Non-local Field with Vibrating Inner Continuum

伊　藤　大　介（埼玉大理工）

前論文[1]では調和振動子を内蔵するBilocal Fieldを考えたが、ここではこれを拡張して、多くの調和振動を内蔵するMulti-local Field

$$[M^2+P^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+\omega^2 q_i^2-3\omega)]\psi_n(P, q_1, \cdots, q_n)=0, \quad (n=1, 2, \cdots\cdots) \tag{1}$$

とLocal Field

$$[M^2+P^2]\psi_0(P)=0 \tag{2}$$

の一組を考えよう。但し、P_λは重心運動量で、(p_λ, q_λ)は内部（相対）運動を記述する変数である。また

$$P_\lambda p_\lambda = P_\lambda q_\lambda = 0 \tag{3}$$

であるとする。従って、p_λ, q_λは本質的には3次元的である。

さて、$\psi_n (n=0, 1, 2, \cdots)$は場の演算子であるが、仮りに若し、これらが多体問題の波動函数であったなら、これらの方程式群は、ある振動する連続体（波動像）から出発し、これを才2量子化することにより、そのFock表示として得られることは周知の通りである。[2] ここでは、ψ_nは場の演算子であるがその場合にも粒子像として(1)(2)を有するような連続体（波動）像が存在することを示そう。そして、この連続体の描像では、場の演算子ψは、重心座標の点函数であるのみならず、内部（相対座標）空間に於ける連続分布$\phi^*(q)$の汎函数$\psi(P, \phi^*)$になる。場の演算子が重心の点函数であるのみならず、重心近傍の連続分布の汎函数であるという点で、この理論は「場の演算子が、ある領域Dの汎函数である」とする湯川先生の素領域理論[3]に似ている。また、このようにして導かれた連続体の振動を内蔵する非局所場理論は、内容的には我々が以前に論じた振動するMeson Cloudの理論[4]と同じものになり、また、その古典像として振動するDroplet Modelが得られることを示そう。

§1 場の演算子とその運動方程式

問題は(1),(2)式をその Fock 成分にもつような「場の理論」を作ることである。そのため、交換関係

$$[\phi(q),\phi^*(q')]=\delta^3(q-q'),\ [\phi(q),\phi(q')]=[\phi^*(q),\phi^*(q')]=0, \tag{4}$$

を満たす演算子と(1),(2)を満足する ψ_n を用いて、汎函数

$$\psi(P,\phi^*)\equiv\psi_0(P)+\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3q_1\cdots d^3q_n\frac{\phi^*(q_1)\cdots\phi^*(q_n)}{\sqrt{n!}}\psi_n(P,q_1\cdots q_n), \tag{5}$$

を定義し、(*)先づ、(5)が満足する運動方程式を導くことにしよう。但し、ϕ,ϕ^* は ψ_n と可換であると仮定する。

微分演算子

$$\left.\begin{aligned}A_\lambda^*(q)&\equiv\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_\lambda}+i\omega q_\lambda\right)=\frac{p_\lambda+i\omega q_\lambda}{\sqrt{2\omega}}\\ A_\lambda(q)&\equiv\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_\lambda}-i\omega q_\lambda\right)=\frac{p_\lambda-i\omega q_\lambda}{\sqrt{2\omega}}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

を用いて、

$$H\equiv\omega\int\phi^*(q)A_\lambda^*(q)A_\lambda(q)\phi(q)d^3q=\frac{1}{2}\int\phi^*(q)(p_\lambda^2+\omega^2q_\lambda^2-3\omega)\phi(q)d^3q \tag{7}$$

を定義し、H と $\psi(P,\phi^*)$ の交換関係を計算すれば、

$$\begin{aligned}[H,\psi(P,\phi^*)]&=[\omega\int\phi^*(q)A_\lambda^*(q)A_\lambda(q)\phi(q)d^3q,\ \psi(P,\phi^*)]\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\int d^3q_1\cdots d^3q_n\frac{\phi^*(q_1)\cdots\phi^*(q_{i-1})\int\phi^*(q)\,\omega A_\lambda^*A_\lambda d^3q\,[\phi(q),\phi^*(q_i)]\cdots\phi^*(q_n)}{\sqrt{n!}}\\ &\qquad\times\psi_n(P,q_1\cdots q_n)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3q_1\cdots d^3q_n\frac{\phi^*(q_1)\cdots\phi^*(q_n)}{\sqrt{n!}}\sum_{i=1}^{n}\omega A_\lambda^*(q_i)A_\lambda^*(q_i)\psi_n(P,q_1\cdots q_n)\end{aligned} \tag{8}$$

