J_2(\lambda r)\cosh\lambda z\cos 2\theta d\lambda,\quad \varphi_1=p\int_0^{\infty}\psi_4(\lambda)J_1(\lambda r)\cosh\lambda z\cos\theta d\lambda\\&\varphi_2=-p\int_0^{\infty}\psi_4(\lambda)J_1(\lambda r)\cosh\lambda z\sin\theta d\lambda,\quad \varphi_3=p\int_0^{\infty}\lambda\psi_5(\lambda)J_2(\lambda r)\sinh\lambda z\cos 2\theta d\lambda\\&\lambda_3=p\int_0^{\infty}\psi_6(\lambda)J_2(\lambda r)\cosh\lambda z\sin 2\theta d\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(29)$$

$$[\mathrm{VI}]^*\left\{\begin{aligned}&\varphi_0=p\int_0^{\infty}\psi_3{}^*(\lambda)J_2(\lambda r)\sinh\lambda z\cos 2\theta d\lambda,\quad \varphi_1=p\int_0^{\infty}\psi_4{}^*(\lambda)J_1(\lambda r)\sinh\lambda z\cos\theta d\lambda\\&\varphi_2=-p\int_0^{\infty}\psi_4{}^*(\lambda)J_1(\lambda r)\sinh\lambda z\sin\theta d\lambda,\quad \varphi_3=p\int_0^{\infty}\lambda\psi_5{}^*(\lambda)J_2(\lambda r)\cosh\lambda z\cos 2\theta d\lambda\\&\lambda_3=p\int_0^{\infty}\psi_6{}^*(\lambda)J_2(\lambda r)\sinh\lambda z\sin 2\theta d\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(30)$$

ここで C_m, D_m, E_m および $\psi_3(\lambda)\sim\psi_6(\lambda)$, $\psi_3{}^*(\lambda)\sim\psi_6{}^*(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに未知関数である．

まず公式(10)を用いて応力関数[V]を円柱座標で表し，さらに応力関数[VI]，[VI]* と合わせて応力成分を求め，厚板上下面の境界条件を満足させると，次のようになる．

$$\left(\frac{\sigma_z}{p\cos 2\theta}\right)_{z=\pm 1-c}=\int_0^{\infty}\lambda^2\Big[\psi_3(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda+\{-2(1-\nu)\cosh(1\mp c)\lambda$$
$$+(1\mp c)\lambda\sinh(1\mp c)\lambda\}\psi_5(\lambda)\pm\psi_3{}^*(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda\pm\{-2(1-\nu)\sinh(1\mp c)\lambda$$
$$+(1\mp c)\lambda\cosh(1\mp c)\lambda\}\psi_5{}^*(\lambda)+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{C_{2m}\lambda^{2m}}{(2m-2)!}\pm\frac{C_{2m+1}\lambda^{2m+1}}{(2m-1)}\right\}e^{-(1\mp c)\lambda}$$
$$-2(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\pm\frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{D_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m)!}\right\}e^{-(1\mp c)\lambda}+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\pm\frac{E_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-2)!}\right.$$
$$\left.+\frac{E_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m-1)!}\right\}\{2(1-\nu)+(1\mp c)\lambda\}e^{-(1\mp c)\lambda}\Big]J_2(\lambda r)d\lambda+\int_0^{\infty}\lambda\{2(1+\nu)J_2(\lambda r)$$
$$+\lambda rJ_2'(\lambda r)\}[\psi_4(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda\pm\psi_4{}^*(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda+\lambda D_1e^{-(1\mp c)\lambda}]d\lambda=0\cdots\cdots(31)$$

$$\pm\left(\frac{\tau_{rz}}{p\cos 2\theta}\right)_{z=\pm 1-c}=\int_0^\infty \lambda^2\Big[\phi_3(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda+\{-(1-2\nu)\sinh(1\mp c)\lambda$$
$$+(1\mp c)\lambda\cosh(1\mp c)\lambda\}\phi_5(\lambda)\pm\phi_3{}^*(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda\pm\{-(1-2\nu)\cosh(1\mp c)\lambda$$
$$+(1\mp c)\lambda\sinh(1\mp c)\lambda\}\phi_5{}^*(\lambda)-\sum_{m=1}^\infty\left\{\frac{C_{2m}\lambda^{2m}}{(2m+2)!}\pm\frac{C_{2m+1}\lambda^{2m+1}}{(2m-1)!}\right\}e^{-(1\mp c)\lambda}$$
$$+2(1-2\nu)\sum_{m=1}^\infty\left\{\pm\frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{D_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m)!}\right\}e^{-(1\mp c)\lambda}-\sum_{m=1}^\infty\left\{\pm\frac{E_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-2)!}+\frac{E_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m-1)!}\right\}\{(1-2\nu)$$
$$+(1\mp c)\lambda\}e^{-(1\mp c)\lambda}\Big]J_2'(\lambda r)d\lambda+\int_0^\infty\lambda\Big[\phi_6(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda\pm\phi_6{}^*(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda$$
$$+(1-2\nu)\sum_{m=1}^\infty\left\{\pm\frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{D_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m)!}\right\}e^{-(1\mp c)\lambda}\Big]\frac{2J_2(\lambda r)d\lambda}{r}-\int_0^\infty\lambda[\lambda rJ_2(\lambda r)$$
$$-2\nu J_2(\lambda r)-\frac{4\nu}{\lambda r}J_2(\lambda r)][\phi_4(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda\pm\phi_4{}^*(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda-\lambda D_1e^{-(1\mp c)\lambda}]d\lambda=0 \quad\cdots\cdots(32)$$

