素研 65－5 (1982－8)

Condensation of magnetic monopole and dual string model

埼大・理　伊 藤 大 介

(1982年4月22日受理)

(1) Magnetic Monopole (Pair) Current $k_\lambda(x)$ が分布する時空を，荷電$+q$，$-q$ の古典粒子対が与えられた運動 $\mathbf{r}=\mathbf{z}^{\pm}(t)$をしているとき，その電流 $J_\lambda(x)\equiv(\mathbf{J},\ \rho)$ を

$$\left.\begin{aligned}\rho(x)&=q\left[\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}^+(t))-\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}^-(t))\right]\\ \mathbf{J}(x)&=q\left[\frac{d\mathbf{z}^+(t)}{dt}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}^+(t))-\frac{d\mathbf{z}^-(t)}{dt}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}^-(t))\right]\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

とすれば， Maxwell 方程式 (有理 Gauss 単位)

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E}&=\rho\\ \nabla\times\mathbf{H}-\frac{\dot{\mathbf{E}}}{c}&=\frac{\mathbf{J}}{c}\end{aligned}\right\}\ (1-2a)\qquad\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{H}&=k_0\\ \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\dot{\mathbf{H}}}{c}&=\frac{-\mathbf{K}}{c}\end{aligned}\right\}\ (1-2b)$$

で記述される Gauge 場 ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) は， Potential では表わせない。しかし“ Hertz vector の源 ”

$$\mathbf{Z}(x)=q\int_{\mathbf{z}^-(t)}^{\mathbf{z}^+(t)}d\mathbf{z}'\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}')\tag{1-3}$$

を導入すれば (積分路は $\mathbf{z}^+$, $\mathbf{z}^-$ を結ぶ直線とする)， (1－1) は

$$\nabla\cdot\mathbf{Z}(x)=-\rho(x),\tag{1-4}$$

$$\frac{\partial\mathbf{Z}(x)}{\partial t}=\mathbf{J}(x)/c\tag{1-5}$$

とかけるから， (1－2a) は

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{Z})&=0\\ \nabla\times\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+\mathbf{Z})&=0\end{aligned}\right\}\tag{1-6}$$

となり

$$\mathbf{E}+\mathbf{Z}=-\nabla\times\mathbf{B}\qquad\mathbf{H}=-\nabla B_0-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}\tag{1-7}$$

によって Potential $B_\lambda(x)\equiv(\mathbf{B},\ B_0)$ を導入することができる。[1] (1－7) を (1－2b) に代入すれば

D. ITÔ; Dept. of Phys., Saitama Univ.

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot(\nabla B_0+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}})=-k_0\\&\nabla\times(-\nabla\times\mathbf{B}-\mathbf{Z})-\frac{1}{c}(\nabla\dot{B}_0+\frac{1}{c}\ddot{\mathbf{B}})=\frac{-\mathbf{K}}{c}\end{aligned}\right\}\tag{1-8}$$

が得られる。B_λ の gauge を

$$\partial_\lambda B_\lambda=\nabla\cdot\mathbf{B}+\dot{B}_0/c=0\tag{1-9}$$

に決めれば，Potential をきめる式 (1−8) は

$$\Box B_0=-k_0\ ,\qquad \Box\mathbf{B}-\nabla\times\mathbf{Z}=-\mathbf{K}/c\tag{1-10}$$

とかける。またこれらの運動方程式は作用原理

$$\delta W=0\tag{1-11}$$

$$W\equiv\int d^4x\left[-\frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{B}+\mathbf{Z})^2+\frac{1}{2}(\nabla B_0+\frac{\dot{\mathbf{B}}}{c})^2+\frac{1}{c}B_\lambda k_\lambda\right]\tag{1-12}$$

$$=\int d^4x\left[\frac{1}{2}B_\lambda\Box B_\lambda+\frac{1}{c}B_\lambda k_\lambda-\mathbf{Z}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})-\frac{\mathbf{Z}^2}{2}\right]\tag{1-13}$$

から導くことができる。

(2) ここで Monopole (Pair) が Condensation を起したとする。その Mechanism は後で考えることにして，ここでは，それを London 条件

$$k_\lambda(x)=-\frac{M^2c}{2}B_\lambda(x)\tag{2-1}$$

することにする。このとき (1−13) は

$$W=\int d^4x\left[\frac{1}{2}B_i(\Box-M^2)B_i-(\nabla\times\mathbf{Z})\cdot\mathbf{B}-\frac{\mathbf{Z}^2}{2}\right]\tag{2-2}$$

となる。(B_0 は荷電 $\mathbf{Z}$ と decouple するので以下略す。 $i=1.\ 2.\ 3$)

$\mathbf{Z}(x)$ の作る“静電界”のみ存在するものとして

$$B_i=\frac{1}{\Delta-M^2}(\nabla\times\mathbf{Z})_i\tag{2-3}$$

を代入，(2−2) から B_i を消去すれば

$$W=\int d^4x\left[-\frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{Z})_i\frac{1}{\Delta-M^2}(\nabla\times\mathbf{Z})_i-\frac{\mathbf{Z}^2}{2}\right]$$

$$=\frac{-1}{2}\int d^4x\left[Z_i\frac{M^2}{M^2-\Delta}Z_i+\nabla\cdot\mathbf{Z}\frac{1}{M^2-\Delta}\nabla\cdot\mathbf{Z}\right]\tag{2-4}$$