となる。他方

$$(P^2+M^2)\psi(P,\phi^*)=(P^2+M^2)\psi_0(P)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3q_1\cdots d^3q_n\frac{\phi^*(q_1)\cdots\phi^*(q_n)}{\sqrt{n!}}(P^2+M^2)\psi_n(P,q_1\cdots q_n), \qquad (9)$$

であるから、(8)と(9)から

$$(P^2+M^2)\psi(P,\phi^*)+[H,\psi(P,\phi^*)]=$$

$$=(P^2+M^2)\psi_0(P)+\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{\phi^*(q_1)\cdots\phi^*(q_n)}{\sqrt{n!}}d^3q_1\cdots d^3q_n\times$$

$$\times(M^2+P^2+\sum_{i=1}^{n}\omega A_\lambda^*(q_i)A_\lambda(q_i))\psi_n(P,q_1\cdots q_n), \qquad (10)$$

となり、この右辺は(1)と(2)により零になる。依って$\psi(P,\phi^*)$は

$$(P^2+M^2)\psi(P,\phi^*)+[H,\psi(P,\phi^*)]=0 \qquad (11)$$

を満足する。これが$\psi(P,\phi^*)$ の運動方程式であるが、もう少し運動方程式らしくするには、$\psi(P,\phi^*)$ の代りに

$$F(P,\phi^*,s)\equiv e^{i(P^2+M^2)s}\psi(P,\phi^*) \qquad (12)$$

を考えれば、(11)式は、

$$i\frac{\partial F}{\partial s}=[H,F] \qquad (13)$$

とかける。(12)からわかるように、ここでsはFock-Nambu の重心のProper Time[5] である。

(13)式が、(1),(2)式と同等な、連続体像に於ける場の量$\psi(P,\phi^*)$ の運動方程式であるが、このことを物理的に見易くするため、次に"One Particle State" $\psi(P,\phi^*)|0>$ の Schrödinger 方程式と、そのNormalization を考えることにしよう。

§ 2　"One Particle State" の Schrödinger 方程式と Norm

$|0>$を

$$\phi(q)|0>=0, \qquad \text{for all } q's \qquad (14)$$

で定義される状態として、(11)式を$|0>$に左から作用させれば

$$[P^2+M^2+\omega\int\phi^*(q)\,A^*_\lambda(q)A_\lambda(q)\phi(q)\,d^3q\,]\psi(P,\phi^*)|0>=0, \qquad (15)$$

或は

$$E^2\psi(P,\phi^*)|0>=(M^2+P^2+\int d^3q\,\phi^*(q)\frac{p^2+\omega^2q^2-3\omega}{2}\phi(q))\psi(P,\phi^*)|0>, \qquad (16)$$

が得られる。

これは、重心運動がKlein-Gordon 方程式で記述され、相対座標qの空間には調和振動する連続体が密度 $\phi^*(q)\phi(q)$ で分布する系を記述するSchrődinger方程式である。すなわち、$\psi(P,\phi^*)$ で記述される場は、振動する連続体を内蔵する非局所場であることがわかる。

また、この"One particle state"のNormは

$$<0|\psi^*(P,\phi^*)\psi(P,\phi^*)|0>=|\psi_0(P)|^2+$$
$$+\sum_{m,n=1}^{\infty}\int d^3q'_1\cdots d^3q'_m\int dq_1\cdots dq_n\frac{<0|\phi(q'_1)\cdots\phi(q'_m)\phi^*(q_1)\cdots\phi^*(q_n)|0>}{\sqrt{m!\,n!}}\times$$
$$\times\psi^*_m(P;q'_1\cdots q'_m)\psi_n(P,q_1\cdots q_n)$$
$$=|\psi_0(P)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\int|\psi_n(P;q_1\cdots q_n)|^2\,d^3q_1\cdots d^3q_n, \qquad (17)$$

