

539.4.019.1 : 534.2 : 539.385

衝撃ねじりを受ける半無限長円すい棒*

松本浩之**, 土田栄一郎***, 宮尾三郎†, 綱田直正††

1. 緒 言

衝撃ねじり問題の解決は、基本的な機械要素である動力伝達軸の設計などに重要と思われるが、必ずしも十分に研究されているとはいいいにくい。最も基本的な形状である丸棒について、衝撃ねじりをうける場合の応力状態が明らかにされたのは比較的最近のことである⁽¹⁾。著者らの一人は、漸変断面棒の最も単純な場合である円すい棒の衝撃ねじり現象を調べ、一次元ねじり波の伝ば現象を仮定した解析結果と実験結果がよく一致することを示した⁽²⁾。さらに、半球ピット面に衝撃ねじりを受ける半無限体の問題を解析し、円すい棒の特別な場合である半無限体を伝ばするねじり波に、一次元のねじり波が基本的役割をはたしていることを明らかにした⁽³⁾。本研究では、漸変断面棒の衝撃現象をより正しく理解するための基礎とする目的で、衝撃ねじりを受ける円すい棒中のねじり波の伝ば現象を、動弾性理論に基づいて応力関数を用いラプラス変換法によって厳密に解析し、円すい棒の端面に作用する外力の分布状態が、伝ばする衝撃応力におよぼす影響について調べ、衝撃応力問題へのサンブナンの原理の拡張について検討した。

2. 応 力 関 数

図1(a)のような球座標 (R, θ, φ) 方向の変位を (u, v, w) とすれば、軸対称ねじりでは $u=w=0$ であり、慣性項を含む変位の方程式は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{R^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで t は時間、 $c_2 = \sqrt{G/\gamma}$ はせん断波の伝ば速度、そして G は横弾性係数、 ν はポアソン比、 γ は比重、 g は重力加速度である。

いま応力関数 χ を導入して⁽³⁾

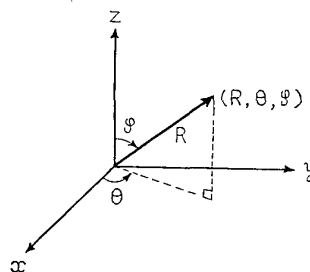
$$v = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \quad \dots\dots\dots (2)$$

とおけば、応力成分は χ を用いて次のように表される。

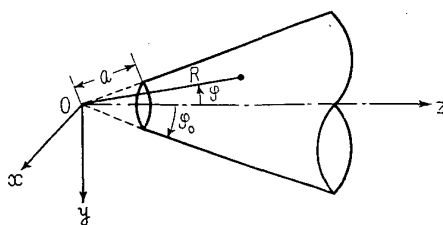
$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{R\theta}}{G} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \\ \frac{\tau_{\theta\varphi}}{G} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} - \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \\ \sigma_R &= \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \tau_{R\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(2)を式(1)に代入すれば、 χ は次の波動方程式を満たす必要がある。

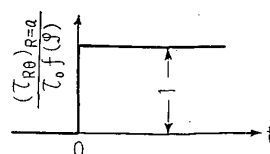
$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$



(a) 球座標



(b) 円すい棒



(c) ステップ状外力

図 1 衝撃ねじりを受ける円すい棒

* 昭和 47 年 8 月 29 日 第 50 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 49 年 1 月 16 日。

** 正員、東京工業大学 (東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*** 正員、埼玉大学理工学部。

† 正員、三菱総合研究所。

†† 准員、日産自動車会社。

3. 解 法

図1(b), (c)のように頂角 $2\varphi_0$ の半無限長円すい棒の端面に, φ 方向に任意に分布するせん断荷重 $\tau_0 f(\varphi)$ が時間に関してステップ関数状に作用して, 衝撃トルクを形成する場合について円すい棒のねじり波の伝ば現象と, それによって生ずる衝撃応力および変位をラプラス変換法によって解析する. この問題の境界条件は次のようになる.

(i) 円すい棒側面 $\varphi = \varphi_0$ で

$$\begin{aligned} (\sigma_\varphi)_{\varphi=\varphi_0} &= (\tau_{R\varphi})_{\varphi=\varphi_0} = 0 \\ (\tau_{\theta\varphi})_{\varphi=\varphi_0} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(ii) 円すい棒の端面 $R = a$ で

$$\begin{aligned} (\sigma_R)_{R=a} &= (\tau_{R\varphi})_{R=a} = 0 \\ (\tau_{R\theta})_{R=a} &= \tau_0 f(\varphi) H(t) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし $H(t)$ はヘビサイドの単位関数.

(iii) 無限遠方ですべての変位, 応力は零

また時間 $t=0$ 以前において円すい棒が無応力状態で静止しているものとすれば, 初期条件は

$$(v)_{t=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (7)$$

と表される. 上式は χ についての初期条件

$$(\chi)_{t=0} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (7)'$$

が成立するものとすれば満足される.

いま式 (7)' を用いて式 (2), (3) をラプラス変換すれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\bar{\tau}_{R\theta}}{G} = \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \varphi} \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta\varphi}}{G} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial \varphi^2} - \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となり, 式 (7)' を用いて式 (4) をラプラス変換すれば, 応力関数のラプラス変換 $\bar{\chi}$ は次のヘルムホルツの式を満たせばよいことがわかる.

$$\nabla^2 \bar{\chi} = \alpha_2^2 \bar{\chi} \quad (9)$$

ここで

$$\alpha_2^2 = \frac{p^2}{c_2^2}, \quad \bar{\chi} = \int_0^\infty \chi e^{-pt} dt$$

である.