$$\mp\left(\frac{\tau_{\theta z}}{p\sin 2\theta}\right)_{z=\pm 1-c}=\int_0^\infty\lambda\Big[\phi_3(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda+\{-(1-2\nu)\sinh(1\mp c)\lambda+(1\mp c)\lambda\cosh(1\mp c)\lambda\}\phi_5(\lambda)$$
$$\pm\phi_3{}^*(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda\pm\{-(1-2\nu)\cosh(1\mp c)\lambda+(1\mp c)\lambda\sinh(1\mp c)\lambda\}\phi_5{}^*(\lambda)$$
$$-\sum_{m=1}^\infty\left\{\frac{C_{2m}\lambda^{2m}}{(2m-2)!}\pm\frac{C_{2m+1}\lambda^{2m+1}}{(2m-1)!}\right\}e^{-(1\mp c)\lambda}+2(1-2\nu)\sum_{m=1}^\infty\left\{\pm\frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{D_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m)!}\right\}e^{-(1\mp c)\lambda}$$
$$-\sum_{m=1}^\infty\left\{\pm E_{2m}\frac{\lambda^{2m-1}}{(2m-2)!}+E_{2m+1}\frac{\lambda^{2m}}{(2m+1)!}\right\}\{(1-2\nu)\pm(1\mp c)\lambda\}e^{-(1\mp c)\lambda}\Big]2\frac{J_2(\lambda r)d\lambda}{r}$$
$$+\int_0^\infty\lambda^2\Big[\phi_6(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda\pm\phi_6{}^*(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda+(1-2\nu)\sum_{m=1}^\infty\Big\{\pm\frac{D_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!}$$
$$+\frac{D_{2m+1}\lambda^{2m}}{(2m)!}\Big\}e^{-(1\mp c)\lambda}\Big]J_2'(\lambda r)d\lambda+2\nu\int_0^\infty\lambda\left[\lambda J_2'(\lambda r)+\frac{2}{r}J_2(\lambda r)\right][\phi_4(\lambda)\sinh(1\mp c)\lambda$$
$$\pm\phi_4{}^*(\lambda)\cosh(1\mp c)\lambda-\lambda D_1e^{-(1\mp c)\lambda}]d\lambda=0 \quad\cdots\cdots(33)$$

そこで

$$\phi_4(\lambda)=D_1\lambda\frac{\cosh 2\lambda c+e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda} \quad\cdots\cdots(34)$$

$$\phi_4{}^*(\lambda)=D_1\lambda\frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda} \quad\cdots\cdots(35)$$

とおけば式 (32), (33) において D_1, $\phi_4(\lambda)$, $\phi_4{}^*(\lambda)$ を含む項が消去される．式 (34), (35) の関係を用い式 (31) の $z=1-c$ の条件で D_1 の項を考えると次のように変形できる．

$$I=2\int_0^\infty[2(1+\nu)J_2(\lambda r)+\lambda rJ_2'(\lambda r)]\lambda^2\frac{\cosh(1+c)\lambda}{\sinh 2\lambda}d\lambda$$
$$=4(1+\nu)\int_0^\infty\frac{\lambda^2\cosh(1+c)\lambda J_2(\lambda r)}{\sinh 2\lambda}d\lambda+2\left[\frac{\lambda^3\cosh(1+c)\lambda J_2(\lambda r)}{\sinh 2\lambda}\right]_0^\infty$$
$$-2\int_0^\infty[\lambda\{(1+c)\sinh(1+c)\lambda\sinh 2\lambda-2\cosh 2\lambda\cosh(1+c)\lambda\}$$
$$+3\cosh(1+c)\lambda\sinh 2\lambda]\frac{\lambda^2}{\sinh^2 2\lambda}J_2(\lambda r)d\lambda$$

ところで $\left[\dfrac{\lambda^3\cosh(1+c)\lambda J_2(\lambda r)}{\sinh 2\lambda}\right]_0^\infty=0$ であるから結局

$$I=\int_0^\infty\left[-2(1-2\nu)\frac{\cosh(1+c)\lambda}{\sinh 2\lambda}-2\lambda\frac{\{(1+c)\sinh 2\lambda\sinh(1+c)\lambda-2\cosh 2\lambda\cosh(1+c)\lambda\}}{\sinh^2 2\lambda}\right]\lambda^2J_2(\lambda r)d\lambda \quad\cdots\cdots(36)$$

同様に式 (31) の $z=-1-c$ の条件における D_1 の項は

$$I^*=\int_0^\infty\left[-2(1-2\nu)\frac{\cosh(1-c)\lambda}{\sinh 2\lambda}-2\lambda\frac{\{(1-c)\sinh 2\lambda\sinh(1-c)\lambda-2\cosh 2\lambda\cosh(1-c)\lambda\}}{\sinh^2 2\lambda}\right]$$
$$\times\lambda^2J_2(\lambda r)d\lambda \quad\cdots\cdots(37)$$

となる．式 (36), (37) を考慮して式 (31) で $J_2(\lambda r)$, また式 (32) で $J_2'(\lambda r)$, $J_2(\lambda r)/r$, 式 (33) で,

$J_2(\lambda r)/r$, $J_2'(\lambda r)$ の係数をそれぞれ零に等置する．式 (32) と (33) から得られる関係式は同一であるので，結局六つの方程式から未知関数 $\phi_3(\lambda)$, $\phi_5(\lambda)$, $\phi_6(\lambda)$, $\phi_3^*(\lambda)$, $\phi_5^*(\lambda)$, $\phi_6^*(\lambda)$ が求まる．

特に $\phi_6(\lambda)$ と $\phi_6^*(\lambda)$ は容易に求まり次のようになる．

$$\phi_6(\lambda)=-(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{D_{2m}}{(2m-1)!}\lambda^{2m-1}\frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}+\frac{D_{2m+1}}{(2m)!}\lambda^{2m}\frac{e^{-2\lambda}+\cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}\right] \qquad (38)$$

$$\phi_6^*(\lambda)=-(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{D_{2m}}{(2m-1)!}\lambda^{2m-1}\frac{-e^{-2\lambda}+\cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}+\frac{D_{2m+1}}{(2m)!}\lambda^{2m}\frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}\right] \qquad (39)$$