となる。

以上からわかることは、若しはじめに内部に調和振動する連続分布を持つ非局所場が与えられた場合には、この連続分布を才2量子化したときのFock表現が、出発点の非局所場の系(1),(2)である、ということである。

§ 3 Bound Meson Analogue

(6)と(7)からわかるように、"内部場"のHamiltonian Hは

$$H=\frac{1}{2}\int d^3q\,(\frac{\partial\phi^*}{\partial q_\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial q_\lambda}+\omega^2q^2\phi^*\phi-3\omega\phi^*\phi) \qquad (18)$$

とかける。これは重心にBoundされたMesonのHamiltonianによく似ている。この類似をもう少しはっきりさせるため、球対称引力Potential $V(q^2)$を考え、q^2 の小さい処で

$$V(q^2)=V(0)+V'(0)q^2+\cdots=-|V(0)|+|V'(0)|q^2+\cdots, \tag{19}$$

として　$|V(0)|\equiv\mu^2+3\omega,\qquad |V'(0)|\equiv\omega^2$　　(20)

とおけば、$\omega q^2=V(q^2)+\mu^2+3\omega$ となる。これを(18)に代入すれば

$$H=\frac{1}{2}\int d^3q\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial q_\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial q_\lambda}+\mu^2\phi^*\phi+\phi^*V(q^2)\phi\right) \tag{21}$$

となり、"One particle state" の Schrödinger 方程式(15)は

$$\left[P^2+M^2+\frac{1}{2}\int d^3q\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial q_\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial q_\lambda}+\mu^2\phi^*\phi+\phi^*V(q^2)\phi\right)\right]\psi(P,\phi^*)|0\rangle=0 \tag{22}$$

となる。これは引力 Potential $V(q^2)$ で重心に Bound された Charged Meson Cloud を伴う Klein-Gordon 系の方程式で、$\psi(P,\phi^*)$はこの場合、系の Fock Operator の役割を演じている。

(22)式は以前[4]に Rising Trajectory を Bound Meson の Bose Condensation として説明するのに用いた出発点の式と全く同等である。このようにして、§2では才2量子化の演算子として形式的に導入されたϕ,ϕ^*に Cloud Meson という物理的意味を与えることが出来る。

§4　Spinor 系—Linearization:

以前(22)から出発して Baryon のような Spinor 系の Rising Trajectory を論ずる場合、[4]その一次化に難点があった。そこでは苦肉の策として

$$\left[\gamma\cdot\partial+M\sqrt{1+\frac{1}{M}\int d^3q\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial q_\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial q_\lambda}+\mu^2\phi^*\phi+\phi^*V\phi\right)}\right]|\Omega\rangle=0$$

という非線型方程式に頼ったが、ここでは(22)式のみならず、$\psi(P,\phi^*)$の運動方程式(11)も、前論文[1]の方法で一次化出来ることを示そう。

答を先に出せば、(11)式を1次化したものは

$$\left.\begin{aligned}&(M+i\gamma\cdot P)\psi(P,\phi^*)+i\gamma_5\sqrt{\omega}\int\phi^*(q)A_\lambda^*(q)U_\lambda(P,q,\phi^*)d^3q=0\\&(M+i\gamma\cdot P)U_\lambda(P,q,\phi^*)+i\gamma_5\sqrt{\omega}\,A_\lambda(q)\left[\phi(q),\psi(P,\phi^*)\right]=0\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

で与えられる。

〔証明〕上の才1式に左から$(M-i\gamma\cdot P)$を作用させれば

$$0=(M^2+P^2)\psi(P,\phi^*)+i\gamma_5\sqrt{\omega}\int d^3q\,\phi^*(q)A_\lambda^*(q)(M+i\gamma\cdot P)U_\lambda(P,q,\phi^*)$$