式 (9) の変数分離された一般解のうち R, φ のみの関数からなるものは次のように表せる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\chi} &= \left(\frac{\sinh \alpha_2 R}{\alpha_2 R} \right) \left(\frac{1}{\log \tan \frac{\varphi}{2}} \right), \\ &\left(\begin{array}{l} h_{\nu}^{(1)}(i\alpha_2 R) \\ h_{\nu}^{(2)}(i\alpha_2 R) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} P_\nu(\mu) \\ Q_\nu(\mu) \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし $\mu = \cos \varphi$ であり, $h_{\nu}^{(1)}(z)$, $h_{\nu}^{(2)}(z)$ はそれぞれ第1種, 第2種の球ハンケル関数, $P_\nu(\mu)$, $Q_\nu(\mu)$ は第1種, 第2種のルジャンドル関数である. そして右辺の括弧の積は始めの括弧の一つと次の括弧内の一つの積の任意の線形結合を表すものとする. 式(10)の右辺において $h_{\nu}^{(1)}(i\alpha_2 R)$ を含むものは, この関数の漸近的性質により座標原点から R の増加する向きに伝ばする波動を表し, $P_\nu(\mu)$ を含むものは $\varphi=0$ で正則であるから, z 軸を対称軸とする中実円すい棒の内部領域で正則な解を与える. したがって $\bar{\chi}$ として $h_{\nu}^{(1)}(i\alpha_2 R)P_\nu(\mu)$ を選べば, 境界条件 (iii) は満たされることになる. 境界条件 (i), (ii) のうち式 (5), (6) を除いたものは式 (3) によって自動的に満足されている. そして満足すべき境界条件式 (5), (6) のラプラス変換は次のようになる.

$$(\bar{\tau}_{\theta\varphi})_{\varphi=\varphi_0} = 0 \quad (11)$$

$$(\bar{\tau}_{R\theta})_{R=a} = \tau_0 f(\varphi)/p \quad (12)$$

そこで式 (11), (12) を満たす変位および応力成分のラプラス変換解を求めるために, $\bar{\chi}$ を次の無限級数で表すことにする.

$$\bar{\chi} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m h_{\nu_m}^{(1)}(i\alpha_2 R) P_{\nu_m}(\mu) \quad (13)$$

ここで A_m, ν_m はそれぞれ境界条件より決定される未定係数ならびに固有値である.

式 (13) を式 (8) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= - \sum_{m=1}^{\infty} A_m h_{\nu_m}^{(1)}(i\alpha_2 R) P_{\nu_m}(\mu) \\ \frac{\bar{\tau}_{R\theta}}{G} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{R} \{ (\nu_m + 2) h_{\nu_m}^{(1)}(i\alpha_2 R) \\ &\quad - i\alpha_2 R h_{\nu_m-1}^{(1)}(i\alpha_2 R) \} P_{\nu_m}(\mu) \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta\varphi}}{G} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{R} h_{\nu_m}^{(1)}(i\alpha_2 R) P_{\nu_m}(\mu) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となる. ただし $P_\nu(\mu)$ はルジャンドル陪関数であって, λ が整数 n の時

$$P_\nu^{-n}(\mu) = (-1)^n \frac{\Gamma(\nu - n + 1)}{\Gamma(\nu + n + 1)} P_\nu^n(\mu)$$

が成立する⁽⁴⁾. ここで $\Gamma(z)$ はガンマ関数である.

式 (14) の $\bar{\tau}_{\theta\varphi}$ を式 (11) に代入すれば

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{R} h_{\nu_m}^{(1)}(i\alpha_2 R) P_{\nu_m}(\mu_0) = 0 \quad (15)$$

ただし $\mu_0 = \cos \varphi_0$ となる. そこで ν_m を ν に関する超越方程式

$$P_\nu^2(\mu_0) = (\nu - 1)\nu(\nu + 1)(\nu + 2)P_\nu^{-2}(\mu_0) = 0 \quad (16)$$

の根であるとすれば, 式 (15) は自然に満足される. 一方, ルジャンドル陪微分方程式から導かれる公式⁽⁵⁾

$$(\nu_i - \nu_j)(\nu_i + \nu_j + 1) \int_{\mu_0}^1 P_{\nu_i}^{-\lambda}(\mu) P_{\nu_j}^{-\lambda}(\mu) d\mu \\ = [\sqrt{1 - \mu_0^2} \{(\nu_i - \lambda)(\nu_i + \lambda + 1) \\ \times P_{\nu_i}^{-\lambda-1}(\mu) P_{\nu_j}^{-\lambda}(\mu) - (\nu_j - \lambda) \\ \times (\nu_j + \lambda + 1) P_{\nu_j}^{-\lambda-1}(\mu) P_{\nu_i}^{-\lambda}(\mu)\}]_{\mu_0}^1 \dots (17)$$

において ν_i, ν_j を式 (16) の相異なる根とし、さらに $\lambda=1$ とすれば次の直交関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{\mu_0}^1 P_{\nu_i}^{-1}(\mu) P_{\nu_j}^{-1}(\mu) d\mu &= 0 \quad (\nu_i \neq \nu_j) \\ \int_{\mu_0}^1 \{P_{\nu_i}^{-1}(\mu)\}^2 d\mu \\ &= \begin{cases} \frac{1}{12} (1 - \mu_0^2) (2 + \mu_0) & (\nu_i = 1) \\ -\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{(\nu_i - 1)(\nu_i + 2)}{2\nu_i + 1} P_{\nu_i}^{-1}(\mu_0) \\ \times \left[\frac{\partial P_{\nu_i}^{-2}(\mu_0)}{\partial \nu} \right]_{\nu=\nu_i} & (\nu_i \neq 1) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