また $\phi_3(\lambda)$, $\phi_5(\lambda)$, $\phi_3^*(\lambda)$, $\phi_5^*(\lambda)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)\phi_3(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{2m}}{(2m-2)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu-2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)\\
&\quad+e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda-2\lambda\cosh 2\lambda c)+2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{2m+1}}{(2m-1)!}\lambda^{2m+1}[(3-4\nu-2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c+2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)]\\
&\quad-2(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{2m}}{(2m-1)!}\lambda^{2m-1}[(3-4\nu-2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c\\
&\quad+2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)]-2(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{2m+1}}{(2m)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu-2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)\\
&\quad+e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda-2\lambda\cosh 2\lambda c)+2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_{2m}}{(2m-2)!}\lambda^{2m-1}[\{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2\}\\
&\quad\times\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+4\lambda^2 c\{(3-4\nu)+\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c\}-2\lambda^2c^2\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_{2m+1}}{(2m-1)!}\lambda^{2m}[\{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2\}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)\\
&\quad+4\lambda^2c(\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c-\lambda c)-2\lambda^2c^2\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c]+2D_1\Big[4(1-\nu)(1-2\nu)\lambda-2(1-c^2)\lambda^3\\
&\quad-\{(1-2\nu)^2+(1+c^2)\}\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2(1-2\nu)\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c\\
&\quad+2\lambda^2c\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c+2(1-2\nu)\lambda\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c\\
&\quad-2(3-4\nu)\lambda^2\left\{\frac{\cosh 2\lambda+\cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}\right\}-4\lambda^3c\frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}+4\lambda^3\frac{(1+\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c)}{\sinh^2 2\lambda}\Big] \qquad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)\phi_5(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2C_{2m}}{(2m-2)!}\lambda^{2m}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2C_{2m+1}}{(2m-1)!}\lambda^{2m+1}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-4(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{2m}}{(2m-1)!}\lambda^{2m-1}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-4(1-2\nu)\\
&\quad\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{2m+1}}{(2m)!}\lambda^{2m}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_{2m}}{(2m-2)!}\lambda^{2m-1}[(3-4\nu+2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c\\
&\quad+2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c-2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)]+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_{2m+1}}{(2m-1)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu+2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c\\
&\quad-2\lambda)-e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda-2\lambda\cosh 2\lambda c)-2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+2D_1\Big[-(1-2\nu)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)\\
&\quad-\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+\lambda(\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c+1)-2\lambda^2\frac{(\cosh 2\lambda+\cosh 2\lambda c)}{\sinh 2\lambda}\Big] \qquad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)\phi_3^*(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{2m}}{(2m-2)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu-2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c\\
&\quad+2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)]+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{2m+1}}{(2m-1)!}\lambda^{2m+1}[(3-4\nu-2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)\\
&\quad-e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda+2\lambda\cosh 2\lambda c)+2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]\\
&\quad-2(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{2m}}{(2m-1)!}\lambda^{2m-1}[(3-4\nu-2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)-e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda+2\lambda\cosh 2\lambda c)\\
&\quad+2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+2(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{2m+1}}{(2m)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu-2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c\\
&\quad-2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c+2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)]+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_{2m}}{(2m-2)!}\lambda^{2m-1}[\{4(1-\nu)(1-2\nu)
\end{aligned}$$

$$-2\lambda^2\}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)+4\lambda^2 c\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c-2\lambda^2c^2(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-2\lambda)]$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_{2m+1}}{(2m-1)!}\lambda^{2m}[\{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2\}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c-4\lambda^2c\{(3-4\nu)-\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c\}$$
$$-2\lambda^2c^2\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+2D_1\Big[-2(1-2\nu)\lambda c\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda^2c\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c$$
$$-\{(1-2\nu)^2+(1+c^2)\lambda^2\}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+2(1-2\nu)\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c$$
$$-\frac{2\lambda^2}{\sinh 2\lambda}\{2\lambda c\cosh 2\lambda+(3-4\nu)\sinh 2\lambda c\}-4\lambda^3\frac{\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c}{\sinh^2 2\lambda}\Big]\quad\cdots\cdots(42)$$

$$(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)\psi_5^*(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2C_{2m}}{(2m-2)!}\lambda^{2m}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2C_{2m+1}}{(2m-1)!}\lambda^{2m+1}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)$$
$$-4(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{2m}}{(2m-1)!}\lambda^{2m-1}(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)-4(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{2m+1}}{(2m)!}\lambda^{2m}\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_{2m}\lambda^{2m-1}}{(2m-2)!}[(3-4\nu+2\lambda)(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)+e^{-2\lambda}(\sinh 2\lambda+2\lambda\cosh 2\lambda c)$$
$$-2\lambda c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_{2m+1}}{(2m-1)!}\lambda^{2m}[(3-4\nu+2\lambda)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+2\lambda e^{-2\lambda}\sinh 2\lambda c$$
$$-2\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)]+2D_1\Big[-(1-2\nu)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+\lambda\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c$$
$$-\lambda c(\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c+2\lambda)-2\lambda^2\frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}\Big]\quad\cdots\cdots(43)$$

次に球か面の境界条件を満足させるために，応力関数〔VI〕,〔VI〕* を公式（17),（18）を用いて球座標で表し両者をまとめて次のように書く．

$$\text{〔VII〕}\left\{\begin{array}{lll}\varphi_0=p\sum_{n=2}^{\infty}\xi_nR^nP_n{}^2(\mu)\cos 2\theta, & \varphi_1=p\sum_{n=1}^{\infty}\eta_nR^nP_n{}^1(\mu)\cos\theta, & \varphi_2=-p\sum_{n=1}^{\infty}\eta_nR^nP_n{}^1(\mu)\sin\theta\\ \varphi_3=p\sum_{m=2}^{\infty}\zeta_nR^nP_n{}^2(\mu)\cos 2\theta, & \lambda_3=p\sum_{n=2}^{\infty}\kappa_nR^nP_n{}^2(\mu)\sin 2\theta & \end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(44)$$

ただし ξ_n, η_n, ζ_n, κ_n は n の偶数，奇数によって異なり次に示すものである．

$$\left.\begin{array}{ll}\xi_{2n}=\dfrac{1}{(2n+2)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_3(\lambda)\lambda^{2n}d\lambda, & \xi_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+3)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_3^*(\lambda)\lambda^{2n+1}d\lambda\\ \eta_{2n}=\dfrac{1}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_4^*(\lambda)\lambda^{2n}d\lambda, & \eta_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+2)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_4(\lambda)\lambda^{2n+1}d\lambda\\ \zeta_{2n}=\dfrac{1}{(2n+2)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_5^*(\lambda)\lambda^{2n+1}d\lambda, & \zeta_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+3)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_5(\lambda)\lambda^{2n+2}d\lambda\\ \kappa_{2n}=\dfrac{1}{(2n+2)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_6(\lambda)\lambda^{2n}d\lambda, & \kappa_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+3)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_6^*(\lambda)\lambda^{2n+1}d\lambda\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(45)$$

