Tentative Estimation of ψ (3100) — Lepton Coupling

伊　藤　大　介（埼玉大・理工）

最近 ψ (3100) の発見に関する次の Preprints を見る機会を得た。

J.E.Augustin et al. Discovery of A Narrow Resonance in e^+e^- annihilation

J.J.Aubert et al. Experimental Observation of A Heavy Vector Particle J.

それによれば $e^++e^- \to$ hadrons, $e^++e^- \to e^++e^-$, $\mu^++\mu^-$ の断面積は C.M.S.Energy $M = 3.105 \pm 0.003$ GeV で，半減幅 $\Gamma \lesssim 1.3$ MeV の共鳴的ピークをもち，その高さは

$$\left.\begin{array}{ll} e^++e^- \to \text{hadrons} & \sigma_h(M) \gtrsim 2300\,\text{nb} \sim 2\times 10^{-30}\,\text{cm}^2 \\ e^++e^- \to \left\{\begin{array}{l} e^++e^- \\ \mu^++\mu^- \end{array}\right. & \sigma_e(M) \sim 100\,\text{nb} \sim 10^{-30}\,\text{cm}^2 \end{array}\right\} \quad (1)$$

程度と思われる。これからの定量的な結論を得るには勿論尚早であるが，真空の構造に関連して興味があり，後の分析の為の枠の準備を兼ねて，敢えて暫定的分析を試みる。

1. Lepton の共鳴衝突

共鳴点の近傍のみを問題にすることにし，中性ベクトル場 $A_\mu(x)$ と（レプトン）＋（ハドロン）カレント $J_\mu(x)$ の相互作用 $H(x) = J_\mu(x)\,A_\mu(x)$ のみについての S－行列 $S = T\exp\left(-i\int d^4x\,H(x)\right)$ の $|i\rangle = |e^+e^-\rangle$, $|f\rangle = |\text{Leptons}\rangle + |\text{Hdrons}\rangle + \cdots\cdots$ についての行列要素

$$\langle f|S-1|i\rangle = -\int d^4x\;d^4y\,\langle f|J_\lambda(x)|0\rangle\Delta'_{\lambda\mu}(x-y)\langle 0|J_\mu(y)|i\rangle \quad (2)$$

$$\Delta'_{\lambda\mu}(x-y) = \Delta_{\lambda\mu}(x-y) - \int d^4z\,d^4u\,\Delta_{\lambda\nu}(x-z)\Pi_{\nu\omega}(z-u)\Delta'_{\omega\mu}(u-y) \quad (3)$$

を考える。但し，$J_\lambda(x)$ はカレントの Heisenberg 表示で $\partial_\lambda J_\lambda(x) = 0$，とする。

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{\lambda\mu}(x) = \dfrac{-i}{(2\pi)^4}\displaystyle\int d^4k\,\frac{\delta_{\lambda\mu}-k_\lambda k_\mu/k^2}{k^2+M_0^2-i\varepsilon}\,e^{-ik\cdot x} = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{k_\lambda k_\mu}{k^2}\right)\Delta(k) \\ \Pi_{\lambda\mu}(x-y) = T\langle 0|J_\lambda(x)J_\mu(y)|0\rangle = \dfrac{-i}{(2\pi)^4}\displaystyle\int d^4k\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{k_\lambda k_\mu}{k^2}\right)\Pi(k)\,e^{-ik(x-y)} \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\triangle'_{\lambda\mu}(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{k_\lambda k_\mu}{k^2}\right)\triangle'(k)\,e^{-ik\cdot x}$$

とおけば(3)から$\triangle'(k)=\triangle(k)\ (1+\Pi(k)\triangle'(k))$，即ち，

$$\triangle'(k)=1/(\triangle^{-1}(k)-\Pi(k))=1/(k^2+M^2-iM\Gamma) \tag{5}$$

が得られる。次に，

$$J_\lambda(x)=e^{i\bar{p}\cdot x}J_\lambda(0)\,e^{-i\bar{p}\cdot x}/(2\pi)^3 \tag{6}$$

