Path-Integral and Conventional Quantization

埼玉大・理工　　伊 藤 大 介

FeynmanのPath−Integral (P. I.)が通常の量子化と同等であることは，P. I. からSchrödinger Eq. が導かれることで証明済みである。それなら汎関数積分という〝特殊装置″のどこかで，mv(古典) → (ħ/i)V という操作がコッソリ行われているはずである。それをできるだけExplicit に曝露してみたいというのが本文の目的である。またそれによってP. I. と通常の量子力学の相互移行が容易になるので，量子力学的変換や近似法のP. I. への翻訳や，P. I. を量子力学的描像に移して実行する途が開けることになろう。一例としてP. I. からEikonal近似を導くこと，それを相対論的に拡張する可能性について述べる。

1. mv (古典) = (ħ/i) Vは何処にかくされているか?

P. I.

$$<\vec r\, t\,|K|\,\vec r'\, t'> = \left[\prod_{i=1}^{n} \int e^{\frac{i\tau}{\hbar}L(\vec r_{i-1},\, \vec r_i)} \frac{d\vec r_i}{A^3}\right] \frac{1}{A^3}\, e^{\frac{i\tau}{\hbar}L(\vec r_n,\, \vec r_{n+1})},$$

$$(\vec r_0 \equiv \vec r,\ \vec r_{n+1} \equiv \vec r') \tag{1}$$

$$= \int \frac{d\vec r_1}{A^3}\, e^{i\frac{m(\vec r-\vec r_1)^2}{2\hbar\tau} - i\frac{\tau}{\hbar}v(\vec r)} \int \frac{d\vec r_2}{A^3}\, e^{i\frac{m(\vec r_1-\vec r_2)}{2\hbar\tau} - i\frac{\tau}{\hbar}v(\vec r_1)} \tag{2}$$

は変位演算子 exp $(\vec r_1-\vec r)$ ・Vを用いて

$$= e^{-\frac{i\tau}{\hbar}v(\vec r)} \int \frac{d\vec r_1}{A^3}\, e^{i\frac{m(\vec r-\vec r_1)^2}{2\hbar\tau} - (\vec r-\vec r_1)\cdot\vec v} \int \frac{d\vec r_2}{A^3}\, e^{i\frac{m(\vec r-\vec r_2)^2}{2\hbar\tau} - i\frac{\tau}{\hbar}v(\vec r)} \tag{3}$$

とかくことができる。積分変数$\vec r_1$ の代りに古典速度 $v_c \equiv (\vec r-\vec r')/\tau$ を用いれば

$$= e^{-\frac{i\tau}{\hbar}v(\vec r)} \int \frac{\tau^3\, dv_c}{A^3}\, e^{\frac{i\tau}{2m\hbar}(mv_c-\frac{\hbar}{i}v)^2 + \frac{i\tau}{\hbar}\frac{\hbar^2}{2m}\Delta} \int \frac{d\vec r_2}{A^3} \cdots\cdots \tag{4}$$

となるが，ここで v_c のGauss積分を実行すれば[1)]

$$= e^{-\frac{i\tau}{\hbar}[v(\vec r)+\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta]} \int \frac{d\vec r_2}{A^3}\, e^{i\frac{m(\vec r-\vec r_2)^2}{2\hbar\tau} - i\frac{\tau}{\hbar}v(\vec r)} \int \frac{d\vec r_3}{A^3} \cdots\cdots \tag{5}$$

が得られる。(5)と(1), (2)を比べてみれば$\vec{r}_1$-積分については

$$\frac{1}{A^3} e^{\frac{i\tau}{\hbar} L(\vec{r}, \vec{r}_1)} = e^{-\frac{i\tau}{\hbar} H(\vec{r}, \frac{\hbar}{i}\vec{V})} \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_1) \tag{6}$$

であることがわかる。但し $H \equiv \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$ この操作をくりかえせば

$$\langle \vec{r}, t \,|K|\, \vec{r}' t' \rangle = \left[e^{-\frac{i\tau}{\hbar} H(r, \frac{\hbar}{i} V)} \right]^n \frac{1}{A^3} e^{\frac{i\tau}{\hbar} L(\vec{r}, \vec{r}')} = \left[e^{-\frac{i\tau}{\hbar} H} \right]^{n+1} \delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(n+1)\tau H} \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t')\left[v(\vec{r}) + \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\right]} \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \tag{7}$$

となって，Path－Integral から量子力学的変換関数が得られる。これは Feynman が展開によって Schrödinger Eq. を導いたのと同じことを変位演算子を用いてやっただけのことで，本質的には Feynman の同等性の証明と同じである。ちがうのは微分方程式でなくて，その積分結果が得られることである。

さて，上の経過で，はじめ古典 Lagrangian から出発したのに，結果が量子力学的 Hamiltonian になってしまった（See (6) ）のは，P. I. には Implicit に変位演算子が含まれているので Effectiveには，

$$\frac{mv_c^2}{2} - v(\vec{r}) - \mathbf{v}_c \cdot \frac{\hbar}{i} V = L \text{（古典）} - \mathbf{v} \text{（古典）} \cdot \mathbf{p} \text{（量子）} \tag{8}$$