式（45）に式（34),（35）および式（38)～(43）を代入すれば ξ_n, η_n, ζ_n, κ_n は以下のようになる．

$$\xi_{2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\Big[d_{2m-2,2n+2}C_{2m}[(3-4\nu)(K_{2m+2n}-I^*_{2m+2n})+L_{2m+2n}-N^*_{2m+2n}$$
$$+(2m+2n+1)(I^*_{2m+2n+1}-K_{2m+2n+1}+cJ_{2m+2n+1})]+d_{2m-1,2n+2}C_{2m+1}[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}$$
$$-M^*_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)(cI^*_{2m+2n+2}+cK_{2m+2n+2}-J_{2m+2n+2})]$$
$$-2(1-2\nu)\frac{d_{2m-1,2n}}{(2n+2)(2n+1)}D_{2m}[(3-4\nu)J_{2m+2n-1}-M^*_{2m+2n-1}+(2m+2n)\{c(I^*_{2m+2n}+K_{2m+2n})$$
$$-J_{2m+2n}\}]-2(1-2\nu)\frac{d_{2m,2n}}{(2n+2)(2n+1)}D_{2m+1}[(3-4\nu)(K_{2m+2n}-I^*_{2m+2n})+L_{2m+2n}-N_{2m+2n}$$
$$-(2m+2n+1)(K_{2m+2n+1}-I^*_{2m+2n+1}-cJ_{2m+2n+1})]+\frac{d_{2m-2,2n+1}}{2n+2}E_{2m}\Big[4(1-\nu)(1-2\nu)J_{2m+2n-1}$$
$$+c(2m+2n)\{N^*_{2m+2n}+(3-4\nu)I^*_{2m+2n}\}+\frac{(2m+2n)(2m+2n+1)}{2}\{2cK_{2m+2n+1}-(1+c^2)J_{2m+2n+1}\}\Big]$$
$$+\frac{d_{2m-1,2n+1}}{2n+2}E_{2m+1}\Big[4(1-\nu)(1-2\nu)(K_{2m+2n}-I^*_{2m+2n})+(2m+2n+1)cM^*_{2m+2n+1}$$

$$+\frac{(2m+2n+1)(2m+2n+2)}{2}\{(1-c^2)I^*_{2m+2n+2}+2cJ_{2m+2n+2}-(1+c^2)K_{2m+2n+2}\}\Big]\Big]$$

$$+\frac{D_1}{(2n+1)(2n+2)2^{2n}}\Big[2(1-\nu)(1-2\nu)I_{2n}^*+\frac{(2n+1)(2n+2)}{4}\{(1-c^2)I^*_{2n+2}$$

$$-(1+c^2)K_{2n+2}+2cJ_{2n+2}\}-(1-2\nu)^2K_{2n}+(1-2\nu)N^*_{2n}+\frac{(2n+1)}{2}\{-2(1-2\nu)cJ_{2n+1}+cM^*_{2n+1}$$

$$+2(1-2\nu)K_{2n+1}-(3-4\nu)O^*_{2n+1}\}\Big]+\frac{2D_1}{(2n+2)!}\int_0^\infty\Big[\frac{\lambda^{2n}}{\sinh^2 2\lambda(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)}\{-2\lambda^2(3$$

$$-4\nu)\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-4\lambda^3 c\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c+4\lambda^3+4\lambda^3\cosh 2\lambda\cosh 2\lambda c\}\Big]d\lambda \quad\cdots\cdots(46)$$

$$\xi_{2n+1}=\sum_{m=1}^{\infty}\Big[d_{2m-2,2n+3}C_{2m}[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}-M^*_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)\{c(K_{2m+2n+2}-I^*_{2m+2n+2})$$

$$-J_{2m+2n+2}\}]+d_{2m-1,2n+3}C_{2m+1}[(3-4\nu)(K_{2m+2n+2}+I^*_{2m+2n+2})-L_{2m+2n+2}-N^*_{2m+2n+2}$$

$$-(2m+2n+3)(K_{2m+2n+3}+I^*_{2m+2n+3}-cJ_{2m+2n+3})]-2(1-2\nu)\frac{d_{2m-1,2n+1}D_{2m}}{(2n+2)(2n+3)}[(3-4\nu)(K_{2m+2n}$$

$$+I^*_{2m+2n})-L_{2m+2n}-N^*_{2m+2n}-(2m+2n+1)(K_{2m+2n+1}+I^*_{2m+2n+1}-cJ_{2m+2n+1})]$$

$$-2(1-2\nu)\frac{d_{2m,2n+1}}{(2n+2)(2n+3)}D_{2m+1}[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}-M^*_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)$$

$$\times\{c(K_{2m+2n+2}-I^*_{2m+2n+2})-J_{2m+2n+2}\}]+\frac{d_{2m-2,2n+2}}{2n+3}E_{2m}[4(1-\nu)(1-2\nu)(I^*_{2m+2n}$$

$$+K_{2m+2n})+(2m+2n+1)cM^*_{2m+2n+1}-\frac{(2m+2n+1)(2m+2n+2)}{2}\{(1-c^2)I^*_{2m+2n+2}$$

$$+(1+c^2)K_{2m+2n+2}-2cJ_{2m+2n+2}\}]+\frac{d_{2m-1,2n+2}}{2n+3}E_{2m+1}[4(1-\nu)(1-2\nu)J_{2m+2n+1}+(2m+2n+2)C$$

$$\times\{N^*_{2m+2n+2}-(3-4\nu)I^*_{2m+2n+2}\}+\frac{(2m+2n+2)(2m+2n+3)}{2}\{-(1+c^2)J_{2m+2n+3}$$

$$+2cK_{2m+2n+3}\}]\Big]+\frac{D_1}{(2n+2)(2n+3)2^{2n+1}}\Big[-(1-2\nu)^2J_{2n+1}+(1-2\nu)M^*_{2n+1}$$

$$+\frac{2n+2}{2}\{-2(1-2\nu)cK_{2n+2}+2(1-2\nu)J_{2n+2}+cN^*_{2n+2}\}+\frac{(2n+2)(2n+3)}{4}\{-(1+c^2)J_{2n+3}$$

$$+2cK_{2n+3}\}\Big]+\frac{4D_1}{(2n+3)!}\int_0^\infty\frac{\lambda^{2n+3}}{\sinh^2 2\lambda(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)}[2\lambda\cosh 2\lambda\sinh 2\lambda c$$