によって$J_\lambda(0)$を定義すれば，(2)は

$$\langle f|S-1|i\rangle=2\pi i\,\delta^4(p_f-p_i)\triangle'(p_i)\langle f|J_\lambda(0)|0\rangle\langle 0|J_\lambda(0)|i\rangle/(2\pi)^3 \tag{7}$$

となり，これから全断面積

$$\sigma^{tot}=\frac{(2\pi)^4}{v}\sum_f|\langle f|J_\lambda(0)|0\rangle\langle 0|J_\lambda(0)|i\rangle\triangle'(p_i)/(2\pi)^3|^2\,\delta^4(p_f-p_i)$$
$$=\frac{|\triangle'(p_i)|^2}{(2\pi)^2v}\langle 0|J_\lambda(0)|i\rangle\langle i|J_\mu(0)|0\rangle\langle 0|J_\mu(0)\delta^4(\bar{p}-p_i)J_\lambda(0)|0\rangle \tag{8}$$

が得られる。$\partial_\lambda J_\lambda(x)=0$ により

$$\langle 0|J_\lambda(0)\delta^4(\bar{p}-p_i)J_\mu(0)|0\rangle=\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{p_{i\lambda}p_{i\mu}}{p_i^2}\right)W(p_i) \tag{9}$$

とおけば，$(2S_\pm+1)=2$ を e^+，e^- のスピン荷重として，(8)は

$$\sigma^{tot}=\frac{|\triangle'(p_i)|^2}{(2\pi)^2v(2S_++1)(2S_-+1)}\sum_{spin}\langle 0|J_\lambda(0)|i\rangle\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{p_{i\lambda}p_{i\mu}}{p_i^2}\right)$$
$$\times\langle i|J_\mu(0)|0\rangle W(p_i) \tag{10}$$

となる。次にこの式に現われる$W(p_i)$などを$\psi(3100)$の崩壊のパラメターで表わすため，運動量k，偏り$\varepsilon^\alpha_{k\lambda}$の$\psi$の崩壊のS−行列要素を求めれば

$$\langle f|S-1|k,\alpha\rangle=-i\int d^4x\langle f|J_\lambda(x)|0\rangle\langle 0|A_\lambda(x)|k\alpha\rangle$$
$$=-2\pi i\,\delta^4(p_f-k)\langle f|J_\lambda(0)\varepsilon^\alpha_{k\lambda}|0\rangle/(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0} \tag{11}$$

従って，Total Width は

$$\Gamma(\mathrm{k}) = 2\pi \sum_{f} \left| \frac{\langle f | J_\lambda(0)\, \varepsilon^{\alpha}_{k\lambda} | 0 \rangle}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2} k_0} \right|^2 \delta^4(p_f - k)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2\, 2k_0\, (2S_\psi + 1)} \sum_{\alpha} \langle 0 | J_\lambda(0)\, \varepsilon^{\alpha}_{k\lambda}\ \delta^4(\bar{p} - k) J_\mu(0)\, \varepsilon^{\alpha}_{k\mu} | 0 \rangle \tag{12}$$

となる。ここで $(2S_\psi + 1) = 3$ は ψ(3100) のスピン荷重を表わす。

$$\sum_{\alpha} \varepsilon^{\alpha}_{k\lambda}\ \varepsilon^{\alpha}_{k\mu} = (\delta_{\lambda\mu} - k_\lambda k_\mu / k^2)$$

により (12) は，

$$\Gamma(\mathrm{k}) = \frac{\langle 0 | J_\lambda(0) \delta^4(\bar{p} - k) J_\mu(0) | 0 \rangle}{(2\pi)^2\, 2k_0\, (2S_\psi + 1)} \left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{k_\lambda k_\mu}{k^2} \right) \tag{13}$$