が得られる。この才2項に(23)の才2式を代入すれば

$$0=(M^2+P^2)\psi(P,\phi^*)+i\gamma_5\sqrt{\omega}\int d^3q\,\phi^*(q)A_\lambda^*(q)(-i\gamma_5\sqrt{\omega})A_\lambda(q)[\phi(q),\psi(P,\phi^*)]$$

$$=(M^2+P^2)\psi(P,\phi^*)+[\omega\int\phi^*(q)A_\lambda^*(q)A_\lambda(q)\phi(q)d^3q,\psi(P,\phi^*)] \tag{24}$$

これは(1)式にほかならない。(証明終り)

§ 5 Classical Droplet

"内部場"のHamiltonian

$$H=\frac{1}{2}\int d^3q\,\phi^*(q)(p_\lambda^2+\omega^2q_\lambda^2)\phi(q) \tag{25}$$

に対応する古典的描像として考えられるものは、運動量と位置の分布函数$\rho(q,p)$で記述されるDroplet の Energy

$$\rightarrow\frac{1}{2}\int d^3p\,d^3q\,(p_\lambda^2+\omega^2q_\lambda^2)\rho(q,p)$$

であろう。このとき、(16)式からわかるように、系のEnergy は重心静止系(P=0)で

$$E^2=M^2+\frac{1}{2}\int(\mathbf{p}^2+\omega^2\mathbf{q}^2)\rho(\mathbf{q},\mathbf{p})d\mathbf{q}\,d\mathbf{p} \tag{26}$$

となる。このDroplet が角運動量ℓで廻転しているときのEnergyは

$$E_\ell^2=M^2+\frac{1}{2}\int dp_r dq\,\rho_\ell(q,p_r)(p_r^2+\frac{\ell^2}{q^2}+\omega^2q^2)$$

$$\approx M^2+\frac{1}{2}(\langle p_r^2\rangle+\frac{\ell^2}{\langle q^2\rangle}+\omega^2\langle q^2\rangle) \tag{27}$$

となるであろう。これに、遠心力とHoock 力の釣合の条件

$$\frac{\partial E_\ell^2}{\partial\langle q^2\rangle}=\frac{1}{2}(-\frac{\ell^2}{\langle q^2\rangle^2}+\omega)=0,\quad \langle q^2\rangle=\frac{\ell}{\omega}, \tag{28}$$

を代入すれば

$$E_\ell^2 \approx M^2 + \frac{\langle p_r^2 \rangle}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ell^2}{\ell}\,\omega + \omega^2 \frac{\ell}{\omega}\right)$$

$$\approx M^2 + \frac{1}{2}\langle p_r^2 \rangle + \omega \ell \qquad (29)$$

となり、廻転体であるにも拘らず、遠心力によるDroplet のふくらみのために、系のTrajectory は linear になる。

Conclusion

Multi-local Field の系(1),(2)をFock 成分にもつような、オ2量子化された内部連続体振動を含む非局所理論を導き、これからCloud や Droplet Model を導き出した。この理論では、場の演算子は内部場 ϕ^* の汎函数 $\psi(P,\phi^*)$ となる。それらの交換関係

$$[\psi(P,\phi^*),\ \psi^*(P',\phi^*)]$$

は非常に複雑で、ここでは考えなかった。これはC-数ですらない。推察されることは、内部場があまり励起されていない状態に対しては、内部場のひろがりは

$$\ell_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

の程度なので、重心間の距離が $|x-x'| > \ell_0$ のところでは $[\psi,\psi^*] \approx 0$ であろうということだけである。(Sept. 25. 1969)

Reference

1) D. Itô　素研(印刷中)
2) V. Fock, Zeits. f. Phys. 45 751 (1927)
朝永;量子力学Ⅱ(オ10章)
3) H. Yukawa; Supple. Prog. Theor. Phys. 37-38 512 (1966)
4) D. Itô and E.W. Carriere; 素研 37 117, 134 (1968)
5) V. Fock, Phys. Zeits. Sowj. Un. 12 404 (1937)
Y. Nambu, Prog. Theor. Phys. 5 82 (1950)

*) 以下 $\psi_n(P,q_1\cdots q_n)$ は $(q_1\cdots q_n)$ の対称函数と仮定する。