$$-2\lambda c\sinh 2\lambda\cosh 2\lambda c-(3-4\nu)\sinh 2\lambda\sinh 2\lambda c]d\lambda \quad\cdots\cdots(47)$$

$$\eta_{2n}=\frac{D_1}{(2n+1)!}\int_0^\infty\frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}\lambda^{2n+1}d\lambda \quad\cdots\cdots(48)$$

$$\eta_{2n+1}=\frac{D_1}{(2n+2)!}\int_0^\infty\frac{[e^{-2\lambda}+\cosh 2\lambda c]}{\sinh 2\lambda}\lambda^{2n+2}d\lambda \quad\cdots\cdots(49)$$

$$\zeta_{2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\Big[d_{2m-2,2n+2}(2m+2n+1)C_{2m}J_{2m+2n+1}+d_{2m-1,2n+2}(2m+2n+2)C_{2m+1}(I^*_{2m+2n+2}+K_{2m+2n+2})$$

$$-2(1-2\nu)d_{2m-1,2n}\frac{(2m+2n)}{(2n+1)(2n+2)}D_{2m}(I^*_{2m+2n}+K_{2m+2n})-2(1-2\nu)d_{2m,2n}$$

$$\times\frac{(2m+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}D_{2m+1}J_{2m+2n+1}+d_{2m-2,2n+2}E_{2m}[(3-4\nu)(I^*_{2m+2n}+K_{2m+2n})+L_{2m+2n}$$

$$+N^*_{2m+2n}+(2m+2n+1)(I^*_{2m+2n+1}+K_{2m+2n+1}-cJ_{2m+2n+1})]+d_{2m-1,2n+2}E_{2m+1}$$

$$\times[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}+M^*_{2m+2n+1}-(2m+2n+2)\{c(I^*_{2m+2n+2}+K_{2m+2n+2})-J_{2m+2n+2}\}]\Big]$$

$$+\frac{D_1}{(2n+2)2^{2n+2}}[M^*_{2n+1}-2(1-2\nu)J_{2n+1}-(2n+2)\{c(K_{2n+2}+I^*_{2n+2})-J_{2n+2}\}]$$

$$-\frac{4D_1}{(2n+2)!}\int_0^\infty\frac{\sinh 2\lambda c\,\lambda^{2n+3}}{\sinh 2\lambda(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)}d\lambda \quad\cdots\cdots(50)$$

$$\zeta_{2n+1}=\sum_{m=1}^{\infty}\Big[d_{2m-2,2n+3}(2m+2n+2)C_{2m}(K_{2m+2n+2}-I^*_{2m+2n+2})+d_{2m-1,2n+3}(2m+2n+3)$$
$$\times C_{2m+1}J_{2m+2n+3}-2(1-2\nu)d_{2m-1,2n+1}\frac{(2m+2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}D_{2m}J_{2m+2n+1}$$
$$-2(1-2\nu)d_{2m,2n+1}\frac{(2m+2n+2)}{(2n+2)(2n+3)}D_{2m+1}(K_{2m+2n+2}-I^*_{2m+2n+2})+d_{2m-2,2n+3}E_{2m}$$
$$\times[(3-4\nu)J_{2m+2n+1}+M^*_{2m+2n+1}-(2m+2n+2)\{c(K_{2m+2n+2}-I^*_{2m+2n+2})-J_{2m+2n+2}\}]$$
$$+d_{2m-1,2n+3}E_{2m+1}[(3-4\nu)(K_{2m+2n+2}-I^*_{2m+2n+2})-L_{2m+2n+2}+N^*_{2m+2n+2}$$
$$+(2m+2n+3)(K_{2m+2n+3}-I^*_{2m+2n+3}-cJ_{2m+2n+3})]\Big]+\frac{D_1}{(2n+3)2^{2n+3}}[2(1-2\nu)(I^*_{2n+2}-K_{2n+2})$$
$$+I^*_{2n+2}+N^*_{2n+2}+(2n+3)(K_{2n+3}-cJ_{2n+3}-O^*_{2n+3})]-\frac{4D_1}{(2n+3)!}\int_0^\infty\frac{\cosh 2\lambda c\lambda^{2n+4}}{\sinh 2\lambda(\sinh^2 2\lambda-4\lambda^2)}d\lambda \quad\cdots\cdots(51)$$

$$\kappa_{2n}=-(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\frac{D_{2m}}{(2m-1)!(2n+2)!}\int_0^\infty\frac{\sinh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}\lambda^{2m+2n-1}d\lambda$$
$$+\frac{D_{2m+1}}{(2m)!(2n+2)!}\int_0^\infty\frac{e^{-2\lambda}+\cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}\lambda^{2m+2n}d\lambda\Big] \quad\cdots\cdots(52)$$

$$\kappa_{2n+1}=-(1-2\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\frac{D_{2m}}{(2m)!(2n+2)!}\int_0^\infty\frac{-e^{-2\lambda}+\cosh 2\lambda c}{\sinh 2\lambda}\lambda^{2m+2n}d\lambda$$
$$+\frac{D_{2m+1}}{(2m)!(2n+3)!}\int_0^\infty\frac{\sinh 2\lambda c\lambda^{2m+2n+1}}{\sinh 2\lambda}d\lambda\Big] \quad\cdots\cdots(53)$$

ここで $I_k\sim N_k$ および $I_k^*\sim N_k^*$ は式(25)で与えられ O_k, O_k^* は次のように定義される.

$$\begin{pmatrix}O_k\\O_k^*\end{pmatrix}=\frac{2^k}{k!}\int_0^\infty\Big[\frac{1}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\pm\frac{1}{\sinh 2\lambda+2\lambda}\Big]\coth 2\lambda\,\lambda^k d\lambda \quad\cdots\cdots(54)$$

以上のように表せば，本問題は形式上球かを有する半無限体の問題[3]と同じになる．そこで応力関数〔V〕，〔VII〕より応力成分を求めて，球か面における境界条件を満足させると以下のようになる.