従って，$\Gamma(p_i) = W(p_i) / (2\pi)^2\, 2p_{io}$，即ち

$$W(p_i) = (2\pi)^2\, 2p_{i0}\, \Gamma(p_i) \tag{14}$$

であることがわかる。特に ψ(3100) → $e^+ + e^-$ の幅を Γ_e とすれば (12) から

$$\Gamma_e(p_i) = \sum_{s\ s'} \int \frac{\langle 0 | J_\lambda(0) | qs, q's' \rangle \langle qs, q's' | J_\mu(0) | 0 \rangle}{(2\pi)^2\, 2p_{i0}\, (2S_\psi + 1)}$$

$$\times \left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{p_{i\lambda} p_{i\mu}}{p_i^2} \right) \delta^4(q + q' - p_i)\, d^3q\ d^3q'$$

$$= \sum_{\mathrm{spin}} \langle 0 | J_\lambda(0) | i \rangle \langle i | J_\mu(0) | 0 \rangle \left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{p_{i\lambda} p_{i\mu}}{p_i^2} \right) \frac{p^2}{\pi\, 2p_{i0}\, (2S_\psi + 1) v} \tag{15}$$

となる。ここで p は $e^+ e^-$ の C.M.Momentum である。これから，

$$\sum_{\mathrm{spin}} \langle 0 | J_\lambda(0) | i \rangle \left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{p_{i\lambda} p_{i\mu}}{p_i^2} \right) \langle i | J_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{\pi}{p^2} (2S_\psi + 1) v\, 2p_{i0}\, \Gamma_e(p_i) \tag{16}$$

であることがわかる。(14)，(16) を (10) に代入すれば

$$\sigma^{tot}=\frac{(2S_{\psi}+1)}{(2S_{+}+1)(2S_{-}+1)}\frac{\pi}{p^2}\frac{(2p_{i0}\Gamma_e(p_i))(2p_{i0}\Gamma(p_i))}{(p_i^2+M^2)^2+(M\Gamma)^2} \tag{17}$$

が得られる。C.M.S で $p_i\equiv(\vec{O}:W)$ とおけば(17)は

$$\sigma^{tot}=\frac{(2S_{\psi}+1)}{(2S_{+}+1)(2S_{-}+1)}\frac{\pi}{p^2}\frac{(2W)^2\,\Gamma_e(W)\,\Gamma(W)}{(M+W)^2\left[(W-M)^2+\frac{M^2\Gamma^2}{(M+W)^2}\right]} \tag{18}$$

Near Resonance で $(W\approx M)$;

$$\sigma^{tot}\approx\frac{(2S_{\psi}+1)}{(2S_{+}+1)(2S_{-}+1)}\frac{\pi}{p^2}\frac{\Gamma_e\,\Gamma}{(W-M)^2+(\frac{\Gamma}{2})^2} \tag{19}$$

となる。同様にして，$e^{+}+e^{-}\to e^{+}+e^{-}$ の断面積は，

$$\sigma_e\approx\frac{(2S_{\psi}+1)}{(2S_{+}+1)(2S_{-}+1)}\frac{\pi}{p^2}\frac{\Gamma_e^{\,2}}{(W-M)^2+(\Gamma/2)^2} \tag{20}$$

となる。

2. Estimation of Coupling Constant

$J_\lambda(x)\equiv -ig\bar{e}(x)\gamma_\lambda e(x)$ として(15)から $\Gamma_e(M)$ を求めれば

$$\Gamma_e(M)=\frac{g^2}{6M(2\pi)^2}\int d^3q\,d^3q'\,\frac{\mathrm{Tr}\,\gamma_\lambda(m+i\gamma\cdot q')\gamma_\lambda(m-i\gamma\cdot q)}{4E_q\,E_{q'}}\delta^4(q+q'-p_i)$$

$$=\frac{4g^2}{6M^3(2\pi)^2}(2m^2+M^2)\int\frac{p^2dp}{dw}d\Omega\approx\frac{M}{3}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right) \tag{21}$$

となる。依って(20)から

$$\sigma_e(M)\approx\frac{\pi}{3}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2\left(\frac{2}{\Gamma}\right)^2,\qquad \text{or}\quad \frac{g^2}{4\pi}=\left[\frac{3\sigma_e(M)}{\pi}\right]^{1/2}\frac{\Gamma}{2} \tag{22}$$