が含まれていることによる。上の計算ではこれを

$$= \frac{[m\mathbf{v} \text{（古典）} - \frac{\hbar}{i} V]^2}{2m} - \left(V(\vec{r}) + \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta \right) \tag{9}$$

と変形したのであるが，この第１項は(4)の Gauss 積分

$$\int \frac{\tau^3}{A^3} d\mathbf{v}_c \, e^{\frac{i\tau}{\hbar} \frac{[mv_c - \frac{\hbar}{i} V]^2}{2m}} = 1 \tag{10}$$

の中に消え去ってしまった。結果的には，これは(9)の第一項＝０，即ち，

$$m\mathbf{v} \text{（古典）} - \frac{\hbar}{i} V = 0 \tag{11}$$

としたことになり，これによって実は P. I. の中で

$$\mathrm{L}\,(古典) - \mathbf{v}\,(古典)\cdot\mathbf{p}\,(量子) = \frac{[m\mathbf{v}\,(古典) - \mathbf{p}\,(量子)]^2}{2m} - \mathrm{H}\,(量子) = -\mathrm{H}\,(量子), \tag{12}$$

という，古典・量子混合の Legendre 変換が行われたことになっている。これが古典 Lagrangian から出発しながら，量子 Hamiltonian のみを含む量子力学的変換関数が得られるメカニズムであり，Gauss積分(10)は，機能的には通常の量子化(11)そのものであることがわかる。

2. Eikonal近似

P. I. から非相対論的 Eikonal 近似を導くことは，既に W. B. Campbell et. al.[2] によって試みられた問題であるが，上に述べた P. I. から直接量子力学的変換関数に移行する方法によっても，より簡単にこれを導き得ることを示そう。

$$\psi(\vec{r},\ t) = \int d\vec{r}'\,\langle\vec{r}\,t\,|K|\,\vec{r}'t'\rangle\,\psi(\vec{r},\ t') \tag{13}$$

に(7)を代入すれば

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r},\ t) &= \left[\, e^{-\frac{i\tau}{\hbar}v(\vec{r}) + \frac{i\hbar\tau}{2m}\Delta}\right]^{n+1}\psi(\vec{r}'t') \\
&= e^{-\frac{i\tau}{\hbar}v(\vec{r})}\, e^{\frac{i\hbar}{2m}(t-t_1)\Delta}\, e^{-\frac{i\tau}{\hbar}v(\vec{r})}\, e^{\frac{i\hbar}{2m}(t_1-t_2)\Delta}\cdots \\
&\quad e^{-\frac{i\tau}{\hbar}v(\vec{r})}\, e^{\frac{i\hbar}{2m}(t_n-t')}\,\psi(\vec{r},\ t) \\
&= e^{\frac{i\hbar t}{2m}\Delta}\prod_{i=0}^{n}\left(e^{-\frac{i\hbar t_i}{2m}\Delta}\, e^{-\frac{i\tau}{\hbar}v(\vec{r})}\, e^{\frac{i\hbar t_i}{2m}}\right) e^{-\frac{i\hbar t'}{2m}\Delta}\,\psi(\vec{r},t') \\
&= e^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{i\tau}{\hbar}v(\vec{r}(t_i))}\, e^{+\frac{it'}{\hbar}H_0}\,\psi(\vec{r},\ t')
\end{aligned} \tag{14}$$

となる。但し， $t_0 = t$， $H_0 \equiv \dfrac{-\hbar^2}{2m}\Delta$，

$$\vec{r}(t) \equiv e^{-\frac{i\hbar t}{2m}\Delta}\,\vec{r}\,e^{\frac{i\hbar t}{2m}\Delta} = \vec{r} + \frac{\hbar t}{2im}[\Delta,\ \vec{r}] = \vec{r} + \frac{\hbar t}{mi}\vec{\nabla} = \vec{r} + \vec{v}_g t \tag{15}$$

とおいた。ここで

$$\psi(\vec{r},\ t) = e^{-\frac{it}{h}H_0}\,\Phi(\vec{r},\ t) \tag{16}$$

によって相互作用表示を導入すれば，(14)から

$$\Phi(\vec{r}, +\infty) = T e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt V(\vec{r}+\vec{v}_g t)} \Phi(\vec{r}, -\infty) \tag{17}$$

が得られる。$\Phi(\vec{r}, -\infty) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} / (2\pi\hbar)^{3/2}$ とおいて $\Phi(\vec{p}', +\infty) \equiv <\vec{p}' | S | \vec{p}>$