となる[2)]。ここで $M^2\to0$，即ち Monopole current $k_\lambda\to0$ のとき (2−4) は

$$W \xrightarrow[(M^2\to 0)]{} \frac{-1}{2}\int d^4x\, \nabla\cdot \mathbf{Z}\frac{1}{-\Delta}\nabla\cdot\mathbf{Z} = \frac{-1}{2}\int d^4x\, \rho\frac{1}{-\Delta}\rho \qquad (2-5)$$

即ち荷電間の Coulomb 力を記述していることがわかる。

次に $M^2\to\infty$ の極限を考えれば

$$W \xrightarrow[(M^2\to 0)]{} \frac{-1}{2}\int d^4x\, Z_i Z_i \qquad (2-6)$$

となる。(1−3) を代入すれば

$$W \to -\frac{q^2}{2}\int d^4x \int_{Z^-(t)}^{Z^+(t)} d\mathbf{z}'\cdot d\mathbf{z}''\, \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}'')$$

$$= -\frac{q^2}{2}\delta^2(0)\int dt\, |\mathbf{z}^+(t)-\mathbf{z}^-(t)| \qquad (2-7)$$

となり，荷電間の String potential が得られる。$\delta^2(0)$は $M^2\to\infty$で string の太さ $a^2\to 0$ を意味する。$\delta^2(0)=\frac{1}{a^2}$ とおけば

$$W \xrightarrow[(M^2\sim\frac{1}{a^2})]{} -\frac{q^2}{2a^2}\int dt\, |\mathbf{z}^+(t)-\mathbf{z}^-(t)| \qquad (2-8)$$

であろうと考えられる。(a^2 をきめるには Condensation の Mechanism に立入らなければならない。)

このように我々の Model では Monopole condensation の order parameter M^2 によって，string potential と Coulomb potential が内挿されている。[3)]

(3) 我々の Model は “枝のある string ” (Baryon) をも含むことを示そう。色荷電 q_1, q_2, q_3 の quark が $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ にある場合を考えよう。

$$q_1+q_2+q_3=0 \qquad (3-1)$$

のときを考える。$\mathbf{z}_c$ を任意の１点として (1−3) の代りに

$$\mathbf{Z}(x) \equiv \int_{\mathbf{z}_c(t)}^{\mathbf{z}_1(t)} q_1 d\mathbf{z}'\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}') + \int_{\mathbf{z}_c(t)}^{\mathbf{z}_2(t)} q_2 d\mathbf{z}'\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}') + \int_{\mathbf{z}_c(t)}^{\mathbf{z}_3(t)} q_3 d\mathbf{z}'\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}') \qquad (3-2)$$

とおけば

$$\mathrm{div}\,\mathbf{Z} = -\left[q_1\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}_1(t)) + q_2\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}_2(t)) + q_3\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}_3(t)) \right.$$

$$\left. -(q_1+q_2+q_3)\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}_c(t)) \right] \qquad (3-3)$$

となるが，末項は (3−1) により０となる。従って荷電分布

$$\rho(x) = \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{z}_a(t)) \qquad (3-4)$$

には $\mathbf{z}_c(t)$は現われない。このとき $M^2\to 0$ では

$$W \xrightarrow[(M^2 \to 0)]{} \frac{-1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi |\mathbf{z}_\alpha(t) - \mathbf{z}_\beta(t)|} dt \tag{3-5}$$

となり，q_1，q_2，q_3 の静電自己エネルギーを含む Coulomb 相互作用を表わす。

$M^2 \to \infty$ では

$$W \xrightarrow[(M^2 \to \infty)]{} \frac{-1}{2} \int d^4x \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbf{z}_c(t)}^{\mathbf{z}_\alpha(t)} q_\alpha d\mathbf{z}' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{z}') \cdot \int_{\mathbf{z}_c(t)}^{\mathbf{z}_\beta(t)} q_\beta d\mathbf{z}'' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{z}'')$$

$$= \frac{-1}{2} \delta^2(0) \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha^2 \int dt |\mathbf{z}_\alpha(t) - \mathbf{z}_c(t)|$$

$$= - \int dt \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{q_\alpha^2}{2a^2} |\mathbf{z}_\alpha(t) - \mathbf{z}_c(t)| \tag{3-6}$$

となり，q_1 q_2 q_3 が $\mathbf{z}_c$ と string-potential で結ばれていることを示している。こんどは結び目 $\mathbf{z}_c$ が現われるが，荷電や質量をもった点ではない。

参　照

1) B_λ は通常の Potential A_λ とは dual な関係にある。また $\mathbf{z}_c(x)$は Dirac Monopole Theory の Lagrangian density

$$-\frac{1}{4} (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda - G^*_{\lambda\mu})^2$$

に現われる $G^*_{\lambda\mu}$ に dual な量である。

2) Dirac String について対応するより一般的な理論については

Y. Nambu; Phys. Rev. **D10** 4262 (1974) 参照

Monopole 運動方程式，Dual String については

D. Itô; preprints SUP 8101, 8102, (1981) SUP 8201, SUP 8202 (1982) 参照

3) 格子 Gauge 場に於ける温度 parameter β と M^2 の間に密接な関連が期待されるが，これについては後に述べるであろう。