この関係式を用いれば $P_{\nu}^{-2}(\mu_0) = 0$ の根 ν_m はすべて実数の単根であることを証明できる⁽⁶⁾。

そして、ルジャンドル陪関数の定義⁽⁴⁾から

$$P_1^{-2}(\mu_0) = \frac{(2 + \mu_0)(1 - \mu_0)}{6(1 + \mu_0)}$$

であり、頂角 $2\varphi_0$ は 0 と 2π の間にあるから $P_1^{-2}(\mu_0) > 0$ したがって式 (16) から $\nu=1.0$ は $P_{\nu}^{-2}(\mu_0) = 0$ の単根であることがわかる。他方、公式⁽⁴⁾ $P_{\nu}^{\lambda}(\mu) = P_{-\nu-1}^{\lambda}(\mu)$ から $P_{\nu}^{\lambda}(\mu)$ は ν について、 $\nu = -1/2$ に関して対称であり、式 (16) の根は $\nu \geq -1/2$ の範囲で求めればよい。そして $\nu=0$ は式 (16) の根であるがすべての変位、応力成分を零にする。そこで以下、式 (16) の根を $\nu_1=1.0, -1/2 < \nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_{m-1} < \nu_m < \dots (\nu_m \neq 0)$ とする。

式 (12) を満足させるために、上述の直交関係式 (17) を用いて、外力の分布形 $f(\varphi)$ を直交関数列 $P_{\nu_m}^{-1}(\mu)$ ($m=1, 2, 3, \dots$) で展開すれば

$$f(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m P_{\nu_m}^{-1}(\mu) \dots (19)$$

ここで

$$f_m = \frac{\int_{\mu_0}^1 f(\varphi) P_{\nu_m}^{-1}(\mu) d\mu}{\int_{\mu_0}^1 \{P_{\nu_m}^{-1}(\mu)\}^2 d\mu} \dots (20)$$

となる。式 (19) を境界条件式 (12) に代入し、その結果に式 (14) のせん断応力 $\bar{\tau}_{R\theta}$ を代入すれば

$$\frac{\tau_0}{Gp} \sum_{m=1}^{\infty} f_m P_{\nu_m}^{-1}(\mu) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{a} \\ \times \{(\nu_m + 2) h_{\nu_m}^{(1)}(i\alpha_2 a) \\ - i\alpha_2 a h_{\nu_m}^{(1)}(i\alpha_2 a)\} \nu_m (\nu_m + 1) P_{\nu_m}^{-1}(\mu)$$

となり、未定係数 A_m が次のように決まる。

$$A_m = - \frac{a\tau_0}{Gp} \frac{f_m}{\left[\nu_m (\nu_m + 1) \{(\nu_m + 2) h_{\nu_m}^{(1)}(i\alpha_2 a) - i\alpha_2 a h_{\nu_m-1}^{(1)}(i\alpha_2 a)\} \right]}$$

ここで数学公式⁽⁴⁾

$$h_{\nu}^{(1)}(iz) = \sqrt{\frac{\pi}{2zi}} \frac{K_{\nu+1/2}(z)}{(\pi/2) i e^{1/2\{\nu+(1/2)\}\pi i}}$$

ただし $K_{\nu}(z)$ は第 2 種変形ベッセル関数

を用い、無次元量 $\xi = c_2 t/a$, $\rho = R/a$, $\lambda = \alpha_2 a$ を用いれば、変位と応力はラプラス逆変換積分を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} -\rho^{1/2} \frac{Gv}{\tau_0 a} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m P_{\nu_m}^{-1}(\mu) I_m^1 \\ \rho^{3/2} \frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m P_{\nu_m}^{-1}(\mu) I_m^2 \\ -\rho^{3/2} \frac{\tau_{\theta\varphi}}{\tau_0} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m P_{\nu_m}^{-2}(\mu) \\ &\times (\nu_m - 1)(\nu_m + 2) I_m^1 \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

ただし

$$I_m^1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_{\nu_m+1/2}(\lambda\rho)}{G_m(\lambda)} \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} d\lambda \\ I_m^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{G_m(\lambda\rho)}{G_m(\lambda)} \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} d\lambda \\ G_m(z) = z K_{\nu_m-1/2}(z) + (\nu_m + 2) K_{\nu_m+1/2}(z)$$

4. ラプラス逆変換

I_m^1, I_m^2 の右辺の被積分関数は複素 λ 平面の原点 $\lambda=0$ および超越方程式

$$G_m(\lambda) = \lambda K_{\nu_m-1/2}(\lambda) + (\nu_m + 2) K_{\nu_m+1/2}(\lambda) = 0 \dots (22)$$

の根 λ において 1 位の極を持つ。被積分関数は ν_m が整数ならば一価関数であり、 ν_m が整数でない場合には多価関数となり原点が分岐点となる。そして式 (22) の根⁽⁷⁾は原点にあるものを除いては、すべて虚軸を除く左半平面に位置し、零点に関するコーシーの定理から、原点以外の根の種類とその総数 N_m を求めれば、 n を 0 または正の整数として

(1) $\nu_m = 2n$ のとき

n 組の共役複素根と一つの負の実根

したがって $N_m = 2n + 1$

(2) $2n < \nu_m < 2(n+1)$ のとき

$(n+1)$ 組の共役複素根

したがって $N_m = 2(n+1)$

(3) $\nu_m = 2n+1$ のとき

$(n+1)$ 組の共役複素根

したがって $N_m = 2(n+1)$

となることがわかる。そこで図 2 に示される反転積分路を選び、コーシーの留数定理およびジョルダンの定

理を用いて, I_m^1, I_m^2 の右辺の複素線積分を求めると次のようになる.