$= \int \frac{d\vec{r}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-ip'\cdot r/\hbar} \Phi(\vec{r}, +\infty)$ を求めれば

$$<\vec{p}' | S | \vec{p}> = \int \frac{d\vec{r}}{(2\pi\hbar)^3} e^{-ip'\cdot r/\hbar} T e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt V(\vec{r}+\vec{v}_g t)} e^{ip\cdot r/\hbar}$$

$$= \int \frac{d\vec{r}}{(2\pi\hbar)^3} e^{-ip'\cdot r/\hbar} T e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt V(\vec{r}+(\vec{v}_g+\frac{\vec{p}}{m})t)}$$

$$= \delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) - \int \frac{d\vec{r}}{(2\pi\hbar)^3} e^{i(p-p')\cdot r/\hbar} \left(1 - T e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt V(\vec{r}+(\vec{v}_g+\frac{\vec{p}}{m})t)}\right) \tag{18}$$

となる。ここで$\vec{p}$に比べて Recoil $m\vec{v}_g$ を無視すれば（$\vec{p}$ 方向を z 一軸にとり）

$$T e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt V(\vec{r}+[\vec{v}_g+\frac{\vec{p}}{m}]t)} \simeq e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt V(x,y,z+\frac{p}{m}t)} = e^{-\frac{im}{\hbar p}\int_{-\infty}^{+\infty} dz V(xyz)}$$

依って，

$$\left.\begin{aligned} &<\vec{p}' | S-1 | \vec{p}> \simeq -\delta(p_z'-p_z) \int \frac{dxdy}{(2\pi\hbar)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_T-\vec{p}_T')\cdot\vec{r}} \left(1-e^{-i\Phi(x,y)}\right) \\ &\Phi(x, y) \equiv \frac{m}{\hbar p} \int_{-\infty}^{+\infty} dz V(xyz), \quad \vec{p}_T = 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

が得られる。以後は普通の場合と同じであるから，前方散乱振巾から全断面積を求めるだけにしておこう。前方散乱の場合，(19)は，V が少くとも軸対称として

$$<p'\mathbf{e} | S-1 | p\mathbf{e}> = -\delta(p'-p)\, 2\pi \int_0^\infty \frac{bdb}{(2\pi\hbar)^2} \left(1-e^{-i\Phi(b)}\right)$$

$$=-2\pi i\,\delta(E'-E)<\vec{p}|T|\vec{p}>=-\frac{2\pi i}{v}\delta(p'-p)<p|T|p>,\ v\equiv\frac{p}{m} \tag{20}$$

依って

$$<\vec{p}|T|\vec{p}>=-iv\int_0^\infty\frac{b\,db}{(2\pi\hbar)^2}\left(1-e^{-i\Phi(b)}\right) \tag{21}$$

$$f(0)=\frac{(2\pi)^2\hbar p}{v}<\vec{p}|T|\vec{p}>=\frac{p}{i\hbar}\int_0^\infty\frac{b\,db}{(2\pi\hbar)^2}\left(1-e^{-i\Phi(b)}\right) \tag{22}$$

が得られ。これから

$$\sigma^{tot}=4\pi\int_0^\infty b\,db\left(1-\mathrm{Re}\,e^{-i\Phi(b)}\right) \tag{23}$$

が得られる。

3. Proper Time Path−Integral

Proper Time Formalismを用いれば，上の方法を相対論に拡張することは容易である。詳細は殆んど非相対論の場合繰返しにすぎぬので，ここでは可能性の指摘にとどめる。

$$\psi(x_\lambda,\ \tau+\Delta\tau)=\int\frac{d^4x'}{A^4}e^{\frac{4i(x-x')^2}{\Delta\tau}-i\Delta\tau(M^2+g\phi(x))}\psi(x'_\lambda,\tau) \tag{24}$$

の iterationとして，Proper Time 形式でのPath−Integralを定義することができる。これは，

$$=e^{-i\Delta\tau(M^2+g\phi)}\int\frac{d^4x'}{A^4}e^{\frac{4i}{\Delta\tau}(x-x')^2-(X-X')\cdot\partial}\psi(x,\ \tau)$$

$$=e^{-i\Delta\tau(M^2+g\phi)}\int\frac{d^4x'}{A^4}e^{\frac{4i}{\Delta\tau}\left[x_\lambda-x'_\lambda-\frac{\Delta\tau}{2i}\partial_\lambda\right]^2+i\Delta\tau\partial_\lambda^2}\psi(x,\ \tau)$$

$$=e^{-i\Delta\tau\left[M^2-\partial_\lambda^2+g\phi(x)\right]}\psi(x,\ \tau) \tag{25}$$

となるので，これから，Proper Time形式でのSchrödinger Eq.

$$i\frac{\partial\psi(X,\tau)}{\partial\tau}=(M^2-\Box+g\phi(X))\psi(x,\tau) \tag{26}$$

が得られる。従って§2と同様にして相対論的散乱を取扱うことができる。

(Feb. 25. 1976)

参　　照

1) Operatorだけズレた積分を行うのは強引にみえるが，以下につづく$\vec{r}$の関数がFourier展開できるなら，問題はない。

2) W.B.Campbell et al. P.R.12D.# 8,2363 (1975)