が得られる。(1)の値を額面通りうけ入れ，$\sigma_e(M)\approx 0.1\,\mu b$，$\Gamma=1.3\,\mathrm{MeV}$. とすれば，

$$\frac{g^2}{4\pi}=(0.1\,\mu b)^{1/2}\,\frac{1.3\,\mathrm{MeV}}{2}\approx(0.1\,\mu b)^{1/2}\,\frac{m_\pi}{200}=\frac{(0.1\times10^{-30}\,cm^2)^{1/2}}{200\times1.4\times10^{-13}\,cm}$$

$$\approx\frac{3}{2.8}\times10^{-5} \tag{23}$$

程度であることになる。我々の行列要素は

$$g^2 J_\lambda \frac{1}{p_i^2+M^2-iM\Gamma} J_\lambda = \frac{g^2}{M^2} J_\lambda \frac{1}{1+\frac{p_i^2}{M^2}-i\frac{\Gamma}{M}} J_\lambda \tag{24}$$

とかけるが低エネルギー $-p_i^2=4(p^2+m^2) \ll M^2$ ではこれは Fermi 相互作用 $\sim(g^2/M^2)$ $J_\lambda J_\lambda$ で近似され，その Coupling Constant は

$$G = \frac{g^2}{4\pi}/M^2 = \frac{10^{-5}}{9M_p^2} \tag{25}$$

となる。これは Universal Fermi より１桁小さい程度である。(22) からわかるように，$g^2/4\pi$ の推定には $\sigma_e(M)$ よりも Γ が sensitive である。Γ の実験値が推定にすぎぬ現状では果して Universal Fermi に一致するか，或はそれより小さいのか断定出来ないが W−Boson が存在するなら，このような Mechanism は Probable であろう。

最後に(19)，(20) から Resonance Peak の高さを求めれば

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{tot}(M) &= \frac{3\pi}{p^2}\frac{\Gamma_e}{\Gamma} \approx \frac{12\pi}{M^2}\frac{\Gamma_e}{\Gamma} \\ \sigma_e(M) &= \frac{3\pi}{p^2}\left(\frac{\Gamma_e}{\Gamma}\right)^3 \approx \frac{12\pi}{M^2}\left(\frac{\Gamma_e}{\Gamma}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

これから Γ_e/Γ を消去すれば

$$[\sigma^{tot}(M)]^2 = \frac{12\pi}{M^2}\sigma_e(M) \tag{27}$$

が得られる。(1) の値を額面通り受け入れれば

$$[\sigma^{tot}(M)]^2 = 4(\mu b)^2, \qquad \frac{4\pi}{M^2}\sigma_e(M) = \frac{8}{5}\times 10^2(\mu b)^2$$

となって２桁の不一致を生ずる。(27) が満足されるためには，

$$\sigma_e(M) \approx 50\,nb \tag{28}$$

と小さく見つもっても

$$\sigma^{tot}(M) = 8.7\,\mu b \quad (>2\,\mu b)$$

でなければならぬ。(26) から

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_e} = \frac{\sigma^{tot}(M)}{\sigma_e(M)} \tag{29}$$

であるが，

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^{tot}(M) = 2\ \mu b\ ,\quad \sigma_e(M) = 0.1\mu b \text{ のとき } \frac{\Gamma}{\Gamma_e} = 20 \\ &\sigma^{tot}(M) = 8.7\mu b\ ,\quad \sigma_e(M) = 0.05\mu b \text{ のとき } \frac{\Gamma}{\Gamma_e} \approx 200 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

となる。$\Gamma \sim g_h^2$(ψ−Hadron Coupling)，$\Gamma \sim g^2$ とすれば(30) は

$$g_h^2 / g^2 \sim 10 \sim 10^2 \tag{31}$$

であることを示している。Lepton Prod／Hadron Prod. $\sim 10^{-4}$ であることは(30) を支持するかも知れない。(Phys. Today. Oct. 1974)

この仕事を終ってから，Jackson も同様な推定を行っていることを森健寿氏からうかがったJackson は σ(M) でなくて $\int_{M-\triangle}^{M+\triangle} \sigma(E)\,dE$ を用いているとのことである。実は同様なことを考えたのであるが，上記文献のデータでは実行困難なので Peak Value を用いたのである。文献を見る機会を与えて下さった森氏に感謝致します。

(Dec. 9. 1974)