(i) $\xi > \rho - 1$ において

$$\left. \begin{aligned} I_m^1 &= \frac{\rho^{-(\nu_m+1/2)}}{\nu_m+2} - \sum_{n=1}^N \frac{K_{\nu_m+1/2}(\lambda_n^m \rho) \exp(\lambda_n^m \xi)}{\{(\nu_m+2)(\nu_m-1) + (\lambda_n^m)^2\} K_{\nu_m+1/2}(\lambda_n^m)} \\ &\quad - \cos\left(\nu_m + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^\infty \frac{g_2(r) K_{\nu_m+1/2}(r\rho) - g_1(r) I_{\nu_m+1/2}(r\rho)}{D(r)} \frac{e^{-r\xi}}{r} dr \\ I_m^2 &= \rho^{-(\nu_m+1/2)} - \sum_{n=1}^N \frac{g_1(\lambda_n^m \rho) \exp(\lambda_n^m \xi)}{\{(\nu_m+2)(\nu_m-1) + (\lambda_n^m)^2\} K_{\nu_m+1/2}(\lambda_n^m)} \\ &\quad + \cos\left(\nu_m + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^\infty \frac{g_2(r) g_1(r\rho) - g_1(r) g_2(r\rho)}{D(r)} \frac{e^{-r\xi}}{r} dr \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで

$$D(z) = g_1^2(z) + \pi^2 g_2^2(z) + 2\pi g_1(z) g_2(z) \sin\left(\nu_m + \frac{1}{2}\right) \pi$$

$$g_1(z) = (\nu_m - 1) K_{\nu_m+1/2}(z) - z K_{\nu_m+3/2}(z)$$

$$g_2(z) = (\nu_m - 1) I_{\nu_m+1/2}(z) + z I_{\nu_m+3/2}(z)$$

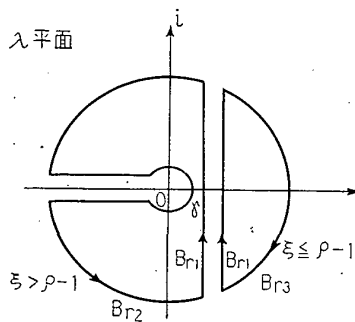
ただし $I_\nu(z)$ は第1種変形ベッセル関数. 式(23)の右辺の第1項めは複素 λ 平面の原点における留数, 第2項めの級数は式(22)の根 λ_n^m における留数和, 第3項めは分岐積分を示す. 式(23)の第1項のみを用いれば式(21)から静的解が得られ次のようになる.

$$-\frac{G(v)_{st}}{\tau_0 a} = \sum_{m=1}^\infty f_m P_{\nu_m}^{-1}(\mu) \frac{\rho^{-(\nu_m+1)}}{\nu_m+2}$$

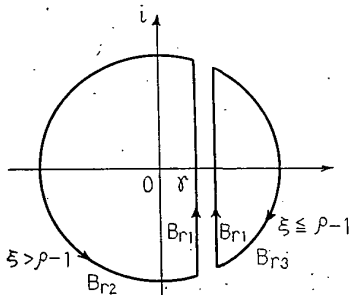
$$\frac{(\tau_{R\theta})_{st}}{\tau_0} = \sum_{m=1}^\infty f_m P_{\nu_m}^{-1}(\mu) \rho^{-(\nu_m+2)}$$

$$-\frac{(\tau_{\theta\varphi})_{st}}{\tau_0} = \sum_{m=1}^\infty f_m P_{\nu_m}^{-2}(\mu) (\nu_m - 1) \rho^{-(\nu_m+2)}$$

(ii) $\xi < \rho - 1$ すなわち波面到達以前においては



(a) $2n < \nu_m < 2(n+1)$ の場合



(b) $\nu_m = 2n, 2n+1$ の場合

図2 反転積分路

$$v = \tau_{R\theta} = \tau_{\theta\varphi} = 0$$

(iii) $\xi = \rho - 1$ すなわち波面においては

$$v = \tau_{\theta\varphi} = 0$$

$$\begin{aligned} \rho^{3/2} \frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} &= \sum_{m=1}^\infty f_m P_{\nu_m}^{-1}(\mu) \rho^{1/2} \\ &= \rho^{1/2} f(\varphi) \end{aligned}$$

となり, 波面の応力分布は与えられた外力の分布形と一致し, その大きさは座標原点からの距離に逆比例することがわかる.

端面に作用した合トルクは

$$T = 2\pi a^3 \tau_0 \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi$$

である. いま式(19)において, 右辺の第 m 項に対応するせん断応力 $\tau_0 f_m P_{\nu_m}^{-1}(\mu)$ で伝達されるトルク T_m を計算すれば次のようになる.

$$T_m = 2\pi a^3 \tau_0 f_m \int_0^{\varphi_0} P_{\nu_m}^{-1}(\mu) \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$T_m = 2\pi a^3 \tau_0 f_m \int_{\mu_0}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_{\nu_m}^{-1}(\mu) d\mu$$

$$(\because \mu = \cos \varphi)$$

そして式(17)から $\nu_m \neq 1$ すなわち $m \neq 1$ ならば

$$\int_{\mu_0}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_{\nu_m}^{-1}(\mu) d\mu = -(1-\mu_0^2) P_{\nu_m}^{-2}(\mu_0) \dots\dots\dots (24)$$

であり

$$T_1 = -\frac{\pi a^3}{3} \tau_0 f_1 (2 + \mu_0) (1 - \mu_0)^2$$

$$T_m = 0 \quad (m \geq 2)$$

となる. 式(18)において $m=1$ とすれば $P_1^{-1}(\mu) = -(1/2) \sin \varphi$ であり, トルクはせん断応力が $\sin \varphi$ 状に分布する一次の波のみによって伝達され, 高次の波は φ 方向のせん断応力分布を変化させるが, トルクの伝達には寄与しない. すなわち円すい棒中のねじり波の伝ばには, 一次の波が基本的役割を演じていることがわかる. そこで以後 $\sin \varphi$ 状分布の一次の波を円すい棒を伝ばするねじり波の基本波とよぶことにする. 外力が基本分布のせん断応力, すなわち $f(\varphi) = \sin \varphi$ の場合には式(20)の分母, 分子はそれぞれ式