$$\left(\frac{\sigma_R}{p\cos 2\theta}\right)_{R=a}=\frac{2}{3}(5-\nu)\frac{D_1}{a^3}P_2^2(\mu)+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+1)(n+2)\frac{C_n}{a^{n+3}}-2\frac{(1-2\nu)(n+2)}{n}\frac{D_{n+1}}{a^{n+3}}$$
$$+\frac{(n-2)}{2n-1}\{n(n+3)-2\nu\}\frac{E_{n-1}}{a^{n+1}}+\frac{(n+2)(n+3)}{2n+3}(n+5-4\nu)\frac{E_{n+1}}{a^{n+3}}+n(n-1)\xi_n a^{n-2}$$
$$+\frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1}\eta_{n-1}a^{n-2}-\frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3}\eta_{n+1}a^n+\frac{(n-1)(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1}\zeta_{n-1}a^{n-2}$$
$$+(n+3)\frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3}\zeta_{n+1}a^n+4(n-1)\kappa_n a^{n-2}\Big]P_n^2(\mu)=\frac{-P_2^2(\mu)}{6} \quad\cdots\cdots(55)$$

$$\left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p\sin\varphi\cos 2\theta}\right)_{R=a}=\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+2)\frac{C_n}{a^{n+3}}+\frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1}\frac{D_{n-1}}{a^{n+1}}+\frac{(1-2\nu)(n-3)(n+2)}{2n(2n+3)}\frac{D_{n+1}}{a^{n+3}}$$
$$+\frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1}\frac{E_{n-1}}{a^{n+1}}+\frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3}\frac{E_{n+1}}{a^{n+3}}-(n-1)\xi_n a^{n-2}$$
$$+\frac{(1-\nu n)}{2n-1}\eta_{n-1}a^{n-2}-\frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3}\eta_{n+1}a^n-\frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1}\zeta_{n-1}a^{n-2}$$
$$-\frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3}\zeta_{n+1}a^n-\Big\{n(n-2)+4-\frac{(n-2)^2(n+2)}{2n-1}\Big\}\frac{\kappa_n}{2}a^{n-2}$$
$$+\frac{n(n+3)(n+4)}{2(2n+3)}\kappa_{n+2}a^n\Big]P_n^{2\prime}(\mu)-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n+3-4\nu)}{2(2n-1)}\frac{D_{n-1}}{a^{n+1}}P_n^{2\prime}(\mu)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(1-2\nu)\frac{(n+1)(n+2)}{2(n-1)}\frac{D_n}{a^{n+2}}-2(1-\nu)(n+2)\frac{E_n}{a^{n+2}}-(1-\nu)(n-1)\eta_n a^{n-1}$$
$$+2(1-\nu)(n-1)\zeta_n a^{n-1}+\frac{n(n-1)(n+3)}{2}\kappa_{n+1}a^{n-1}\Big]P_n^2(\mu)=\frac{P_2^{2\prime}}{12}(\mu) \quad\cdots\cdots(56)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_{R\theta}\sin\varphi}{p\sin 2\theta}\right)_{R=a}=\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)\frac{C_n}{a^{n+3}}+\frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1}\frac{D_{n-1}}{a^{n+1}}+\frac{(1-2\nu)(n-3)(n+2)}{2n(2n+3)}\frac{D_{n+1}}{a^{n+3}}\right.$$
$$+\frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1}\frac{E_{n-1}}{a^{n+1}}+\frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3}\frac{E_{n+1}}{a^{n+3}}-(n-1)\xi_n a^{n-2}$$
$$+\frac{(1-\nu n)}{2n-1}\eta_{n-1}a^{n-2}-\frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3}\eta_{n+1}a^n-\frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1}\zeta_{n-1}a^{n-2}$$
$$-(n+3)\frac{(n-1+2\nu)}{2n+3}\zeta_{n+1}a^n-\left\{n(n-2)+4-\frac{(n-2)^2(n+2)}{2n-1}\right\}\frac{\kappa_n}{2}a^{n-2}$$
$$\left.+\frac{n(n+3)(n+4)}{2(2n+3)}\kappa_{n+2}a^n\right]P_n^2(\mu)-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n+3-4\nu)}{2(2n-1)}\frac{D_{n-1}}{a^{n+1}}P_n^2(\mu)=\frac{P_2^2(\mu)}{12}\quad\cdots\cdots(57)$$

式 (55) で $P_n^2(\mu)$，式 (56) で $P_n^{2\prime}(\mu)$，$P_n^2(\mu)$，式 (57) で $P_n^2(\mu)$ の係数をそれぞれ零に等置すれば C_n, D_n, E_n に関する無限連立一次方程式が得られる．この場合式 (56) で $P_n^{2\prime}(\mu)$ の係数を零に等置して得られる係数方程式は，式 (57) から得られる方程式と同一である．これらを C_n, D_n, E_n について解けば非軸対称解は完全に決まる．そして全体の変位および応力は応力関数〔I〕,〔II〕,〔III〕,〔III〕*,〔V〕,〔VI〕,〔VI〕* を重ね合わせて得られる．

3. 数値計算

ポアソン比 $\nu=0.3$ として偏心量が $c=0.25$, 0.5 の2とおりの場合について，それぞれ球か半径を $a=0.05\sim0.45$ および $a=0.05\sim0.35$ に変化させて数値計算を行った．計算に当たっては，まず式 (25), (54) および式 (46)～(53) で表された積分の値が必要である．この中で I_k, I_k^*, L_k, L_k^* については文献 (8) の結果を用い，残りの積分はシンプソンの公式により数値積分を行った．特に J_k, J_k^*, K_k, K_k^* の k の大きい場合については文献 (2), (9) の展開式で求めた．

すべての無限級数の収束は良好であるが，偏心量および球か半径が大きくなるにつれてしだいに収束が悪くなるから，最終に得られる応力値が有効数字3けた以上になるように $A_n\sim E_n$ を 13～14 項まで用いて計算を行った．以下にこれらの係数より求められた球か近傍の応力分布を示す．応力分布に及ぼす偏心量の影響を求めるために，図 2～5 に偏心量 $c=0.25$ の場合を，図 6～9 に $c=0.5$ の場合を示した．図2は $\theta=0$ における球か面の応力 σ_φ の分布を示したもので $\varphi=0°$ において σ_φ は板上面 $z=1-c$ の影響を大きく受け最も大きい引張応力となり，$\varphi=180°$ では半無限体[3]の場合と異なり σ_φ に板下面 $z=-1-c$ の影響が