(18), (24) で与えられるから

$$f_m = \begin{cases} -2 & (m=1) \\ 0 & (m \geq 2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

したがって

$$T = T_1 = \frac{2}{3} \pi a^3 \tau_0 (1 - \mu_0)^2 (2 + \mu_0)$$

となる。そしてこの場合、変位、応力は式 (21) から次のようになる。

$$-\frac{Gv}{\tau_0 a} = \frac{1}{3\rho^2} \sin \varphi \left[1 - \exp\left(-\frac{3}{2}(\xi - \rho + 1)\right) \right. \\ \left. \times \left\{ \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi - \rho + 1) \right. \right.$$

$$\left. - \sqrt{3}(2\rho - 1) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi - \rho + 1) \right\} \Big]$$

$$\frac{\tau_{R\theta}}{\tau_0} = \frac{1}{\rho^3} \sin \varphi \left[1 + (\rho - 1) \exp\left(-\frac{3}{2}(\xi - \rho + 1)\right) \right. \\ \left. \times \left\{ (\rho + 1) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi - \rho + 1) \right. \right.$$

$$\left. - \sqrt{3}(\rho - 1) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi - \rho + 1) \right\} \Big]$$

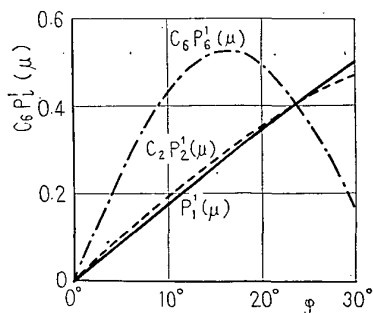
$$\tau_{\theta\varphi} = 0$$

5. 数 値 計 算

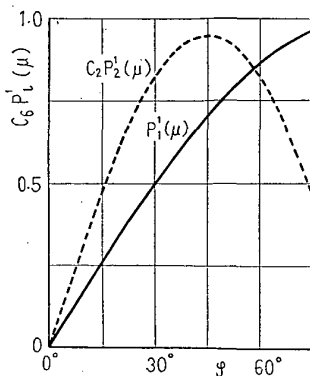
端面に作用する外力の分布状態が伝ばするねじり波に及ぼす影響を明らかにするために、それぞれ合トルクが等しい次のようなせん断応力の分布形を選ぶことにする。

$$f(\varphi) = c_l P_l^1(\mu) \quad (l=1, 2, 3, \dots\dots)$$

ここで $l=1$ ならば、 $P_1^1(\mu) = \sin \varphi$ であるから $f(\varphi)$



(a) $\varphi_0 = 30^\circ$



(b) $\varphi_0 = 75^\circ$

図 3 合トルクの等しい外力の分布形

は、基本分布形となり $c_1=1$ となる。この場合、変位、応力の式 (21) の右辺の係数 f_m は $l=1$ の時は式 (25) となり $l \geq 2$ ならば式 (20) から

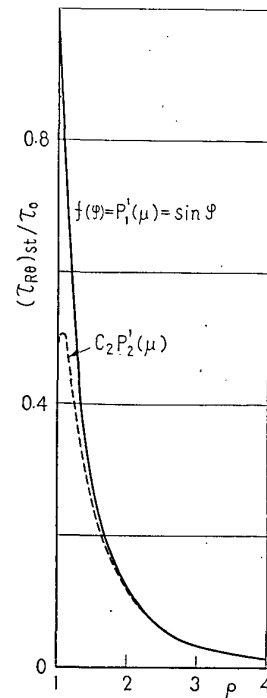
$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{-6(1+\mu_0)P_1^2(\mu_0)c_1}{(l-1)(l+2)(1-\mu_0)(2+\mu_0)} \\ f_m &= \frac{c_l}{(\nu_m-1)(\nu_m+2)(\nu_m-l)(\nu_m+l+1)} \\ &\quad \times \frac{P_l^2(\mu_0)}{\left[\frac{\partial P_{\nu}^{-2}(\mu_0)}{\partial \nu}\right]_{\nu=\nu_m}} \quad (m \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。例えば $l=2, 6$ ならば

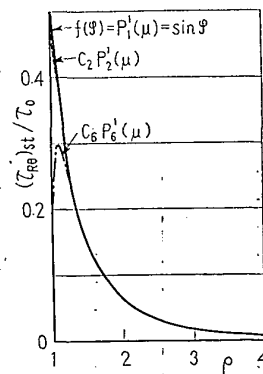
$$c_2 = \frac{4}{9} \frac{2+\mu_0}{(1+\mu_0)^2}$$

$$c_6 = \frac{64}{63} \frac{2+\mu_0}{(33\mu_0^4 - 18\mu_0^2 + 1)(1+\mu_0)^2}$$

となる。



(a) $\varphi_0 = \varphi = 75^\circ$



(b) $\varphi_0 = \varphi = 30^\circ$

図 4 静的応力分布

円すい棒の頂角を $\varphi_0=30^\circ, 75^\circ$ とし, 外力の分布形 $f(\varphi)$ として, 合トルクの等しい $P_1^1(\mu), c_2P_2^1(\mu), c_6P_6^1(\mu)$ の場合について数値計算を行った.

図3は端面に作用する外力の分布状態を示したもので, l が大きい程ねじり作用が対称軸近くに強く作用することを示している.

外力が静的に作用した場合, 円すい棒側面に生じるせん断応力 $\tau_{R\theta}$ の ρ 方向分布は図4に示されるようになり, $\varphi_0=30^\circ$ の場合には端面から無次元距離 0.5 以上離れれば, すなわち $\rho>1.5$ ならば円すい棒の母線に沿っての応力分布に外力の分布形による差が認められなくなり, いわゆるサンブナンの原理が成立する. $\varphi_0=75^\circ$ の場合には, $\rho>2.5$ ならば静的応力分布は外力の分布形に影響されなくなる.

超越方程式(16)の根 ν_m は $P_{\nu}^{-2}(\mu_0)$ とその ν に関する微分形を次のようにべき級数表示し,

$$P_{\nu}^{-2}(\mu_0) = \frac{1-\mu_0}{1+\mu_0} \frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)} \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+\nu)\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(n+3)} \frac{\{(1-\mu_0)/2\}^n}{n!} \\ \frac{\partial P_{\nu}^{-2}(\mu_0)}{\partial \nu} = \frac{1-\mu_0}{1+\mu_0} \frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\nu)\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+3)} \\ \times \{\psi(\nu+n+1) - \psi(\nu-n+1)\} \frac{\{(1-\mu_0)/2\}^n}{n!}$$

ここで $\psi(z)$ はディ・ガンマ関数である.

ニュートンの逐次近似法による公式

$$\nu_{II} = \nu_I - \frac{P_{\nu_I}^{-2}(\mu_0)}{[\{\partial P_{\nu}^{-2}(\mu_0)\}/\partial \nu]_{\nu=\nu_I}}$$

を用いて求めた. 表1には $\varphi_0=15^\circ, 30^\circ, 75^\circ$ の場合の ν_m の値が示してある. 絶対値が最小の根は角度 φ_0 によらず常に $\nu_1=1.0$ である. 図5には式(26)から求められた f_m の m による変化の一例が示されている. 次に求められた ν_m を使用して式(23)の積分項を計算した. 被積分関数のグラフの一例を図6に示した.

表1 $P_{\nu_m}^{-2}(\mu_0)=0$ の根 ν_m

m	φ_0		
	15°	30°	75°
1	1.0	1.0	1.0
2	19.148 69	9.373 28	3.604 18
3	31.671 03	15.615 37	6.040 74
4	43.898 67	21.720 96	8.456 92
5	56.027 48	27.780 72	10.866 12
6	68.110 61	33.819 29	13.272 07
7	80.168 77	39.846 28	15.676 24
8	92.211 78	45.866 24	18.079 32
9	104.244 87	51.881 60	20.481 69
10	116.271 14	57.893 79	22.883 57

時間 ξ の増加に対して被積分関数の絶対値は小さくなり, 波面到達後時間の経過とともに変位, 応力への寄与の度合いが減少することがわかる. ν_m が増加すればグラフはほぼ r の大きいほうへ平行移動し, ρ が増加すれば関数の絶対値がわずかに小さくなる. 数値計算ではシンプソンの3/8公式を用い, 積分区間と間隔は変位, 応力の有効数字が3けた以上になるように決めた. 式(23)の留数和を求めるために, 式(22)の複素根をニュートンの逐次近似法により求め, その位置を複素平面第2象限上に示すと図7(a), (b)のようになる. m が増加すれば根 λ_m^m は原点から離れて規則正しく点在し, 根の全体は複素平面上に無限にちらばっている. 図7(a), (b)を比較すれば, 式(22)の $\nu_1=1.0$ に対する根は φ_0 に無関係に $-1.5 \pm i\sqrt{3}/2$ であり, ν_m が大きい程対応する根は原点から遠くに

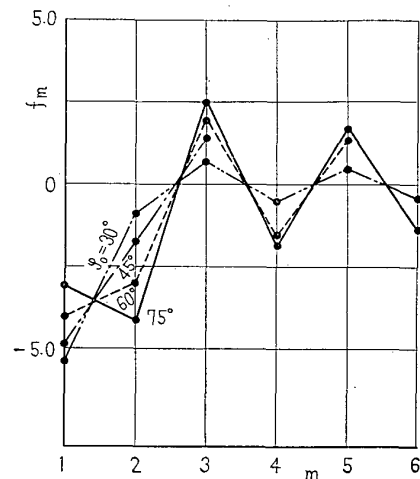


図5 係数 f_m の収束 [$f(\varphi)=c_2P_2^1(\mu)$]

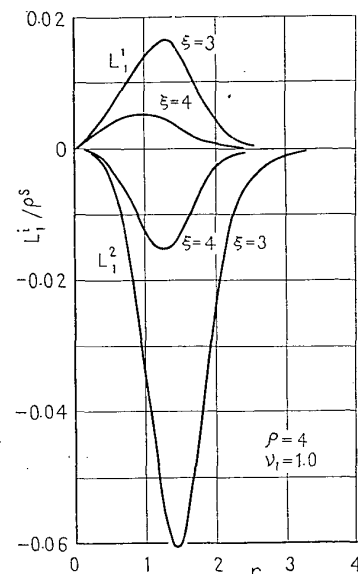


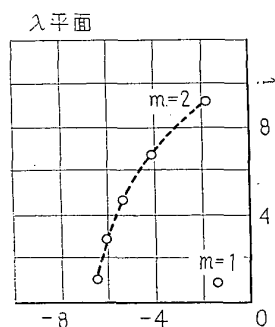
図6 式(23)の被積分関数 (L_1^1 は I_m^1 の被積分関数)

位置することがわかる。

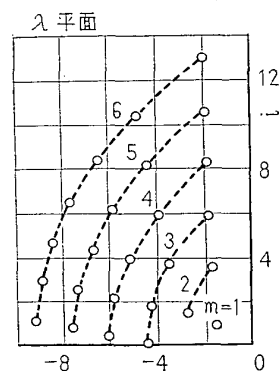
6. 応力と変位の時間変動

まず、座標原点から等距離にある断面内で変位あるいは応力の φ 方向分布が時間によって変化する様子を調べてみた。図 8 には $\rho=2$ の断面について $\varphi_0=75^\circ$ 、外力が $\tau_0 c_2 P_2^1(\mu)$ で与えられる場合の結果が示してある。図 8 (a) は $\tau_{R\theta}$ について示したものである。波面 ($\xi=1.0$) の φ 方向応力分布は外力の分布形に等しく、時間の経過とともに静的分布に移行していく様子がわかる。図 8 (b) は v について示したもので、波面では v は 0 である。図 8 (c) は $\tau_{\theta\varphi}$ について示したもので波面の値は 0 であり、その後応力は増大するが、最大値は $\tau_{R\theta}$ の最大値の $1/20$ 程度であり、時間の経過とともに再び最終値 0 に近づく。次に、円すい棒側面における変位、応力の時間変動が外力の分布形および頂角 $2\varphi_0$ によってどのように異なるかを調べ、その結果を図 9, 10 に示した。