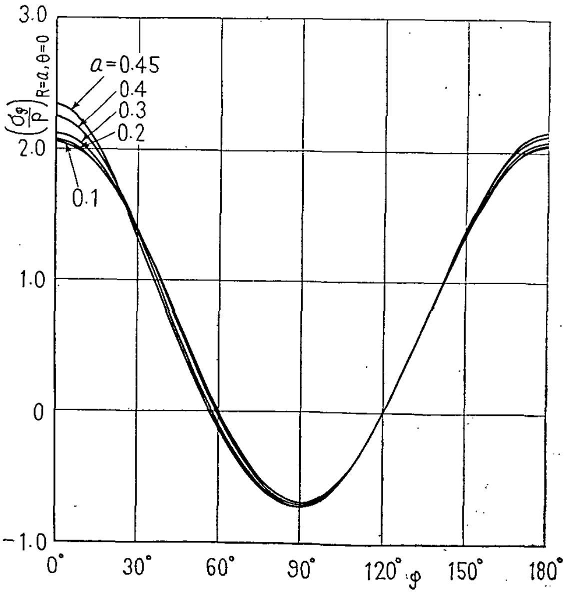

図 2　球か面の σ_φ の分布 ($\theta=0$, $c=0.25$)

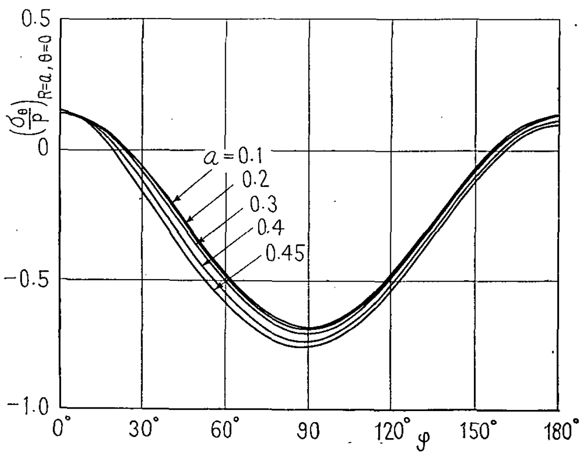

図 3　球か面の σ_θ の分布 ($\theta=0$, $c=0.25$)

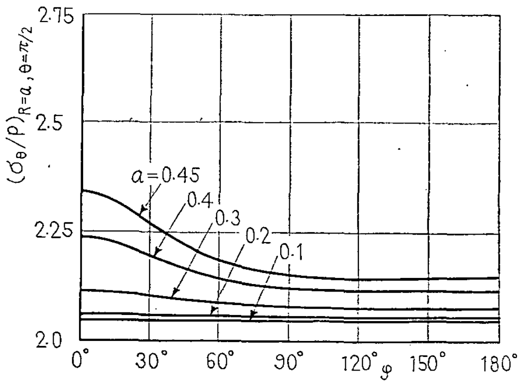

図 4　球か面の σ_θ の分布 ($\theta=\pi/2$, $c=0.25$)

みられる．図3, 4はそれぞれ $\theta=0,\ \pi/2$ における球か面の σ_θ の分布であり，図3では $\varphi=0°$ 近傍の σ_φ の値は球か半径が大きくなってもほとんど変化しないが，φ が大きくなると球か半径の影響がはっきり現れる．また図4では σ_θ は引張応力であり，球か半径が増加すると応力値が全体に増加する．図5の $z>0$ 領域における z 軸上の σ_r の分布であり，球か半径の増大に伴って球か面上A点の応力は急激に増大するが，板面上B点における応力は $\sigma_r/p=1$ よりわずかに小さくなるにすぎない．図6～9は $c=0.5$ の場合であるがその分布傾向は $c=0.25$ の場合と似ており，全体に球か半径の大きさによる影響が顕著で応力値も $c=0.25$ の場合より高くなっている．以上の計算結果より球か面と z 軸との交点 A, A′ に最大引張応力を生ずることが分かったので，図10にこれらの点の応力 σ_A, σ_A' と球か半径の関係を示した．球か半径が零に近づけば偏心量のいかんにかかわらず球かを有する無限体の結果に一致し，$\sigma_A=\sigma_A'=2.045p$ $(\nu=0.3)$ となり，球かの大きさが増大するにつれて σ_A, σ_A' 共に増大するが，σ_A のほうがその増加率は大きい．また同一半径に対しては偏心量の大きいほうが σ_A, σ_A' とも応力値は高い．図中に2·2節で得られた2軸一様引張りの場合の結果を示した．軸対称の場合は球か半径が零に近づくと，$\sigma_A=\sigma_A'=2.182p$ $(\nu=0.3)$ であり，球か半径が大きくなるにつれまた偏心量が大きくなるにつれ，これらの値は増大し，1軸引張りの場合と傾