図 9 (a), (b) には $\varphi_0=75^\circ$ とし、 $\rho=2, 4$ の場合の結果が示してある。 $\tau_{R\theta}$ の時間変動は波面到達後ほぼ $2.5a/c_2$ 時間以上経過すれば、外力の分布形による差が認められなくなる。変位の時間変動は応力の場合に比べさらに外力の分布形による差が小さいようである。



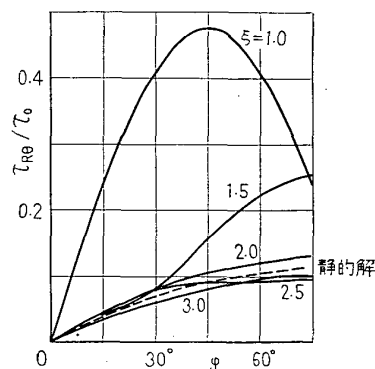
(a) $\varphi_0=30^\circ$



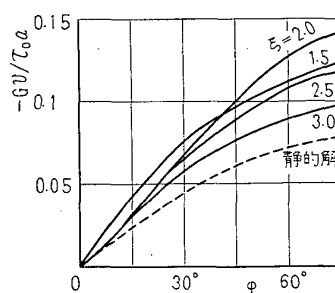
(b) $\varphi_0=75^\circ$

図 7 式 (22) の複素根 (λ 平面の第 2 象限)

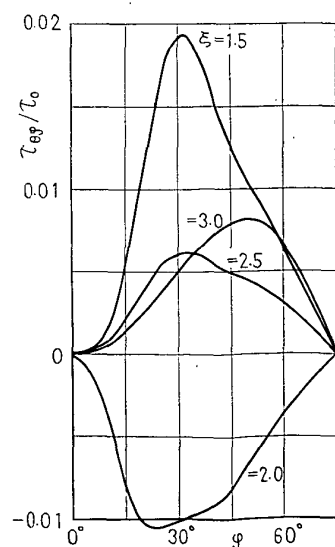
図 10 (a), (b) は $\varphi_0=30^\circ$ の場合の結果が示してある。図 9 と比べれば、 φ_0 が小さい程外力分布による差が無視しうる程度小さくなるまでの時間 (波面到達後ほぼ $1.5a/c_2$ 時間以内) は短いことがわかる。結局、ステップ状衝撃ねじりを受ける円すい棒表面の変位および応力の時間変動は、その位置にねじり波の波面が到達後、時間の経過とともに急速に基本分布外力が作用した場合の結果に近づく。したがって、複雑な分布形の外力が作用した場合でも、波面の到達直後のわずかな時間を除けば、生ずる変位と応力の時間変動



(a) $\tau_{R\theta}$ の分布

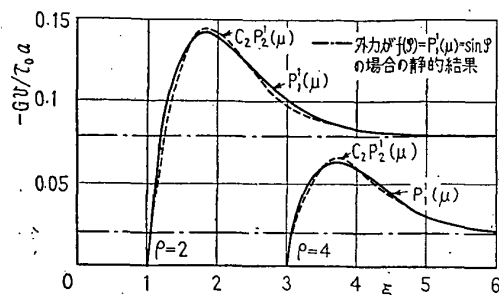
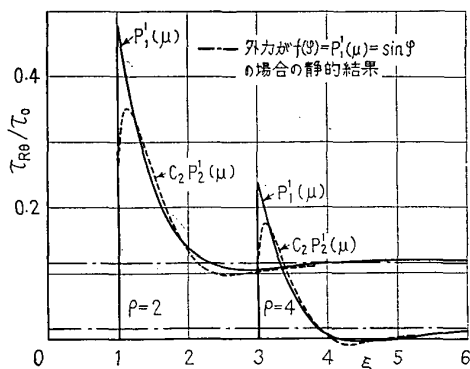


(b) v の分布



(c) $\tau_{\theta\varphi}$ の分布

図 8 変位・応力の φ 方向の分布 ($\rho=2, \varphi_0=75^\circ$)

(a) v の時間変動(b) $\tau_{R\theta}$ の時間変動図 9 円すい棒側面における変位・応力の時間変動 ($\phi_0 = \phi = 75^\circ$)

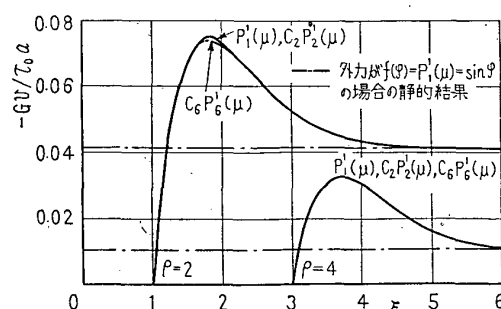
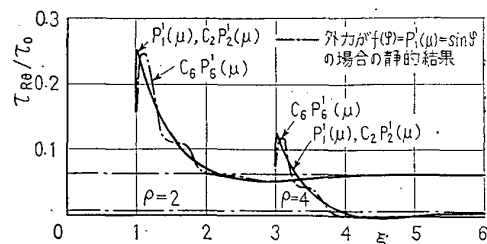
は, 合トルクの等しい基本分布外力の結果を用いて比較的正確に推測しうるように思われる. さらに, 外力の立ち上がり時間がゆるやかになれば, ねじり波の到達後より短い時間で, 基本分布外力の結果に近づくことが推測でき⁽³⁾, これらのことは実験結果⁽²⁾とよく符合している.

7. 結 言

端面にステップ関数状に変動する衝撃トルクを受ける半無限長円すい棒に生ずる変位・応力の時間変動を動弾性理論に基づいて解析し, 外力の分布形ならびに頂角の違いが, 伝ばするねじり応力波におよぼす影響を考察した. 結果を要約すれば次のようになる.

(i) 球座標系 (R, θ, ϕ) で表された衝撃ねじり問題の変位, 応力は応力関数 χ によって簡潔に表示される.

(ii) 円すい棒を伝ばするねじり波の波面におけるせん断応力の分布は外力の分布形に等しく, その大き

(a) v の時間変動(b) $\tau_{R\theta}$ の時間変動図 10 円すい棒側面における変位・応力の時間変動 ($\phi_0 = \phi = 30^\circ$)

さは端面からの距離に逆比例する. そしてトルクは基本波すなわち $\sin \phi$ 状分布の応力波のみによって伝えられる.

(iii) 端面に作用するせん断荷重の分布が複雑な場合でも, 波面到達後一定時間経過すれば近似的に基本波が伝わるとみなしうる. そして円すい棒の頂角が小さいほど, 基本波で近似しうるまでの時間は短くなる.

なお, 数値計算は東京工業大学情報処理センターの HITAC 7500 によった. 終わりに, 本研究をおこなうにあたり有益なご助言をいただいた東京工業大学中原一郎教授に感謝の意を表します.

文 献

- (1) 竹内・ほか 2 名, 機論, **33**-251 (昭 42-7), 1018.
- (2) 松本・三橋, 機講論, No. 700-13 (昭 45-10), 119.
- (3) 宮尾・ほか 3 名, 機論, **41**-341 (昭 50-1), 126.
- (4) 森口・ほか 2 名, 数学公式, III (昭 38), 129, 119, 120, 165, 170, 岩波書店.
- (5) 川下, 熱伝導論, (昭 41), 293, オーム社.
- (6) Hobson, E.W., *Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, (1955), 403, Chelsea.
- (7) Watson, G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed. (1962), 511, Cambridge Univ. Press.

討 論

[質問] 林 卓 夫 (大阪大学基礎工学部)

(1) 式(2)で応力関数 χ を導入されたのは式(1)の左辺を χ に関するルジャンドルの微分方程式の形に

書き改めるためかと思う. しかし v のままで式(1)はルジャンドルの陪微分方程式の形になっていて, 式(14)の \bar{v} は式(1)のラプラス変換形から直接求めら

れるのではないか。

(2) 基本波による変形は時間が十分経過した後は、弾性学でよく知られている円すい棒のねじりの式(付1)

$$\tau_{\theta z} = crz / (r^2 + z^2)^{5/2}$$

に収束するのか。

〔回答〕 (1) ご指摘のとおり、変位 v のラプラス変換 \bar{v} の一般解は、式(1)のラプラス変換形から直接求めることもできる。

応力関数 χ を導入した理由は、 χ が波動方程式を満たす関数であること、変位、応力成分がその波動方程式の一般解の微分形で表しうることのためである。

一般の動弾性問題において、変位の基礎方程式の一般解を直接求めることは必ずしも容易ではないが、波動方程式を満たす複数の応力関数の導入によって一般解を求めることが容易になる。

著者らは、応力関数による動弾性問題の解法の一環という観点に立って解析したわけであるが、本問題に限れば、応力関数を導入しなければならない必然性は特にない。

(2) ご指摘のとおりである。

〔質問〕 竹内洋一郎 (大阪府立大学工学部)

式(1)は減衰項が入っていないと考えるが、その場合現実の伝達軸は有限長であるから、無限遠で変位、応力消失の条件が使えない。とすれば、式(9)の解の形として $h_{\nu}^{(1)}(i\alpha_2 R)P_{\mu}(\mu)$ だけでは適当でなくなると思う。以上の見地から考察すると、本研究の解は衝撃ねじりのごく初期の段階の、かつ端面より遠くない

とき正確である結果でないか、いずれにせよ最大応力は端面近くで、かつ z の小さいときに生じることを予想することは可能であるから問題が残るのではないか。

〔回答〕 端面に $\sin \varphi$ 状に分布するせん断応力が作用する場合、すなわち基本波の伝ば状態については、有限長円すい棒の場合について、二とおりの解法(波動伝ばを表す wave 法、弾性振動を表す normal mode 法)を示し、実験結果と比較検討した結果をすでに報告(付2)した。そのねらいは、複雑な衝撃応力現象を精度はある程度犠牲にしても、できるだけ簡単に取扱う方法をさぐることであった。

本研究は、端面に作用するせん断応力の分布状態が伝ばするねじり応力に及ぼす影響を明らかにするために、半無限長円すい棒を取扱ったもので、有限長円すい棒についても、対象としている断面に衝撃端とは別のもう一方の端からの反射波が最初に到達する時間以前においては、正しい結果を与える。

本研究の成果は、現実の伝達軸の衝撃ねじり応答を、先に報告した基本波の伝ば現象から推定する場合の精度と適用範囲について検討する資料がえられたことである。

現実の伝達軸の衝撃端近傍のように動的なサンブナの原理が適用できないような範囲について、正確な知識をうるためには、本研究の手法を有限長の場合について適用する必要があるのはご指摘のとおりであり、これに関しては解析上大きな困難はないと考えている。

(付1) Timoshenko, S. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed. (1970), 345, McGraw-Hill.

(付2) 松本・三橋, 機講論, No. 700-13 (昭 45-10), 119.