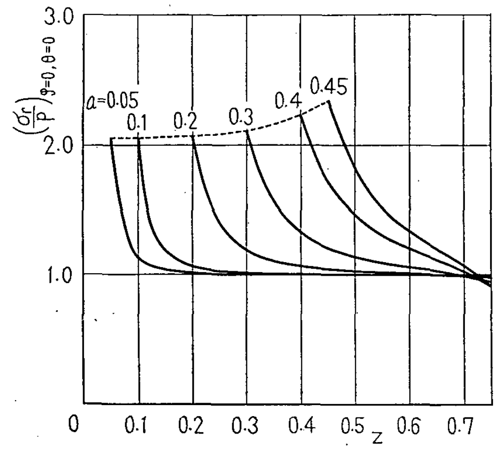

図5　z 軸上の σ_r の分布 $(\varphi=0,\ \theta=0,\ c=0.25)$

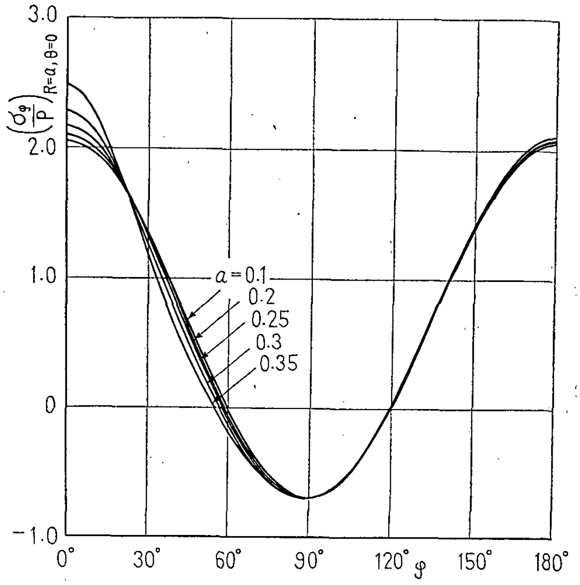

図6　球か面の σ_φ の分布 $(\theta=0,\ c=0.5)$

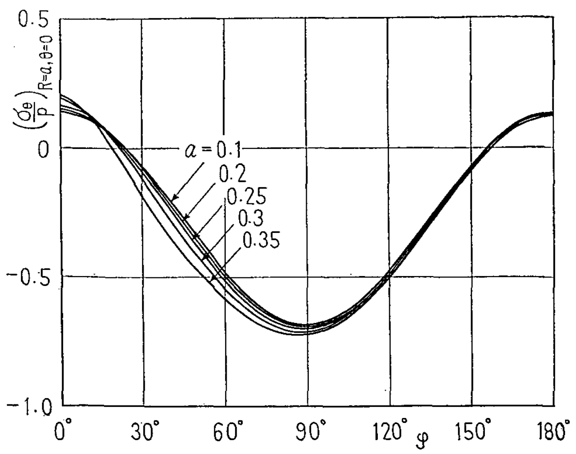

図7　球か面の σ_θ の分布 $(\theta=0,\ c=0.5)$

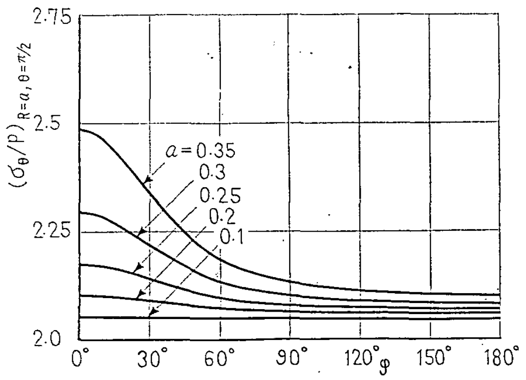

図8　球か面の σ_θ の分布 $(\theta=\pi/2,\ c=0.5)$

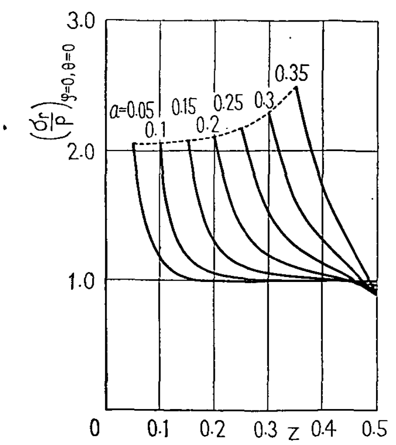

図9　z 軸上の σ_r の分布 $(\varphi=0,\ \theta=0,\ c=0.5)$

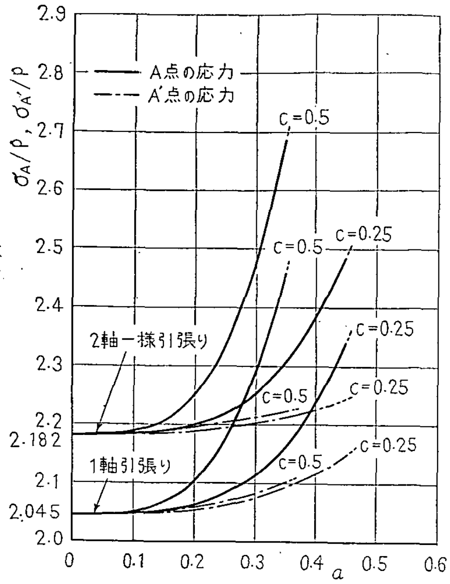

図 10 球か半径による最大引張応力の変化

向は似ているが，全体的にみれば軸対称荷重を受ける場合のほうが1軸引張荷重を受ける場合より応力値は高い．なお C.B. Ling ら[2]は，2軸一様引張荷重が作用する場合を解析し，ポアソン比 $\nu=0.25$ として $c=0.25$, $a=0.25$ の場合のみ結果を与えたが，本解析で得られた軸対称解の結果と傾向も応力値もほぼ一致した．

4. 結　言

1個の球かが中央より偏心して存在する無限厚板に1軸一様引張荷重が作用する非軸対称問題を三次元弾性理論に基づいて厳密に解析する方法を示し，理論解に基づいて球か近傍の応力を計算し，偏心量および球か半径が最大引張応力に及ぼす影響などを明らかにし，また2軸一様引張荷重を受ける場合と比較した．結果を要約すれば次のようになる．

（1） 偏心球かを有する厚板の問題は，形式上球かを有する半無限体の問題と同じになる．

（2） 最大引張応力は平面境界が最も近い側の球か面の頂点Aに生じ，球か半径が増加するにつれて急激に増大するが，これと反対の頂点 A′ に生ずる引張応力はわずかに増大する．また偏心量が増せばこれらの応力は急激に増大する．

（3） 球か面の A′ 点近傍における応力 σ_φ, σ_θ は，半無限体の場合と異なり板面の影響がめいりょうにみられる．

（4） 最大引張応力は，1軸引張荷重を受けるほうが2軸一様引張荷重を受ける場合よりも小さい．

数値計算には東京大学大型電子計算機センターの HITAC 8800 および東京工業大学情報処理センターの HITAC 8700 を使用した．なお，本研究は昭和48年度文部省科学研究費の補助により行われたもので，付記して謝意を表する．

文　献

（1） Kaufman, R.N., *J. Appl. Math. & Mech.*, **22** (1958), 451.
（2） Ling, C.B. and Tsai, C.P., *Acta Mechanica*, **7**-2/3 (1969), 169; **7**-4 (1969), 262.
（3） 土田・中原，機論，**40**-330 (昭 49-2), 285.
（4） 土田・中原，機講論，No.720-10 (昭 47-8), 5.
（5） 土田・ほか2名，本論文集 3379 ページ．
（6） Sneddon, I.N., *Fourier Transform*, (1951), 514, McGraw-Hill.
（7） 土田・中原，機論，**35**-276 (昭 44-8), 1607.
（8） Nelson, W., *Math. Comp.*, 15 (1961), 12.
（9） Ling, C.B., *Math. Tab. & Other Aids to Comp.*, 11 (1957), 160.